DOI: https://doi.org/10.15407/usim.2018.05.013
УДК 519.1

М.Ф. СЕМЕНЮТА, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры физ.-мат. дисциплин,
Летная академия Национального авиационного университета, г. Кропивницкий
marina_semenyuta@ukr.net

З.А. ШЕРМАН, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
кафедры медицинской физики и информационных технологий №2,
Донецкий национальный медицинский университет,
sherman.zoya@gmail.com

О.Н. ДМИТРИЕВ, заведующий кафедры летной эксплуатации,
аэродинамики и динамики полета,
Летная академия Национального авиационного университета, г. Кропивницкий
Dmitronik70@i.ua

НЕПОЛНЫЕ ТУРНИРЫ И МАГИЧЕСКИЕ ТИПЫ РАЗМЕТОК

Предложен обзор существующих теоретических результатов по вершинным магическим разметкам графов, применяемым в качестве математических моделей в задачах составления расписаний для неполных турниров. Выполнена их систематизация для адаптации к другим видам задач. Методы построения графов неполных турниров разбиты на три группы. Предложены новые подходы для их реализации.

Ключевые слова: *справедливый неполный турнир, эквивалентный неполный турнир, гандикап турнир, дистанционная магическая разметка, дистанционная d-антимагическая разметка, уравновешенная дистанционная d-антимагическая разметка.*

Введение

Составление расписаний для неполных круговых турниров — одно из направлений исследований, применяемых математические модели на основе размеченных графов. При большом количестве команд, участвующих в соревнованиях, невозможно провести полный круговой турнир за короткое время. Поэтому возникает необходимость в планировании неполных турниров, имитирующих сложность полного кругового турнира. Существует несколько типов неполных турниров, каждый из них имеет свои характеристики. В статье рассматриваются методы построения справедливых, им эквивалентных и уравновешенных (гандикап) неполных турниров. Решение проблемы их планирования для n команд, играющих с r оппонентами, равносильно решению задачи построения соответствующей дистанционной магической или антимагической разметки r-регулярного графа порядка n.

Термин *дистанционная магическая разметка* появился в 2009 году в статье [1]. Эта же разметка была введена независимо авторами работы [2] в 1994 и [3] в 2003 годах и названа, в первом случае Σ разметкой, а во втором — 1-вершинной магической вершинной разметкой. Подробный обзор по данной тематике можно найти в [4] и [5]. Следующая, рассматриваемая, разметка графа — это (a, d)-дистанционная антимагическая. Она впервые предложена в 2012 году С. Арумугамом и Н. Камачи [6]. Д. Фрончек такую разметку назвал дистанционной d-антимагической [7]. В [6] получены первые общие результаты, в том числе условия существования (a, d)–дистанционной антимагической разметки, а также сформулированы открытые проблемы, частично решенные в [7–12]. Для уравновешенных (гандикап) турниров используется уравновешенная (гандикап) дистанционная антимагическая разметка. Этот термин ввела Т. Коваржова в 2016 году, наряду с ним часто встречается термин *упорядоченная дистанционная антимагическая разметка* [7]. Все рассмотренные выше разметки относятся к магическому типу вершинных разметок графов.

Вопросы существования графов турниров, методы их построения отображены в работах Д. Фрончека, П. Коварж, Т. Коваржовой, А. Шепаника, В. Крайка, Б. Фрейберга.

Постановка задачи

Цель данной статьи — выполнить обзор существующих теоретических результатов по вершинным магическим разметкам графов, применяемым в качестве математических моделей в задачах по составлению расписаний для неполных турниров.

Для ее реализации необходимо систематизировать основные теоретические сведения, относящиеся к данной тематике, выделить открытые проблемы, классифицировать методы построения графов турниров и унифицировать алгоритмы их описания согласно этой классификации.

Справедливый и эквивалентный неполные турниры

При планировании спортивных соревнований часто возникают ситуации, когда по разным причинам отсутствует возможность проведения полного кругового турнира. В таком случае, для составления расписания организаторы соревнований выдвигают следующие требования: каждая команда должна играть с одинаковым числом оппонентов; сложность турнира для каждой команды должна имитировать сложность полного кругового турнира. Для реализации второго условия выполняется ранжирование n команд, например, по результатам предыдущего года [7]. Команды могут оцениваться в диапазоне от первого до n, в соответствии с занятыми местами. Будем отождествлять номер команды с ее рангом. Под *силой* i*-й команды* в полном круговом турнире понимают число $s_n(i) = n+1-i$, а в качестве *общей силы* оппонентов i-й команды принимается число $S_{n,n-1}(i) = n(n+1)/2 - s_n(i) = (n+1)(n-2)/2+i$. Последовательность всех общих сил, расположенных в возрастающем порядке, образует арифметическую прогрессию с разностью единица. Поэтому, для имитации аналогичной сложности в неполном круговом турнире необходимо получить арифметическую прогрессию из общих сил оппонентов каждой команды. Если такой турнир из n команд с r раундами, где $r < n-1$ возникает из кругового турнира опусканием определенных матчей, при условии, что каждая команда должна играть одинаковое количество матчей, то его обозначают FIT(n, r) и называют *справедливым неполным турниром*. В FIT(n, r) каждая команда играет с r другими командами и общая сила противников, играющих с i-й командой, определяется по формуле $S_{n,r}(i) = (n+1)(n-2)/2+i-k$ для каждого i и фиксированной постоянной k. С другой стороны, пропущенные матчи также образуют своего рода турнир, его обозначают EIT(n, $n-r-1$) и называют *эквивалентным неполным турниром*. В EIT(n, $n-r-1$) каждая команда играет $n-r-1$ матчей и общая сила оппонентов $S^*_{n,n-r-1}(i)$ у i-й команды одинакова и равна постоянной k, т. е. $S^*_{n,n-r-1}(i) = k$. Очевидно FIT(n, r) существует тогда и только тогда, когда существует его дополнение EIT(n, $n-r-1$). Эти турниры изучались в работах [7, 13, 14].

Математической моделью турнира может выступать конечный неориентированный граф, не содержащий петель и кратных ребер. Каждой команде соответствует вершина графа и две вершины — смежные, если между соответствующими командами состоялся матч. Так как ранг команды совпадает с ее номером, то в качестве меток вершин графа порядка n используем числа от единицы до n. Нахождение $\mathrm{EIT}(n, r)$ эквивалентно решению задачи существования дистанционной магической разметки для r-регулярного графа G порядка n, а $\mathrm{FIT}(n, n-r-1)$ соответствует дополнение $\overline{G}$, т.е. $(n-r-1)$-регулярный граф. Планирование $\mathrm{FIT}(n, n-r-1)$ означает поиск $(n-r-1)$-регулярного графа порядка n, допускающего дистанционную антимагическую разметку.

Пусть $G=(V, E)$ — конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Через f обозначим вершинную разметку графа G, а через $N(u)$ — множество смежности вершины $u \in V(G)$. Вес $w_f(u)$ вершины u при разметке f определяют как сумму меток вершин смежных с u, т. е. $w_f(u)=\sum_{v\in N(u)} f(v)$, где каждая вершина $v \in V(G)$.

Определение 1 [3]. *Дистанционной магической разметкой* (или 1-вершинной магической вершинной, или сигма разметкой) графа $G=(V, E)$ порядка n называют биекцию $f\colon V(G)\to\{1, 2, \ldots, n\}$, для которой существует такое натуральное число k, что для каждой вершины $u \in V(G)$ выполняется условие $w_f(u)=k$, где $k=\mathrm{const}$. Постоянная k называется *магической постоянной* разметки f. Граф, допускающий дистанционную магическую разметку, называют *дистанционным магическим графом*.

Определение 2 [7]. *Дистанционной d-антимагической* разметкой графа $G=(V, E)$ порядка n называется биекция $\overline{f}\colon V(G)\to\{1, 2, \ldots, n\}$, при которой существует такой порядок вершин G, что их веса $w_{\overline{f}}(u_1), w_{\overline{f}}(u_2), \ldots, w_{\overline{f}}(u_n)$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d, где $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V(G)$, d — фиксированное неотрицательное целое число. Граф, допускающий такую разметку, называют *дистанционным d-антимагическим*.

В этом случае, порядок вершин не имеет значения и не связан с их метками, полученными в результате разметки $\overline{f}$. Когда $d=0$, $\overline{f}$ является дистанционной магической разметкой, т. е. $\overline{f}=f$, когда $d=1$, $\overline{f}$ называют *дистанционной антимагической*.

Известные результаты для указанных разметок способствовали нахождению условий существования $\mathrm{EIT}(n, r)$, которые отображены в теоремах 1-4, леммах 1, 2. Отметим, что в эквивалентном неполном турнире $\mathrm{EIT}(n, r)$ из n команд с r раундами общая сила противников, играющих с i-й командой, равна числу $S^*_{n,r}(i)=k$ для каждого i. Таким образом, для r-регулярного дистанционного магического графа порядка n, представляющего $\mathrm{EIT}(n, r)$, имеем $w_{\overline{f}}(i)=S^*_{n,r}(i)=k$. Вопрос существования $\mathrm{EIT}(n, r)$ для четного n полностью решен Д. Фрончеком, П. Коварж, Т. Коваржовой в [13]. Случай нечетного n рассмотрен Д. Фрончеком в [14].

Теорема 1 [13]. Пусть $\mathrm{EIT}(n, r)$ — эквивалентный неполный турнир. Тогда r — четное.

Теорема 2 [13]. Для четного n эквивалентный неполный турнир $\mathrm{EIT}(n, r)$ существует тогда и только тогда, когда $n\equiv r\equiv 0 \pmod 4$ или $n\equiv r+2 \pmod 4$.

Теорема 3 [14]. Пусть q — нечетное число, $r=2^s q$, где $q>1$, $s\geq 1$ и $n=tq$ для некоторого нечетного t, $t\geq 2^s+1$. Тогда существует эквивалентный неполный турнир $\mathrm{EIT}(n, r)$.

Лемма 1 [14]. Пусть q — нечетное число, $r=2^s q$, где $q>1$, $s\geq 1$. Тогда для $n-(2^s+1)\,q\equiv 0 \pmod 4$ и $n\geq(2^{s+1}+1)\,q+2$ существует эквивалентный неполный турнир $\mathrm{EIT}(n, r)$.

Лемма 2 [14]. Пусть q — нечетное число, $r=2^s q$, где $q>1$, $s\geq 1$. Тогда для $n-(2^s+1)\,q\equiv 2 \pmod 4$ и $n\geq(2^{s+1}+3)\,q+2$ существует эквивалентный неполный турнир $\mathrm{EIT}(n, r)$.

Теорема 4 [14]. Пусть n — нечетное число, $r=2^s q$ с $s\geq 1$ и q — нечетным. Тогда эквивалентный неполный турнир $\mathrm{EIT}(n, r)$ существует, когда $r\leq 2(n-2)/7$.

Следствие [14]. Пусть n — нечетное число, а r — такое четное число, при котором $r<n$ и $n-r-1\neq 2^z$ для любого $z>0$. Тогда справедливый неполный турнир $\mathrm{FIT}(n, r)$ существует всякий раз, когда $r>5(n-2)/7$.

Справедливый неполный турнир $\mathrm{FIT}(n, r)$ имитирует структуру полного кругового турнира, но он имеет существенные недостатки: команда с наивысшим рангом один имеет оппонентов, у которых общая сила $S_{n,r}(1)$ – наименьшая; самая сильная команда имеет больше шансов на победу. В эквивалентном неполном турнире $\mathrm{EIT}(n, r)$ общая сила оппонентов каждой команды одинакова, поэтому он не сохраняет сложность полного турнира и не может считаться справедливым. Кроме того, в EIT(n, r), также как и в FIT(n, r), сильная команда имеет больше шансов на победу. Чтобы командам дать одинаковые шансы на победу необходимо устранить эти недостатки. Это возможно в уравновешенном неполном турнире, о нем пойдет речь в следующем разделе.

Уравновешенные (гандикап) турниры

Уравновешенный (гандикап) неполный турнир из n команд с r раундами обозначается HIT(n, r) и представляет собой турнир, в котором каждая команда играет с r другими командами и общая сила противников, играющих с i-й командой, определяется по формуле $\overline{S}_{n,r}(i)=t-i$ для каждого i и фиксированной постоянной t. Таким образом, самая сильная команда играет с самыми сильными оппонентами, а самая слабая — с самыми слабыми. С точки зрения дистанционных магических графов это ограничение соответствует нахождению гандикап графа.

Определение 3 [7]. *Уравновешенной (гандикап) дистанционной d-антимагической разметкой* графа $G=(V,E)$ порядка n называется такая биекция $f^*: V(G)\to\{1,2,...,n\}$, для которой $f^*(u_i)=$ $=i$ и последовательность весов $w_{f^*}(u_1), w_{f^*}(u_2),...$ $..., w_{f^*}(u_n)$ всех вершин образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью d, где $d\geq 0$, $u_1, u_2, ..., u_n \in V(G)$. Граф G, допускающий такую разметку f^*, называют *уравновешенным* (или *гандикап*) *дистанционным d-антимагическим* графом или *d-гандикап* графом. Когда $d=1$, то речь идет о гандикап дистанционной антимагической разметке или, коротко, гандикап разметке и, соответственно, гандикап графе. В гандикап графе порядка n, вес каждой вершины i равен $w_{f^*}(i)=f^*(i)+l=i+l$, где $i=1, 2, ..., n$.

Если G — r-регулярный d-гандикап граф порядка n, тогда он соответствует d-уравновешенному (или d-ганикап) турниру из n команд, сыгравших r раундов, который обозначим HIT(n, r, d) и HIT(n, r), если $d=1$. Остановимся на случае $d=1$. Исследованию этого направления посвящены работы [7, 15—21]. На протяжении всего дальнейшего изложения, будем идентифицировать номер вершины u_i гандикап графа с ее меткой i, таким образом, $f^*(u_i)=f^*(i)=i$.

Лемма 3 [15, 19]. В r-регулярном гандикап графе порядка n вес каждой вершины i равен $w(i)=(r-1)(n+1)/2+i$.

Лемма 3 часто используется, чтобы показать, что r-регулярный гандикап граф порядка n не существует при соответствующих значениях параметров r и n. Этот факт и некоторые другие свойства графов способствовали доказательству теоремы 6.

Теорема 6 [15, 19].

- Не существует 1-регулярный гандикап граф.
- Не существует 2-регулярный гандикап граф.
- Не существует r-регулярный гандикап граф порядка n, если оба r и n — четные.
- Не существует $(n-1)$-регулярный гандикап граф.
- Не существует $(n-2t)$-регулярный гандикап граф для любого натурального $t\in[1,\lfloor n/2\rfloor]$.
- Не существует r-регулярный гандикап граф порядка n для $r\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ и $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$.
- Не существует $(n-3)$-регулярный гандикап граф порядка n.

В теоремах 7—12 поднимается вопрос существования r-регулярного гандикап графа порядка n для четного n и нечетного r.

Теорема 7 [15, 18]. Для $n\equiv 0(\mathrm{mod}8)$ и $r\equiv$ $\equiv 1,3(\mathrm{mod}4)$ существует r-регулярный гандикап граф порядка n для всех допустимых значений r, $3\leq r\leq n-5$.

Теорема 8 [18, 19]. Для $n\equiv 0(\mathrm{mod}8)$, $n\geq 8$ и нечетного r существует r-регулярный гандикап граф порядка n тогда и только тогда, когда $3\leq r\leq n-5$.

Теорема 9 [16]. Пусть G — r-регулярный гандикап граф порядка n, где $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$. Тогда $r\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ и $r\leq n-7$.

Теорема 10 [16]. Для $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ существует r-регулярный гандикап граф порядка n тогда и только тогда, когда $3\leq r\leq n-7$ и $r\equiv 3(\mathrm{mod}4)$, кроме $r=3$ и $n\leq 26$, и возможно, когда $r=n-7$ и $n\in\{14, 18, 22, 26, 34, 38\}$.

Теорема 11 [19]**.** Для $n \equiv 4(\mathrm{mod}8)$, $n \geq 12$ и нечетного r существует r-регулярный гандикап граф порядка n, удовлетворяющий условию $7 \leq r \leq n-5$.

Теорема 12 [19]**.** Существует r-регулярный гандикап граф четного порядка n для всех $n \geq 28$ и $3 \leq r \leq n-11$, за исключением случаев, когда оба $n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ и $r \equiv 1(\mathrm{mod}4)$.

Далее представлены результаты для частных случаев r-регулярных гандикап графов.

Теорема 13 [17]**.** Пусть $n \equiv 9(\mathrm{mod}18)$. Тогда существует 4-регулярный гандикап граф порядка n.

Лемма 4 [19]**.** Пусть G — 3-регулярный гандикап граф порядка n. Тогда существует 3-регулярный гандикап граф порядка $n+8$.

Лемма 5 [19]**.** Пусть G — 5-регулярный гандикап граф порядка n. Тогда существует 5-регулярный гандикап граф порядка $n+12$.

Теорема 14 [16]**.** Для $n \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ существует $(n-7)$-регулярный гандикап граф порядка n каждый раз, когда $n \geq 16$.

Теорема 15 [16]**.** Для $n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ существует $(n-7)$-регулярный гандикап граф порядка n, когда $n=30$ или $n \geq 42$.

Пусть HIT(n, r, d) — r-регулярный d-гандикап граф порядка n имеет d-гандикап разметку f^*, тогда вес каждой его вершины i равен $w(i) = d f^*(i) + l = di + l$, где $i = 1, 2, ..., n$, $l = \mathrm{const}$.

Д. Фрончек изучал HIT(n, r, 2) при $n \equiv 0(\mathrm{mod}16)$ и $n \equiv 8(\mathrm{mod}16)$, а также получил необходимые условия их существования.

Теорема 16 [18]**.** Если существует r-регулярный 2-гандикап граф HIT(n, r, 2) четного порядка n, тогда $4 \leq r \leq n-6$.

Теорема 17 [18]**.** Существует r-регулярный 2-гандикап граф HIT($16m$, r, 2) порядка $16m$ для каждого натурального m и каждого четного r, удовлетворяющего условию $4m+2 \leq r \leq 12m-2$.

Более сильный результат получен в следующей теореме.

Теорема 18 [18]**.** Существует r-регуляр-ный 2-гандикап граф HIT(n,r,2) порядка $n \equiv 0(\mathrm{mod}16)$, когда $4 \leq r \leq n-6$.

Условия существования HIT(n, 6, 2) и r-регулярного 2-гандикап графа порядка n с $n \equiv 8(\mathrm{mod}16)$ отображены в теоремах 19, 20.

Теорема 19 [18]**.** Существует 6-регулярный 2-гандикап граф HIT($8c$, 6, 2) порядка $8c$ для нечетного c, $c \geq 5$.

Теорема 20 [18]**.** Существует r-регулярный 2-гандикап граф порядка n для каждого натурального $n \equiv 8(\mathrm{mod}16)$, $n \geq 56$ и каждого четного r, удовлетворяющего условию $6 \leq r \leq n-50$.

Доказательство теорем 16—20 Д. Фрончек осуществил построением соответствующих r-регулярных 2-гандикап графов с использованием множества магических прямоугольников определенных размеров.

Б. Фрейберг в [21] обобщил описанные результаты на d-гандикап графы. Кроме того, он нашел условия существования HIT(n, r, d) для разных параметров n, r и d.

Теорема 21 [21]**.** Если HIT(n, r, d) существует, тогда:

1) $w(i) = di + (r-d)(n+1)/2$, для всех $i = 1, 2, ...$ $..., n$;

2) если n — четное, тогда $r \equiv d(\mathrm{mod}2)$;

3) если n — нечетное, тогда $r \equiv 0(\mathrm{mod}2)$;

4) $n \geq \left\lceil 2\left(d+1+\sqrt{d(d+1)}\right)\right\rceil$.

Теорема 22 [21]**.** Пусть d — четное число, $d \geq 2$ и G — произвольный d-регулярный дистанционный магический граф порядка $v \geq d+2$. Пусть $n = vt$ для любого четного натурального $t \geq d+2$. Если $d \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ или $t \equiv 0(\mathrm{mod}4)$, тогда существует HIT($n$, $2d$, d).

Теорема 23 [21]**.** Пусть d, t, v — четные натуральные числа, $d \geq 2$, $v \geq d+2$ и $n = vt$. Если $d \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ или $v \equiv t \equiv 0(\mathrm{mod}4)$, тогда существует HIT($n$, r, d) для всех таких четных r, что $2d \leq r \leq n-2d-2$.

Теорема 24 [21]**.** Для каждого нечетного d и для каждого такого четного r, $2d+1 \leq r \leq n-2d-3$ существует HIT(n, r, d) при условии:

$n \equiv 0(\mathrm{mod}4d+4)$, $n \geq (d+1)(d+3)$ и $d \equiv 1(\mathrm{mod}4)$

или

$n \equiv 0(\mathrm{mod}4d+4)$, $n \geq (d+1)(d+5)$ и $d \equiv 3(\mathrm{mod}4)$,

или

$n \equiv 2d+2(\mathrm{mod}4d+4)$, $n \geq (d+1)(d+3)$
и $d \equiv 3(\mathrm{mod}4)$.

После теорем 23, 24 осталось небольшое число неизвестных допустимых значений r, для которых существует HIT(n, r, d). В связи с этим Б. Фрейберг сформулировал следующие открытые проблемы.

Проблема 1 [21]**.** Для всех $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 16)$, $n \geq 32$ построить HIT(n, r, 3) для $r \in \{5, n-7\}$.

Проблема 2 [21]**.** Для всех $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 16)$, $n \geq 48$ построить HIT(n, r, 4) для $r \in \{6, n-8\}$.

Проблема 3 [21]**.** Для данного $d \geq 1$ найти все такие значения n, для которых HIT(n, r, d) существует для некоторых r.

Проблема 3 частично решена для $d=1$ и тех случаев d, о которых речь идет в теоремах 22—24.

О методах построения графа турнира

Как отмечалось, задача составления расписания неполного турнира для n команд, играющих с r другими командами, эквивалентна задаче построения r-регулярного графа порядка n, допускающего определенный тип разметки. Такой граф назовем *графом турнира*. Далее речь пойдет о методах его построения. Начнем изложение материала с планирования полного кругового турнира с четным числом команд. Это будет полезно для понимания алгоритма действий в других рассмотренных авторами случаях.

Разложением графа G на графы изоморфные H является разбиение множества ребер G на подмножества, каждое из которых порождает подграф — компоненту разложения, изоморфный H, и каждое ребро G принадлежит только одной компоненте разложения. Разложение графа G называют *циклическим*, если все его компоненты получаются из одной базовой (или нескольких базовых) действием на нее циклической подстановки вершин G.

Фактором графа называют его остовный подграф, не являющийся вполне связным [22]. Если все компоненты разложения G — факторы, то такое разложение называют факторизацией. Регулярный остовный подграф степени n графа G — его n-фактор. 1-*Факторизация* графа G представляет собой множество Φ 1-факторов G , и каждое ребро графа G принадлежит одному и только одному фактору из Φ. О графе G говорят, что он 1-*факторизуем*. Полный граф K_{2n} 1-факторизуем [22] и 1-факторизация K_{2n} содержит $(2n-1)(2n-3)$ разных 1-факторов.

Если предположить, что в полном круговом турнире участвует четное число команд, например, $2n$, где n — натуральное число, то такой турнир задается полным графом K_{2n}, а одному раунду соответствует 1-фактор в K_{2n}. Таким образом, для составления расписания требуется построить 1-факторизацию K_{2n}.

К наиболее распространенным методам построения разложений графов относится *циклический метод*. Действие этого метода продемонстрируем на примере построения 1-факторизации графа K_{2n} [23]. Пусть вершинам K_{2n} соответствуют числа 1, 2, 3, ..., $2n$. Сгруппируем ребра в множество F_i по следующему правилу:

$$F_i : (i, 2n), (i+j, i-j)$$

для $j=1, 2, 3, ..., n-1$, где $i = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Тогда F_1 состоит из ребер $(1, 2n)$, $(1+j, 1-j)$; F_2 — из ребер $(2, 2n)$, $(2+j, 2-j)$ и так далее, где $j = 1, 2, 3, ..., n-1$. Все целые числа в записи ребер, за исключением $2n$, приведены по модулю $2n-1$ для размещения в диапазоне 1, 2, 3, ..., $2n-1$.

Множество ребер F_i является 1-фактором, так как $i+j$ пробегает вершины $i+1$, $i+2$, ..., $i+n-1$, а $i-j$ пробегает вершины $i+n$, $i+n+1$, $i+n+2, ..., i-1$. 1-Фактор F_i изображен на рис. 1.

Следовательно, совокупность F_i для $i = 1, 2, ...$ $..., 2n-1$ представляет собой 1-факторизацию графа K_{2n}. Указанная 1-факторизация — математическая модель расписания полного кругового турнира $2n$ команд.

Разобьем все методы построения графов неполных турниров на три группы. В ранних работах Д. Фрончека, П. Коварж, Т. Коваржовой [13, 14] методы планирования справедливых FIT(n, r) и эквивалентных EIT(n, r) неполных турниров базировались на построении дополнений графов K_a, K_b, входящих в декартовое произведение или композицию, и свойствах магических прямоугольников размера $a \times b$, в том числе массивов Коцига. Их включим в первую группу. Поскольку спектр допустимых значений параметров n и r, найденных методами первой группы, ограниченный, то для построения d-гандикап графов при $d=1$ предложены конструктивные методы [19], которые в этой классификации составят вторую группу, а также подход с «*bubble*» графом [15, 19, 20], его отнесем к третьей группе. Каждая группа методов связана с определением некоторого фактора или факторизации (разложения) графа, участвующего в построении графа турнира.

Методы первой группы имеют общую идею изложения и содержат незначительные модификации, связанные с типом турнира. Для их понимания достаточно остановиться на конкретном случае неполного турнира. Напомним понятия массива Коцига и смещенного массива Коцига.

Под массивом Коцига $KA(a,\ b)=(e_{ij})$ понимают матрицу размера $a\times b$, в которой каждая строка содержит каждое из чисел $1, 2, ..., b$, один раз и сумма элементов в каждом столбце равна одной и той же постоянной $c=a(b+1)/2$. Элементы f_{ij} смещенного массива Коцига $LKA(a, b; l)$ различны, образуют множество из ab различных последовательных целых чисел, с наименьшим элементом $l+1$ и $f_{ij}=e_{ij}+l+(i-1)$. Суммы элементов в столбце $LKA(a,\ b;\ l)$ равны числу $c=a(ab+2l+1)/2$ [14].

Рассмотрим $\mathrm{EIT}(n,\ r)$, удовлетворяющий условию теоремы 3. Пусть $r=2^sq$, где q — нечетное число, $q>1$, $s\geq 1$ и $n=tq$ для некоторого нечетного t, $t\geq 2^s+1$. В построение графа турнира задействуем доказательство теоремы 3 [14]. Выделим три этапа и опишем детально каждый из них.

Этап 1. Воспользуемся тем фактом, что для нечетного t полный граф K_t имеет разложение на гамильтоновы циклы. Таким образом, существует 2^s-регулярный фактор F графа K_t. Зададим F.

Этап 2. Строим граф $G=F[\overline{K}_q]$, называемый композицией графов F и $\overline{K}_q$. Граф $G=F[\overline{K}_q]$ является (2^sq)-регулярным и состоит из q изоморфных копий фактора F. Смежность вершин

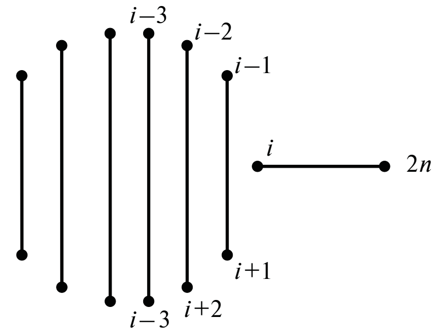

Рис. 1. 1-Фактор F_i графа K_{2n}

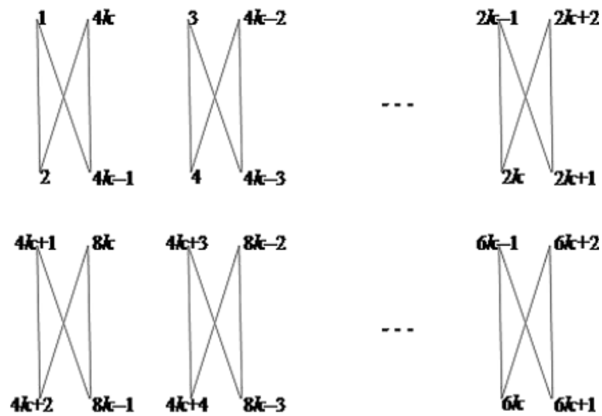

Рис. 2. Граф $F_2\cup F_3$

разных копий определяется правилами построения композиции. Обозначим через $\{x_{1j},\ x_{1j},\ ...\ ...,x_{tj}\}$ — множество вершин j-й копии F.

Этап 3. Строим смещенный массив Коцига $LKA(q,\ t;\ 0)=(f_{ij})$. Разметку f графа G задаем следующим образом: $f(x_{ij})=f_{ij}$, где $i=1,\ 2,\ ,...,t$, $j=1,\ 2,\ ,\ ...,\ q$. Поскольку каждая вершина x_{ij} является смежной с 2^s вершинами одной копии, то ее вес определяется по формуле $w(x_{ij})=$ $=2^{s-1}q(qt+1)$, где $c=q(qt+1)/2$ — сумма элементов столбца $LKA(q,\ t;\ 0)$.

Таким образом, f — дистанционная магическая разметка G. Следовательно, граф G реализует $\mathrm{EIT}(n,\ r)$.

Конструктивные методы второй группы с элементами индукции детально освещены в [19]. Они — частные, также как и подход с «*bubble*» графом, так как применяются для построения определенных типов гандикап графов.

Пусть $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 8)$, $r \equiv 1,3 (\mathrm{mod} 4)$ и $3 \le r \le n-5$. Опишем построение r-регулярного гандикап графа G порядка n, опираясь на результаты работ [15, 20], в которых искомый граф получен введением некоторой «*bubble*» структуры. В данной статье мы отказались от этой громоздкой конструкции и предлагаем новый подход.

Под расстоянием между двумя вершинами i и j размеченного графа порядка n будем понимать число $\rho(i, j) = \min(|i-j|, n-|i-j|)$. Так как r — нечетное число, не меньшее трех, то в качестве искомого графа G — рассмотрим такой r-регулярный граф, у которого $r = 2s+3$ и его $(2s+3)$-факторизация состоит из одного 1-фактора F_1 с ребрами, окрашенными в красный цвет, двух 1-факторов F_2, F_3 — с синими ребрами и $2s$ 1-факторов F_4, F_5, ..., F_{2s+3} с черными ребрами. Процесс построения реализуем в три шага.

Ш а г 1. Строим F_1: $(1, 4k+1)$, $(2, 4k+2)$, $(3, 4k+3)$, ..., $(4k, 8k)$, где $\rho_1(i, j) = 4k$ для каждого ребра (i, j) графа F_1. Обозначим $w_r(i)$ — вес вершины в факторе F_1. Таким образом, $w_r(i) = 4k+i$ для $i \in \{1, 2, ..., 4k\}$ и $w_r(i) = -4k+i$ для $i \in \{4k+1, 4k+2, ..., 8k\}$.

Ш а г 2. Строим 1-факторы:

F_2: $(1, 2), (3, 4), ..., (2k-1, 2k), (2k+1, 2k+2), ...$ $..., (8k-3, 8k-2), (8k-1, 8k)$, где $\rho_2(i, j) = 1$ для каждого ребра (i, j) графа F_2;

F_3: $(1, 4k-1), (2, 4k), ..., (2k-1, 2k+1), (2k, 2k+$ $+2), ..., (4k+1, 8k-1), (4k+2, 8k), ..., (6k-1, 6k+1)$, $(6k, 6k+2)$, где $p_3(i, j) \in \{2, 6, ..., 4k-6, 4k-2\}$ для ребер (i, j) графа F_3.

Найдем дизъюнктивное объединение факторов F_2 и F_3. Граф $F_2 \cup F_3$ состоит из $4k$ компонент H_i, где $i = 1, 2, ..., 4k$, каждая из которых изоморфна полному двудольному графу $K_{2,2}$ (рис. 2).

Ш а г 3. Необходимо увеличить степень r графа, полученного после 2-го шага, с учетом условий: $r \le n-5$ и $r \equiv 1,3 (\mathrm{mod} 4)$. Строим факторы F_4, F_5, ..., F_{2s+3} с черными ребрами так, чтобы граф $\bigcup_{i=4}^{2s+3} F_i$ был дистанционным магическим. Тогда искомый граф $G = \bigcup_{i=1}^{2s+3} F_i$ будет гандикап графом степени большей, чем три.

Разобьем множество вершин G на пары $[1, 8k]$, $[2, 8k-1]$, ..., $[4k, 4k+1]$ при этом сумма меток вершин каждой пары равна $8k+1$. Данные пары вершин не должны быть смежными в G и вершины каждой пары — концы двух смежных ребер, которые войдут в разные 1-факторы. Увеличим степень каждой вершины графа $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ на два, добавлением ребер. Для этого зададим два 1-фактора F_4 и F_5 с черными ребрами, используя указанное выше разбиение вершин. Чтобы избежать повторений красных и синих ребер, в F_4 включим ребра, соединяющие вершины, расположенные на расстоянии два. Тогда F_4 имеет вид: $(1, 3)$, $(2, 4)$, ..., $(8k-3, 8k-1)$, $(8k-2, 8k)$. Фактор F_5 строим так, чтобы сохранить вес $8k+1$ для вершин графа $F_4 \cup F_5$. Зададим F_5 следующим образом: $(1, 8k-2)$, $(3, 8k)$, $(2, 8k-3)$, $(4, 8k-1)$,... $(4k-2, 4k+1)$, $(4k, 4k+3)$, где $\rho_5(i, j) \in \{3, 5, ..., 8k-5, 8k-3\}$ для ребер (i, j) графа F_5.

Следовательно, граф $\bigcup_{i=1}^{5} F_i$ является 5-регулярным гандикап графом. Веса его вершин определяются по формуле $w(i) = 16k+2+i$ для $i \in \{1, 2, ..., 8k\}$.

Повторяя действия, описанные в 3-м шаге, продолжаем увеличивать степень r графа $\bigcup_{i=1}^{5} F_i$ пока не получим гандикап граф $G = \bigcup_{i=1}^{2s+3} F_i$ с $r \le$ $\le n-5$ и $r \equiv 1,3 (\mathrm{mod} 4)$.

Заключение

В процессе анализа теоретических достижений исследуемого направления выполнена систематизация существующих результатов. Все методы построения графов неполных турниров разбиты на три группы. Предложены новые подходы для их реализации. Это дает возможность расширить круг задач с использованием математических моделей на основе размеченных графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sugeng K.A., Froncek D., Miller M., Ryan J., Walker J.* On distance magic labeling of graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 2009. Vol. 71. P. 39—48.
2. *Vilfred V.* Sigma labelled graphs and circulant graphs. Ph.D. Thesis, University of Kerala, India, March 1994.
3. *Miller M., Rodger C., Simanjuntak R.* Distance magic labelings of graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 28. P. 305—315.
4. *Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N.* Distance magic graphs — a survey. Journal of the Indonesian Mathematical Society. Special Edition. 2011. P. 11—26.
5. *Gallian J. A.* A dynamic survey of graph labeling. The Electronic Journal of Combinatorics. 2017. DS6: Dec 22. 432 p.
6. *Arumugam S., Kamatchi N.* On (a; d)-distance antimagic graphs. Australasian journal of combinatorics. 2012. Vol. 54. P. 279—287.
7. *Froncek D.* Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2013. Vol. 10, N2. P. 119—127.
8. *Kamatchi N., Ramalakshmi A., Nilavarasi S, Arumugam S.* A note on distance magic and distance antimagic graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2015. Vol. 48. P. 183—187.
9. *Nalliah M.* Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. thesis. M. Nalliah. The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014. 21 p.
10. *Семенюта М.Ф.* Про дистанційну антимагічну розмітку графів. Збірник наукових праць НАУ інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова «Теорія оптимальних рішень». 2016. С. 26—32.
11. *Семенюта М.Ф.* (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка окремих типів графів. Міжнародний науково-теоретичний журнал інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАУ України «Кібернетика і системний аналіз». 2016. Т. 52, №6.С. 135—142.
12. *Семенюта М.Ф.* Про (a, d)-дистанційну антимагічну та 1-вершинну бімагічну вершинну розмітки певних типів графів. Міжнародний науково-теоретичний журнал інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАУ України «Кібернетика і системний аналіз». 2018. Т. 54, №2.С. 134—141.
13. *Froncek D., Kovar P., Kovarova T.* Fair incomplete tournaments. Bull. Inst. Combin. Appl. 2006. Vol. 48. P. 31—33.
14. *Froncek D.* Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games. Congr. Numer. 2007. Vol. 187. P. 83—89.
15. *Shepanik A.* Graph labelings and tournament scheduling. MS Thesis. University of Minnesota Duluth. 2015. 55 p.
16. *Froncek D., Shepanik A.* Regular handicap tournaments of high degree. Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications. 2016. Vol. 3, N3. P. 159—164.
17. *Kovar P., Kravcenko M., Krbecek M., Silber A.* Handicap labelings of 4-regular graphs. Discrete mathematics. 2017. Vol. 15, N2. P. 331—335.
18. *Froncek D.* A note on incomplete regular tournaments with handicap two of order $n\equiv 0(\mathrm{mod} 8)$. Opuscula Math. 2017. Vol. 37, N4. P. 57—556.
19. *Froncek D., Kovar P., Kovarova T., Krajc B., Kravcenko M., Shepanik A., Silber A.* On regular handicap graphs of oven order. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2017. Vol. 60. P. 69—76.
20. *Froncek D., Shepanik A.* Regular handicap graph of order $n\equiv 0(\mathrm{mod} 8)$. Electronic Journal of Graph Theory and Applications. 2018. Vol. 6, N2. P. 208—218.
21. *Freyberg B.* Distance magic type and distance anti-magic-type labelings of Graphs. Ph.D.Thesis. Michigan Technological University, Michigan, USA. 2017. 150 p.
22. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
23. *Семенюта М. Ф.* Дослідження розкладів та нумерацій графів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.: 01.01.08. К., 2008. 190 с.

Поступила 21.11.2018

REFERENCE

1. *Sugeng K.A., Froncek D., Miller M., Ryan J., Walker J.* On distance magic labeling of graphs, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 2009. Vol. 71. P. 39—48.
2. *Vilfred V.* Sigma labelled graphs and circulant graphs. Ph.D. Thesis, University of Kerala, India, March 1994.
3. *Miller M., Rodger C., Simanjuntak R.* Distance magic labelings of graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 28. P. 305—315.
4. *Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N.* Distance magic graphs — a survey. Journal of the Indonesian Mathematical Society. Special Edition. 2011. P. 11—26.
5. *Gallian J. A.* A dynamic survey of graph labeling. The Electronic Journal of Combinatorics. 2017. DS6: Dec 22. 432 p.
6. *Arumugam S., Kamatchi N.* On (a; d)-distance antimagic graphs Australasian journal of combinatorics. 2012. Vol. 7. *Froncek D.* Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2013. Vol. 10, N2. P. 119—127.
8. *Kamatchi N., Ramalakshmi A., Nilavarasi S, Arumugam S.* A note on distance magic and distance antimagic graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2015. Vol. 48. P. 183—187.
9. *Nalliah M.* Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. thesis. The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014, 21 p.
10. *Semeniuta M.* On distance antimagic labeling of graphs. Collection of Scientific Works of V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine «The Theory of Optimal Solutions». 2016. P. 26—32. (in Ukrainian).
11. *Semeniuta M.* (a, d)-distance antimagic labeling of certain types of graphs. International theoretical science journal of V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine «Cybernetics and Systems Analysis». 2016. Vol. 52, №6. P. 135—142. (in Ukrainian).
12. *Semeniuta M.* On (a, d)-distance antimagic and 1-vertex bimagic vertex labeling of certain types of graphs. International theoretical science journal of V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine «Cybernetics and Systems Analysis». 2018. Vol. 54, №2. P. 134—141. (in Ukrainian).
13. *Froncek D., Kovar P., Kovarova T.* Fair incomplete tournaments. Bull. Inst. Combin. Appl. 2006. Vol. 48. P. 31—33.
14. *Froncek D.* Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games. Congr. Numer. 2007. Vol. 187. P. 83—89.
15. *Shepanik A.* Graph labelings and tournament scheduling. MS Thesis. University of Minnesota Duluth. 2015. 55 p.
16. *Froncek D., Shepanik A.* Regular handicap tournaments of high degree. Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications. 2016. Vol. 3, N3. P. 159—164.
17. *Kovar P., Kravcenko M., Krbecek M., Silber A.* Handicap labelings of 4-regular graphs. Discrete mathematics. 2017. Vol. 15, N2. P. 331—335.
18. *Froncek D.* A note on incomplete regular tournaments with handicap two of order n≡0(mod8). Opuscula Math. 2017. Vol. 37, N4. P. 57—556.
19. *Froncek D., Kovar P., Kovarova T., Krajc B., Kravcenko M., Shepanik A., Silber A.* On regular handicap graphs of oven order. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2017. Vol. 60. P. 69—76.
20. *Froncek D., Shepanik A.* Regular handicap graph of order n≡0(mod8). Electronic Journal of Graph Theory and Applications. 2018. Vol. 6, N2. P. 208—218.
21. *Freyberg B.* Distance magic type and distance anti-magic-type labelings of Graphs. Ph.D.Thesis. Michigan Technological University, Michigan, USA. 2017. 150 p.
22. *Harari F.* Graph Theory. M.: Peace, 1973. — 300 p. (in Russian).
23. *Semeniuta M.* Investigation of timetables and numbering graphs: candidate thesis of physical and mathematical sciences: 01.01.08. K., 2008. 190 p. (in Ukrainian).

Received 21.11.2018

М.Ф. Семенюта, канд. фіз.-мат. наук, професор кафедри фізико-математичних дисциплін,
Льотна академія Національного авіаційного університету, м. Кропивницький
marina_semenyuta@ukr.net

З.А. Шерман, канд. фіз.-мат. наук, викладач кафедри
медичної фізики та інформаційних технологій №2,
Донецький національний медичний університет,
sherman.zoya@gmail.com

О.М. Дмітрієв, завідувач кафедри льотної експлуатації, аеродинаміки та динаміки польоту,
Льотна академія Національного авіаційного університету, м. Кропивницький
Dmitronik70@i.ua

НЕПОВНІ ТУРНІРИ І МАГІЧНІ ТИПИ РОЗМІТОК

Вступ. В спортивному світі існють різні види турнірів, планування яких базується на побудові графових моделей. Кожен вид турніру має свої характеристики. В даній статті розглянуто справедливі, еквівалентні їм та врівноважені неповні турніри. Створення турнірної сітки для n команд, що грають з r опонентами для таких турнірів, рівно розв'язанню задачі побудови відповідної дистанційної магічної або антимагічної розмітки r-регулярного графа порядку n.

Мета — систематизувати основні теоретичні відомості, що стосуються даної тематики, виділити відриті проблеми, класифікувати методи побудови графів турнірів та уніфікувати алгоритми їх опису відповідно до класифікації.

Методи. Запропоновано нові алгоритми побудови графів неповних турнірів. Це дає можливість розширити коло задач з використанням математичних моделей на основі розмічених графів.

Результат. Всі методи побудови графів турнірів розбиті на три групи. До методів першої групи віднесені ті, які базуються на властивостях магічних прямокутників, в тому числі масивів Коціга. Методи другої і третьої груп є конструктивними і містять елементи індукції. Кожна група методів пов'язана з визначенням певного фактора або факторизації графа, який бере участь в побудові графа турніру.

Висновок. У процесі аналізу теоретичних досягнень досліджуваного напрямку виконана систематизація отриманих результатів. Запропоновано нові підходи для їх реалізації, що дає можливість розширити коло завдань з використанням математичних моделей на основі розмічених графів.

Ключові слова: справедливий неповний турнір, еквівалентний неповний турнір, гандикап турнір, дистанційна магічна розмітка, дистанційна d-антимагічна розмітка, врівноважена дистанційна d-антимагічна розмітка.

Marina Semeniuta, PhD in Phys.-Math. Sciences, associate professor,
Department of Physics and Mathematics Sciences of the Flight Academy
of the National Aviation University,
st. Dobrovolsky, 1, Kropivnitsky, 25005, Ukraine,
marina_semenyuta@ukr.net

Zoya Sherman, PhD in Phys.-Math. Sciences, senior lecturer,
Department of Medical physics and information technology №2
of Donetsk National Medical University,
st. Pryvokzalnaya, 27, Liman, 84404, Donetsk region, Ukraine,
sherman.zoya@gmail.com

Oleh Dmitriiev, PhD, head of the department of flight operations, aerodynamics and flight dynamics
of the Flight Academy of the National Aviation University,
st. Dobrovolsky, 1, Kropivnitsky, 25005, Ukraine,
Dmitronik70@i.ua

INCOMPLETE TOURNAMENTS AND MAGIC TYPES OF LABELING

Introduction. There is a variety of types of sports tournaments whose planning is based on the construction of graph models. Each type of tournament has its own characteristics. In this paper, fair, equitable and balanced partial competitions are considered. Creating a tournament grid for n teams playing with r opponents for such tournaments is equivalent to solving the problem of constructing an appropriate distant magic or antimagic labeling of the r-regular graph of order n.

Purpose. The purpose of the article is to systematize the main theoretical information related to this topic, to highlight the problems that have not been solved, to classify the methods of constructing graphs of tournaments and to unify the algorithms for their description in accordance with this classification.

Methods. New algorithms for constructing incomplete tournaments graphs are offered. This makes it possible to extend the range of tasks using mathematical models based on labeled graphs.

Results. All methods of constructing graphs of tournaments are divided into three groups. The methods of the first group included those based on the properties of magic rectangles, including Kotsih arrays. Methods of the second and third groups are constructive and contain elements of induction. Each group is related to the definition of a particular factor or factorization of the graph, which is involved in building a graph of the tournament.

Conclusion. In the process of analyzing the theoretical advances of the studied problem the systematization of the existing results has been made. All methods for constructing incomplete tournament graphs are divided into three groups. New approaches for their realization are offered. This makes it possible to extend the range of tasks using mathematical models based on labeled graphs.

Keywords: fair incomplete tournament, equalized incomplete tournament, handicap tournament, distance magic labeling, d-antimagic distance labeling, d-handicap distance antimagic labeling.