

І. Ю. Хома, О. А. Кондратенко

Деякі співвідношення узагальненої теорії нетонких пластин з початковими напруженнями

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

A system of differential equations of equilibrium of non-thin transversely isotropic plates with a similar field of initial strains is built. The general solution of the present system is found, and, on its base, the problem of a strained state of the plate weakened by a round cylindrical cavity has been considered.

Проблемі дослідження пружних тіл з початковими напруженнями приділяється достатньо уваги [1–3]. Напружено-деформований стан нетонких ортотропних оболонок вивчався в [4]. В роботах [5, 6] викладено метод побудови рівнянь рівноваги нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями. Редукція тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної здійснюється за допомогою методу розкладу функцій компонент напружень σ_{ij} і переміщень u_j в скінченний ряд Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\varsigma)$ координати товщини [7]

$$\{\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3), u_j(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x), u_j^{(k)}(x)\}P_k(\varsigma), \quad (1)$$

де $\varsigma = h^{-1}x_3$, $x = (x_1, x_2)$ — точка серединної поверхні S ; h — половина товщини оболонки. Відносно коефіцієнтів розкладу $\sigma_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)$, $u_j^{(k)}(x_1, x_2)$ як функцій двох незалежних змінних виводиться система диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови.

Нижче розглядається система рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропних пластин з однорідним полем початкових напружень $p_{ij}^{(0)}$. При цьому вважається, що $p_{ij}^{(0)} = \text{const}$ при $i = j$, $p_{ij}^{(0)} = 0$ при $i \neq j$. Рівняння рівноваги пластини (в припущенні, що граничні площини $x_3 \pm h$ вільні від зовнішніх зусиль) мають вигляд

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - h^{-1} \underline{\sigma}_{3j}^{(k)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, N), \quad (2)$$

де $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$; $\underline{\sigma}_{3j}^{(k)} = (2k+1)(\sigma_{3j}^{(k-1)} + \sigma_{3j}^{(k-3)} + \dots)$, причому $\sigma_{3j}^{(-k)} = 0$, якщо $k > 0$; N — довільне натуральне число, яке надалі вважатиметься парним, тобто $N = 2n$ ($n = 1, 2, \dots, < \infty$). Співвідношення між функціями напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ і деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ для трансверсально-ізотропного тіла визначаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= h[(c_{11} + p_{11}^{(0)})\varepsilon_{11}^{(k)} + c_{12}\varepsilon_{22}^{(k)} + c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; & \sigma_{12}^{(k)} &= h[(c_{66} + p_{11}^{(0)})\varepsilon_{12}^{(k)} + c_{66}\varepsilon_{21}^{(k)}]; \\ \sigma_{22}^{(k)} &= h[c_{12}\varepsilon_{11}^{(k)} + (c_{11} + p_{22}^{(0)})\varepsilon_{22}^{(k)} + c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; & \sigma_{21}^{(k)} &= h[c_{66}\varepsilon_{12}^{(k)} + (c_{66} + p_{22}^{(0)})\varepsilon_{21}^{(k)}]; \\ \sigma_{33}^{(k)} &= h[c_{13}(\varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}) + (c_{33} + p_{33}^{(0)})h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; & \sigma_{31}^{(k)} &= h[c_{44}\varepsilon_{13}^{(k)} + (c_{44} + p_{33}^{(0)})\underline{u}_1^{(k)}]; \\ \sigma_{13}^{(k)} &= h[(c_{44} + p_{11}^{(0)})\varepsilon_{13}^{(k)} + c_{44}h^{-1}\underline{u}_1^{(k)}]; & \sigma_{32}^{(k)} &= h[c_{44}\varepsilon_{23}^{(k)} + (c_{44} + p_{33}^{(0)})\underline{u}_2^{(k)}]; \\ \sigma_{23}^{(k)} &= h[(c_{44} + p_{22}^{(0)})\varepsilon_{23}^{(k)} + c_{44}h^{-1}\underline{u}_2^{(k)}] \quad (k = 0, 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ — пружні сталі матеріалу;

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_{\alpha} u_j^{(k)}; \quad \varepsilon_{3j} = \underline{u}_j^{(k)} = (2k+1)(u_j^{(k+1)} + u_j^{(k+3)} + \dots) \quad (\alpha = 1, 2; j = 1, 2, 3),$$

$u_j^{(k)} = 0$, якщо $k > N$.

Наявність початкових напружень $p_{ij}^{(0)}$ у визначальних рівняннях (3) приводить до не-симетричності дотичних напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$. У цьому випадку рівняння рівноваги (2) в комплексній формі записуються таким чином:

$$\begin{aligned} \partial_z[\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + i(\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)})] + \partial_{\bar{z}}[\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + i(\sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)})] - h^{-1} \underline{\sigma}_{3+}^{(k)} &= 0; \\ \partial_z \sigma_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(k)} - h^{-1} \underline{\sigma}_{33}^{(k)} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$2\partial_z = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad 2\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad z = x_1 + ix_2; \quad \bar{z} = x_1 - ix_2; \quad \sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + i\sigma_{23}^{(k)}.$$

Припустимо, що $p_{11}^{(0)} = p_{22}^{(0)}$, тоді рівняння стану (3) можна зобразити формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= 2h[(c_{12} + dc_{66})e^{(k)} + c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; \quad \sigma_{33}^{(k)} = h[c_{13}e^{(k)} + (c_{33} + p_{33}^{(0)})h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; \\ \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + i(\sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)}) &= 2h[(c_{12} + c_{66})e^{(k)} + p_{11}^{(0)}\partial_z u_+^{(k)} + c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}]; \\ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + i(\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}) &= 4dhc_{66}\partial_{\bar{z}} u_+^{(k)}; \quad \sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)} = 2hp_{11}^{(0)} \text{Im}(\partial_z u_+^{(k)}); \\ \sigma_+^{(k)} &= h[2(c_{44} + p_{11}^{(0)})\partial_{\bar{z}} u_3^{(k)} + c_{44}h^{-1}\underline{u}_+^{(k)}]; \quad \sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)} = 4dhc_{66} \text{Im}(\partial_{\bar{z}} u_+^{(k)}); \\ \sigma_{3+}^{(k)} &= h[2c_{44}\partial_{\bar{z}} u_3^{(k)} + (c_{44} + p_{33}^{(0)})h^{-1}\underline{u}_+^{(k)}] \quad (k = 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (5)$$

де $u_+^{(k)} = u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}$; $d = 1 + p_{11}^{(0)}/2c_{66}$; $e^{(k)} = \partial_z u_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(k)}$.

Якщо внести значення моментів (5) у рівняння рівноваги (4), то отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $u_j^{(k)}$. За структурою вона розпадається на дві групи рівнянь, що описують відповідно симетричне і косиметричне (відносно серединної площини S) деформування пластини. Так, при симетричному деформуванні пластини система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} c_{66}^* \Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\bar{z}} e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \left[-2c_{44} \sum_{s=1}^k \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} + \right. \\ \left. + 2c_{13} \sum_{s=k+1}^n \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} - \tilde{c}_{44} h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right] &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ c_{44}^* \Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \left[-c_{13} \sum_{s=0}^{k-1} e^{(2s)} + c_{44} \sum_{s=k}^h e^{(2s)} - \tilde{c}_{33} h^{-1} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ — оператор Лапласа;

$$c_{66}^* = c_{66}(1 + d_1); \quad c_{44}^* = c_{44}(1 + d_2); \quad \tilde{c}_{33} = c_{33}(1 + d_3); \quad \tilde{c}_{44} = c_{44}(1 + d_4);$$

$$d_1 = \frac{p_{11}^{(0)}}{c_{66}}; \quad d_2 = \frac{p_{11}^{(0)}}{c_{44}}; \quad d_3 = \frac{p_{33}^{(0)}}{c_{33}}; \quad d_4 = \frac{p_{33}^{(0)}}{c_{44}};$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Розв'язок рівнянь (6) визначається таким же способом, як і в [8]:

$$c_{66}u_+^{(0)} = \mathfrak{a}^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m;$$

$$c_{66}u_+^{(2k)} = \lambda_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\mathfrak{a}_1^* h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(1)} V_m;$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — довільні аналітичні функції; V_m і w_s — функції, що визначаються з рівностей

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0; \quad \Delta w_s - t_s h^{-2} w_s = 0, \quad (8)$$

в яких параметрами k_m і t_s є корені відповідних характеристичних рівнянь [8]. Враховуючи розв'язок (7), співвідношення (5) для симетричного деформування пластини набудуть вигляду

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + i(\sigma_{12}^{(0)} + \sigma_{21}^{(0)}) = 4dh \left[-z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right];$$

$$\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} = 4h\mathfrak{a}_0 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2 \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)} V_m;$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = \sum_{m=1}^{2n} \tilde{d}_m^{(0)} V_m; \quad \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{21}^{(0)} = -id_1 h (\mathfrak{a} + 1) [\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}];$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2 \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(2k)} V_m; \quad \sigma_{12}^{(2k)} - \sigma_{21}^{(2k)} = 0,5d_1 \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} t_s w_s \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (9)$$

$$\sigma_+^{(1)} = \mathfrak{a}_{11} h^2 \overline{\varphi''(z)} + 2h \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2ih \sum_{s=1}^n q_s^{(1)} \partial_{\bar{z}} w_s;$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = 2h \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2ih \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = 2, 3, \dots, n);$$

$$\sigma_{3+}^{(2k-1)} = 2h \sum_{m=1}^{2n} p_{3m}^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2ih \sum_{s=1}^n q_{3s}^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Розглянемо в області S полярну систему координат r, ϑ і скористаємося формулами переходу від однієї системи координат до іншої. Тоді матимемо співвідношення

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}; & \sigma_{r\vartheta}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta r}^{(2k)} &= \sigma_{12}^{(2k)} - \sigma_{21}^{(2k)}; \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + i(\sigma_{r\vartheta}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta r}^{(2k)}) &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} + i(\sigma_{12}^{(2k)} - \sigma_{21}^{(2k)}); \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + i(\sigma_{r\vartheta}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta r}^{(2k)}) &= e^{-2i\vartheta}[\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + i(\sigma_{12}^{(2k)} + \sigma_{21}^{(2k)})]; \\
 \sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(2k-1)} &= e^{-i\vartheta}\sigma_{+}^{(2k-1)}; & \sigma_{3r}^{(2k-1)} + i\sigma_{3\vartheta}^{(2k-1)} &= e^{-i\vartheta}\sigma_{3+}^{(2k-1)}; \\
 u_r^{(2k)} + iu_{\vartheta}^{(2k)} &= e^{-i\vartheta}u_{+}^{(2k)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Функції $\sigma_{33}^{(2k)}, u_3^{(2k-1)}$ залишаються, очевидно, незмінними. На основі наведених формул розглянемо задачу про напружений стан пластини, послабленої круговою циліндричною порожниною. На площині S це буде область з круговим отвором радіусом R . Припустимо, що поверхня порожнини вільна від напружень і не деформується вздовж твірної. Сформульовані крайові умови на контурі кругового отвору матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
 |\sigma_{rr}^{(2k)}(r, \vartheta) + i\sigma_{r\vartheta}^{(2k)}(r, \vartheta)|_{r=R} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n); \\
 u_3^{(2k-1)}(r, \vartheta)|_{r=R} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{11}$$

На нескінченності пластина знаходиться під дією постійних розтягуючих $\sigma_{11}^{\infty} = 2p_1$, $\sigma_{22}^{\infty} = 2p_2$ і зсувних $\sigma_{12}^{\infty} = 2\tau$ зусиль ($p_1, p_2, \tau = \text{const}$).

Зобразимо аналітичні функції $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ у вигляді рядів

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \tag{12}$$

де a_n, b_n ($n > 0$) — довільні постійні; константи a_0 і b_0 визначаються (згідно з формулами (9) значеннями моментів компонент напружень на нескінченності. Вигляд функцій V_m і w_s залежить від значень коренів характеристичних рівнянь. Так, якщо k_1 — дійсний додатний корень, а k_2 і k_3 — комплексно-спряжені, то

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(x_1\rho) e^{in\vartheta}; & V_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(x_2\rho) e^{in\vartheta}; \\
 V_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(x_3\rho) e^{in\vartheta};
 \end{aligned} \tag{13}$$

де B_n, C_n, D_n — довільні постійні; $K_n(x_1\rho)$, $H_n^{(1)}(x_2\rho)$ і $H_n^{(2)}(x_3\rho)$ — циліндричні функції Макдональда, Ханкеля першого і другого роду: $\rho = r/R$; $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$; $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{-k_2}$; $x_3 = \bar{x}_2$. Аналогічне зображення має місце і для функції w_s . Тут використані циліндричні функції, які затухають на нескінченності.

Якщо внести значення функцій (12), (13) у формули (7), (9), (10) і врахувати граничні умови (11), одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення довільних постійних.

Таблиця 1. Залежність поперечних напружень від зміни параметра λ_3

λ	-0,08	-0,06	-0,04	0	0,04	0,06	0,08
$\sigma_{33}/2p$	0,622	0,625	0,628	0,633	0,637	0,639	0,640
$\sigma_{r3}/2p$	0,329	0,395	0,453	0,549	0,622	0,654	0,680
$\sigma_{3r}/2p$	0,581	0,572	0,564	0,549	0,534	0,527	0,520

Таблиця 2. Зміна поперечних напружень по товщині пластини

ς	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,95	1,0
$\sigma_{33}/2p$	0,464	0,470	0,470	0,461	0,436	0,217	0,004
$\sigma_{r3}/2p$	0	0,079	0,117	0,146	0,223	0,231	0,175
$\sigma_{3r}/2p$	0	0,073	0,099	0,107	0,154	0,114	0,030

Для прикладу розглянемо випадок, коли пластина знаходиться в полі всестороннього розтягу, тобто коли $p_1 = p_2 = p$, $\tau = 0$. При числових розрахунках брали до уваги значення технічних постійних матеріалу, згідно з якими параметри d_j ($j = 1, 2, 3, 4$) визначаються формулами

$$d_1 = 2\lambda_1(1 + \nu); \quad d_2 = \frac{\lambda_1 E}{G'}; \quad d_3 = \lambda_3(1 - 2\nu'^2)(1 + \nu)^{-1}; \quad d_4 = \frac{\lambda_3 E}{G'}.$$

Тут $\lambda_1 = p_{11}^{(0)}/E$; $\lambda_3 = p_{33}^{(0)}/E$; E , E' – модулі пружності в площині ізоотропії і нормальній до неї площині, ν , ν' – коефіцієнти Пуассона; G' – поперечний модуль зсуву; $e = E/E'$.

В табл. 1 наведені значення поперечних напружень σ_{33} , σ_{r3} , σ_{3r} на поверхні порожнини $\rho = 1$ в точці $\varsigma = 1$ (при $\nu = \nu' = 0,25$; $E/G' = 2,5$; $e = 1,25$; $\lambda_1 = 0$) залежно від зміни параметра λ_3 , що характеризує зміну початкових напружень $p_{33}^{(0)}$. Табл. 2 ілюструє зміну цих же напружень по товщині пластини на циліндричній поверхні $\rho = 1,04$. Наведені числові дані характеризують швидкість затухання поперечних напружень при віддаленні від поверхні порожнини. Із наведених таблиць видно, що початкові напруження впливають на напружений стан пластини і їх потрібно враховувати при аналізі концентрації напружень біля отворів.

1. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Київ: Наук. думка, 1991. – 288 с. (Неклассические проблемы механики разрушения: в 4-х т: Т. 2.).
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. – Київ: Вища шк., 1995. – 304 с.
3. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 7. – P. 744–765.
4. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Influence of variable thickness on displacements and stresses in nonthin cylindrical orthotropic shells with elliptic cross-section // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 8. – P. 900–907.
5. Хома І. Ю. Про рівняння математичної теорії оболонок з початковими напруженнями. // Сучасні проблеми математики. Матер. Міжнар. наукової конф. – Чернівці–Київ. – 1998. – С. 176–180.
6. Хома І. Ю., Хома Ю. И. К теории нетонких оболочек с начальными напряжениями и деформациями // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 134–140.
7. Khoma I. Yu. Thermopiezoelectric equations for nonthin ceramic shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, № 2. – P. 118–128.
8. Khoma I. Yu. Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. Mathem. Sci. – 2000. – 101, № 6. – P. 3577–3584.