УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ, И.М. ПОЛЯКОВ

КРИТЕРИЙ РЕБРА ОБЩЕГО МНОГОГРАННИКА РАЗМЕЩЕНИЙ

Аннотация. Исследуются свойства общего многогранника размещений для задач оптимизации на размещениях: рассмотрено описание ребра общего многогранника размещений системой уравнений и неравенств, являющихся подсистемой системы, которая описывает этот многогранник. Получен критерий ребра общего многогранника размещений, описаны его вершины.

Ключевые слова: общий многогранник размещений, критерий ребра, задачи оптимизации на размещениях.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимизации на размещениях представляют собой актуальный класс (см., в частности, [1–6]). Исследование и решение таких задач предполагает изучение свойств как целевых функций, так и их допустимых множеств, в том числе общего многогранника размещений. Результаты таких исследований изложены во многих публикациях, из которых следует отметить [2–21]. Комбинаторные многогранники — выпуклые оболочки евклидовых комбинаторных множеств — изучались в ряде работ, например [2, 3, 6–8, 14, 22–33]. Основное внимание при этом уделяется перестановочному многограннику [2, 7, 22–24, 26, 29–33]. Общий многогранник размещений — выпуклая оболочка множества упорядоченных выборок из заданного мультимножества — исследовался, в частности, в работах [2, 3, 6–8, 14, 25, 27, 28]. Отметим, что эти исследования еще не исчерпали себя. В настоящей статье рассмотрена граневая структура общего многогранника размещений (ОМР). Терминология, используемая далее, соответствует принятой в [2].

О РЕБРАХ МНОГОГРАННИКА РАЗМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим многогранник $\Pi_{\eta n}^k(G)$ k-размещений, где $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ — основа мультимножества, $[G]=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ — первичная спецификация. Пусть $g_1 \le \ldots \le g_\eta$, $e_1 \le \ldots \le e_n$, а $\Pi_{\eta n}^k(G)$ задается [2] системой линейных ограничений

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall \omega \subset J_k=\{1, 2, \ldots, k\},\ |\omega| \le k. \tag{1}$$

Вершина $x=(x_1, \ldots, x_k)$ многогранника $\Pi_{\eta n}^k(G)$ является перестановкой элементов любого мультимножества вида $\{g_1, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, \ldots, g_{\eta-1}, g_\eta\}$, $r+s=k$ $\forall s, r \in J_k^0=\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ (это первый критерий вершины из [2, теорема 2.33, с. 53]).

Вершина x является соседней с вершиной y для $\operatorname{vert} \Pi_{\eta n}^k(G)$, если выполняется [2] одно и только одно из условий:

1) проведена перестановка координат g_i, g_{i+1} $(g_i \ne g_{i+1})$;

2) проведена замена g_s на $g_{\eta-r}$, $g_s \ne g_{\eta-r}$ (или $g_{\eta-r+1}$ на g_{s+1}, $g_{\eta-r+1} \ne g_{s+1}$).

Известен второй критерий вершины [6, теорема 3.1, с. 3–6]: вершина A вида $x_1 = g_1$, …, $x_s = g_s$, $x_{s+1} = g_{\eta-r+1}$, …, $x_{k-1} = g_{\eta-1}$; $x_k = g_\eta$ задается совместно с (1) системой

$$\begin{cases} x_1 = g_1;\ x_1 + x_2 = g_1 + g_2;\ \ldots;\ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s; \\ x_k = g_\eta;\ x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1};\ \ldots;\ x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения с первого по s-е назовем левопорожденной частью системы (2), а остальные уравнения — правопорожденной частью этой системы, что обусловлено их связью с левой и правой частями системы (1). Очевидно, не нарушая общности, достаточно рассматривать систему для вершины, номера координат которой задаются тождественной подстановкой $\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ 12\ldots k \end{pmatrix}$. Для подстановки $\begin{pmatrix} 12\ldots k \\ i_1\ i_2\ \ldots\ i_k \end{pmatrix}$ имеем

$$\begin{cases} x_{i_1} = g_1;\ x_{i_1} + x_{i_2} = g_1 + g_2;\ \ldots;\ x_{i_1} + \ldots + x_{i_s} = g_1 + \ldots + g_s; \\ x_{i_k} = g_\eta;\ x_{i_k} + x_{i_{k-1}} = g_\eta + g_{\eta-1};\ \ldots;\ x_{i_k} + \ldots + x_{i_{s+1}} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}. \end{cases} \quad (3)$$

Как и в (2), первые s уравнений (3) — левопорожденная часть системы, остальные уравнения — правопорожденная часть системы. Ребро многогранника — это отрезок, соединяющий две смежные (соседние) вершины.

Рассмотрим вершины, соседние с вершиной A, задаваемой вместе с (1) системой (2). Используем критерий смежности вершин ОМР [2], т.е. имеем два случая:

1) перестановка координат (с возможными подслучаями);

2) замена координат.

Случай 1. Для получения соседней вершины переставляем координаты g_i и g_{i+1} $(g_i \neq g_{i+1})$.

1. При $i, i+1 \in J_s$ получаем вершину B. Тогда имеем

$$\begin{cases} x_1 = g_1;\ x_1 + \ldots + x_{i-1} = g_1 + \ldots + g_{i-1};\ x_1 + \ldots + x_i = g_1 + \ldots + g_{i-1} + g_{i+1}; \\ x_1 + \ldots + x_i + x_{i+1} = g_1 + \ldots + g_{i-1} + g_{i+1} + g_i;\ \ldots;\ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s; \\ x_k = g_\eta;\ x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1};\ \ldots;\ x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}. \end{cases} \quad (4)$$

Часть системы, содержащая уравнения с x_k, для этой вершины B (правопорожденная часть) повторяет часть системы (2) с уравнениями, содержащими x_k. Более того, все уравнения (2) и (4), не содержащие x_k, кроме i-го, также совпадают. Общим уравнениям удовлетворяют соседние вершины A и B, т. е. ребро AB задается совместно с (1) системой, в которой $i \in J_{s-1}$:

$$x_1 = g_1;\ \ldots;\ x_1 + \ldots + x_{i-1} = g_1 + \ldots + g_{i-1};\ x_1 + \ldots + x_i + x_{i+1} = g_1 + \ldots$$

$$\ldots + g_i + g_{i+1};\ \ldots;\ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s;\ x_k = g_\eta;\ x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1};\ \ldots;$$

$$x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}.$$

2. Для получения соседней вершины переставляем координаты g_j и g_{j+1}, где $j, j+1 \in J_\eta^{\eta-r+1} = \{\eta - r + 1,\ \eta - r + 2,\ \ldots,\ \eta - 1,\ \eta\}$; получаем вершину C. Тогда уравнения, содержащие x_1 в системе (2) (левопорожденная часть), повторяются в системе для вершины C:

$$x_1 = g_1;\ \ldots;\ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s;\ x_k = g_\eta;\ x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1};\ \ldots;$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1};$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j-1};$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j-1} + g_{\eta-j};$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} + x_{k-j-2} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j-2}; \ \ldots;$$

$$x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1}.$$

Все уравнения последней системы и системы (2), кроме уравнения, содержащего одновременно только все переменные x_k, x_{k-1}, …, x_{k-j+1}, совпадают и им удовлетворяют точки A и C. Иными словами, ребро AC задается совместно с (1) следующей системой, где $j \in J_{r-1}^0 = \{0, 1, 2, \ldots, r-2, r-1\}$ (отметим, что $r + s = k$):

$$x_1 = g_1; \ \ldots; \ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s; \ x_k = g_\eta; \ x_k + x_{k-1} = g_\eta + g_{\eta-1}; \ \ldots;$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-j+1};$$

$$x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-j+1} + x_{k-j} + x_{k-j-1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-j+1} + g_{\eta-j} + g_{\eta-j-1}; \ \ldots;$$

$$x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + g_{\eta-1} + \ldots + g_{\eta-r+1},$$

т.е. из системы (2) ребра AB, AC получаем исключением любого уравнения, кроме s-го или последнего.

Случай 2. Для получения соседней вершины может быть выполнена замена координат.

1. Образование соседней вершины D из (2) выполняется заменой g_s на $g_{\eta-r}$ $(g_s \neq g_{\eta-r})$. Для D получаем

$$\begin{cases} x_1 = g_1; \ \ldots; \ x_1 + \ldots + x_{s-1} = g_1 + \ldots + g_{s-1}; \ x_k = g_\eta; \ \ldots; \\ x_k + \ldots + x_{s+1} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+1}; \ x_k + \ldots + x_{s+1} + x_s = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+1} + g_{\eta-r}. \end{cases} \tag{5}$$

Из (2) в систему (5) входят все уравнения, кроме s-го. Система для ребра AD является общей частью (1), (2) и (5), т. е. из (2) берем все уравнения, кроме s-го.

2. Образование соседней к A вершины E из (5) проводим заменой координаты $g_{\eta-r+1}$ на g_{s+1} $(g_{\eta-r+1} \neq g_{s+1})$. Для E получаем

$$\begin{cases} x_1 = g_1; \ \ldots; \ x_1 + \ldots + x_s = g_1 + \ldots + g_s; \ x_1 + \ldots + x_{s+1} = g_1 + \ldots + g_s + g_{s+1}; \\ x_k = g_\eta; \ x_k + \ldots + x_{s+2} = g_\eta + \ldots + g_{\eta-r+2}. \end{cases} \tag{6}$$

Из (2) в (6) входят все уравнения, кроме последнего. Иными словами, если взять общие в (2) и (6) уравнения, т.е. из (2) исключить последнее уравнение, то получим из (1) ребро AE. Значит, некоторое ребро из вершины A получим из системы (1), присоединив к ней систему (2) без одного уравнения. Таким образом, доказано следующее описание ребра общего многогранника размещений.

Теорема 1. Если подсистема ограничений системы (1) описывает внутренние точки ребра общего многогранника размещений, то вместе с (1) выполняется $k-1$ уравнение из (3). При этом для концов ребер (вершин) выполняются все уравнения из (3) или аналогичной системы, описывающей другой конец ребра.

Представление (4) для вершины с повторением координат не единственно. Число таких представлений можно подсчитать. Если вершина имеет координаты $g_1, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, \ldots, g_\eta$, подсчитаем количество систем (4) для нее. Обозначим $G^{r,s} = \{g_1, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, \ldots, g_\eta\}$, образовав основу мультимножества $S(G^{r,s}) = (e_{r1}, \ldots, e_{rn_r})$ и первичную спецификацию $[G^{r,s}] = (\eta_{r1}, \ldots, \eta_{rn_r})$. Тогда количество систем для представления вершин составляет $\eta_{r1}! \cdot \eta_{r2}! \cdot \ldots \cdot \eta_{rn_r}!$, поскольку любое e_{ri} имеет кратность η_{ri} и соответствующие $g_j, \ldots, g_{j+\eta_{ri}-1}$, равные e_{ri}, можно переставлять η_{ri}! раз (при этом имеем одни и те же вершины), а для каждой полученной вершины записывать свою систему вида (4).

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть задано мультимножество $G = \{0, 1, 2, 2, 4\}$, $k = 3$. На рис. 1 изображен многогранник размещений $\Pi_{5,4}^{3}(G)$. Здесь вершины по слоям $x_1 = c$ ($c = 0; 1; 2; 4$): $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(0, 4, 2)$; $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 4)$, $(1, 4, 0)$; $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 2)$, $(2, 0, 4)$, $(2, 4, 0)$; $(4, 2, 2)$, $(4, 2, 0)$, $(4, 0, 2)$, $(4, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$.

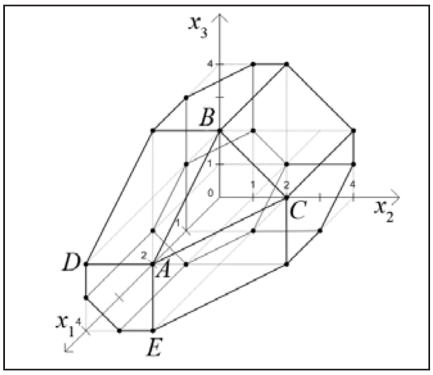

Рис. 1. Многогранник 3-размещений при $G = \{0, 1, 2, 2, 4\}$, $k = 3$

Рассмотрим некоторые его ребра. Вершина — точка $A = (4, 2, 2)$. Соседние точки $B = (2, 2, 4)$, $C = (2, 4, 2)$, $D = (4, 0, 2)$, $E = (4, 2, 0)$. Система для A (AI) имеет вид $x_1 = 4$; $x_1 + x_2 = 4 + 2$; $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 2 + 2$. Другая система для A (AII) имеет вид $x_1 = 4$; $x_1 + x_3 = 4 + 2$; $x_1 + x_3 = x_2 = 4 + 2 + 2$.

Запишем системы для вершин B, C, D, E.

Вершина B имеет две системы (BI; BII) вида

$$\begin{cases} x_3 = 4, \\ x_3 + x_2 = 6 \text{ или } x_3 + x_1 = 6, \\ x_3 + x_2 + x_1 = 8. \end{cases}$$

Вершина C также имеет две системы (CI; CII) вида

$$\begin{cases} x_2 = 4, \\ x_2 + x_1 = 6 \text{ или } x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Вершина D имеет одну систему вида $x_1 = 4$; $x_1 + x_3 = 6$; $x_2 = 0$.

Вершина E также имеет одну систему вида $x_1 = 4$; $x_1 + x_2 = 6$; $x_3 = 0$.

Представим системы для ребер. Ребро AB образуется вторым и третьим уравнениями системы AII (BII) (т.е. исключены первые уравнения): $x_1 + x_3 = 6$; $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Ребро AC образуется вторым и третьим уравнениями системы AI (CI) (т.е. исключены первые уравнения): $x_1 + x_3 = 6$; $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Ребро AD образуется первым и вторым уравнениями системы AII (D) (т.е. исключены третьи уравнения): $x_1 = 4$; $x_1 + x_3 = 6$. Ребро AE образуется первым и вторым уравнениями системы AI (E) (т.е. исключены первые уравнения): $x_1 = 4$; $x_1 + x_2 = 6$. Таким образом, чтобы получить все ребра, следует все системы для вершины выписать.

Рассмотрим системы для AI и AII, исключив вторые уравнения: для AI имеем систему (назовем ее $\overline{1}$) вида $x_1 = 4$; $x_1 + x_2 + x_3 = 8$; для AII имеем систему (назовем ее $\overline{2}$) вида $x_1 = 4$; $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Системы $\overline{1}$ и $\overline{2}$ совпадают и описывают точку A. При $x_1 = 4$ уравнение $x_2 + x_3 = 4$ для точек многогранника $E_{\eta n}^{k}(G)$ выполняется только в точке $(x_1, 2, 2)$; при $x_1 \neq 4$ — в точках $(x_1, 0, 4)$, $(x_1, 4, 0)$. В точке $A(4, 2, 2)$ $x_1 = 4$; следовательно, $(4, 2, 2) = (x_1, 2, 2)$, т.е. этой системе из $E_{\eta n}^{k}(G)$ удовлетворяет только A.

Замечание 1. В схеме, описанной выше для получения ребра многогранника размещений, а также в теореме 1 не производится замена g_i и g_{i+1}, не изменяются $g_s = g_{\eta-r}$, $g_{s+1} = g_{\eta-r}$. В этих случаях система для вершины при удалении одного уравнения по-прежнему описывает эту же вершину.

Пример 2. Пусть, как и в примере 1, $G = \{0, 1, 2, 2, 4\}$, $S(G) = (0, 1, 2, 4)$, $[G] = (1, 1, 2, 1)$. Кратности η_i элементов основы составляют $\eta_1 = 1$; $\eta_2 = 1$; $\eta_3 = 2$; $\eta_4 = 1$. Введем в рассмотрение параметры k_i, $i \in J_0^n$: $k_0 = 0$; $k_1 = \eta_1 = 1$; $k_2 = \eta_1 + \eta_2 = 2$; $k_3 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 4$; $k_4 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 5 = \eta$. Проведем дополнительный анализ, используя результаты примера 1. Проанализируем вторые уравнения из систем AI и AII. Для AI имеем уравнение $x_1 + x_2 = 6$. Обозначим $\omega = \{1, 2\}$ множество индексов этого уравнения. Для системы AI, которая описывает A, введем в рассмотрение множества индексов неизвестных в соответствующих уравнениях: $\omega^1 = \{1\}$, $|\omega^1| = 1$; $\omega^2 = \{1, 2\}$, $|\omega^2| = 2$; $\omega^3 = \{1, 2, 3\}$, $|\omega^3| = 3$; $\omega^1 \subset \omega^2 \subset \omega^3 = J_3$. Количество вложенных одно в другое подмножеств индексов обозначим λ. Для AII имеем $x_1 + x_3 = 6$: $\omega = \{1, 3\}$. Для всей системы AII, которая описывает A, имеем множества индексов неизвестных: $\omega_1 = \{1\}$, $|\omega_1| = 1$; $\omega_2 = \{1, 3\}$, $|\omega_2| = 2$; $\omega_3 = \{1, 3, 2\}$, $|\omega_3| = 3$; $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 = J_3$. В обоих случаях имеем $\lambda = 3$, $k = 3$. Определим $m = k - \{\lambda + \sum (|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1)\}$. Суммирование проводится, когда $|\omega_\sigma| > |\omega_{\sigma-1}|$ и $\exists j$ такое, что $k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|, |\omega_\sigma| \le k_j$.

Рассмотрим введенную в примере 1 систему $\overline{1}$ (аналогично $\overline{2}$). Для левопорожденной части системы полагают $k_0 = 0$; $k_1 = \eta_1$; $k_2 = \eta_1 + \eta_2$, …; для правопорожденной части системы полагают $k_0 = 0$; $k_1 = \eta_n$; $k_2 = \eta_n + \eta_{n-1}$, … Для $G = \{0, 1, 2, 2, 4\}$ и $[G] = (1, 1, 2, 1)$ получаем $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$, $k_5 = 5$. Система $\overline{1}$ содержит правопорожденные уравнения и при $\eta_3 = 2$; $\eta_4 = 1$ получаем $k_2 = 3$; $k_1 = 1$; $k_0 = 0$. Между k_2 и k_1 стоят числа $|\omega_2| = 3$; $|\omega_1| = 1$; $\lambda = 2$, поскольку система $\overline{1}$ (или $\overline{2}$) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 4 & (|\omega_1| = 1), \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 & (|\omega_2| = 3) \end{cases}$$

и $\omega_1 = \{1\}$, $|\omega_1| = 1$; $\omega_2 = \{1, 2, 3\}$, $|\omega_2| = 3$. Найдем

$$m = k - \{\lambda + \sum (|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1)\} = 3 - (2 + (3 - 1 - 1)) = 3 - 3 = 0.$$

Имеем 0-грань — вершину, которая описана системой $\overline{1}$ (или $\overline{2}$).

Пример 3. Пусть, как и в примерах 1 и 2, имеем мультимножество $G = \{0, 1, 2, 2, 4\}$, но при этом $k = 4$. Рассмотрим вершину $g^0 = (0, 1, 2, 2)$ общего многогранника размещения $E_{\eta n}^k(G)$. Для этой вершины имеем такие системы.

Первая система (система I):

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Вторая система (система II):

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Соседние с g^0 вершины $g^1 = (1, 0, 2, 2)$; $g^2 = (0, 2, 1, 2)$; $g^3 = (0, 2, 2, 1)$ получены перестановкой неравных элементов g_i и g_{i+1}, а вершины $g^4 = (0, 1, 2, 4)$; $g^5 = (0, 1, 4, 2)$ получены заменой неравных элементов g_s на $g_{\eta-r}$. Для вершины g^1 имеем две системы:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Ребро $g^0 g^1$ из первой системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Ребро $g^0 g^1$ из второй системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

На этом ребре имеются две вершины, в которых переставлены координаты 0 и 1: $(0, 1, 2, 2) \leftrightarrow (1, 0, 2, 2)$. Для вершины $g^2 = (0, 2, 1, 2)$ также имеем две системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Ребро $g^0 g^2$ может представляться одной из двух систем:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Здесь имеем $(0, 1, 2, 2) \leftrightarrow (0, 2, 1, 2)$.

Для вершины g^3 имеем две системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Ребро $g^0 g^3$ имеет одну систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_4 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

т.е. $g^0 g^3$ — ребро, в вершинах которого переставлены 2 и 1 (x_1 и x_4): $(0,1,2,2) \leftrightarrow (0,2,2,1)$.

Вершина $g^4 = (0,1,2,4)$ определяется как

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Для ребра $g^0 g^4$ имеем одну систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Рассмотрим вершину $g^5 = (0,1,4,2)$, которая определяется системой

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Для ребра $g^0 g^5$ имеем одну систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Система, полученная из системы для описания вершины g^0 (система I или система II) исключением третьего уравнения, определяет одну систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases}$$

заметим, что $|\omega_1| = 0$; $|\omega_2| = 2$; $|\omega_3| = 4$; $\lambda = 3$. Для этого мультимножества G имеем основу $S(G) = (0,1,2,4)$; первичную спецификацию $[G] = (1,1,2,1)$, т.е. $k_0 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $|\omega_2| = 2$; $|\omega_3| = 4$; $k_3 = 4$; $k_4 = 5$. Найдем $m = k - \{\lambda + \sum (|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1)\} = 4 - \{3 + (4 - 2 - 1)\} = 4 - 4 = 0$. Таким образом, эта система описывает вершину g^0.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕБРА УРАВНЕНИЯМИ ИЗ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОМР

Пусть вершина $g \in \Pi_{\eta n}^k(G)$ определяется системой (3). Введем обозначения для левопорожденной части системы (3): $\omega_1^L = \{i_1\}$; $\omega_2^L = \{i_1, i_2\}$; … ; $\omega_s^L = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, а для правопорожденной части системы (3) $\omega_1^R = \{i_k\}$; $\omega_2^R = \{i_k, i_{k-1}\}$; … ; $\omega_r^R = \{i_k, i_{k-1}, \dots, i_{s+1}\}$; отметим, что $r + s = k$, $s, r \in J_k^0$.

Очевидно, что

$$\omega_1^L \subset \omega_2^L \subset \dots \subset \omega_s^L, \tag{7}$$

$$\omega_1^R \subset \omega_2^R \subset \dots \subset \omega_r^R, \tag{8}$$

а также что $\omega_s^L \cup \omega_r^R = J_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Пусть после исключения уравнения из системы, которая описывает вершину, с целью образования ребра соответствующие системы подмножеств изменились (точнее, количество элементов в одном из подмножеств уменьшилось на единицу), т.е. если исключим уравнение из левопорожденной подсистемы, то имеем подмножества индексов

$$\omega_{i_1}^{L} \subset \omega_{i_2}^{L} \subset \ldots \subset \omega_{i_{s-1}}^{L} \tag{9}$$

и подмножества индексов (8). Если исключим уравнение из правопорожденной подсистемы, то имеем подмножества индексов (7) и подмножества индексов

$$\omega_{j_1}^{R} \subset \omega_{j_2}^{R} \subset \ldots \subset \omega_{j_{r-1}}^{R} . \tag{10}$$

Как указано выше, рассматриваются множество k-размещений $E_{\eta n}^{k}(G)$, общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$, где $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, $g_1 \le \ldots \le g_\eta$; $S(G)=(e_1, \ldots, e_n)$, $e_1 < \ldots < e_n$; $[G]=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Отметим [2], что вершиной $x=(x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{vert} \Pi_{\eta n}^{k}(G)$ является точка, координаты которой — это такие элементы $g_1, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \ldots, g_\eta$ из G, где $s+r=k$; $s, r \in J_k^0=\{0, 1, 2, \ldots, k\}$, и только они, стоящие в любом порядке в x. Таким образом, одной из вершин является точка $g^0=(g_1, g_2, \ldots, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \ldots, g_\eta)$, а другие врешины получаются перестановкой этих элементов или выбором другого элемента $s \in J_k^0$, а значит, и $r=k-s$. Параметр σ в случае $s \ne 0$ определим так:

$$g_s=e_\sigma; \tag{11}$$

а в случае $s=0$ имеем $\sigma=0$. Параметр ρ в случае $r \ne 0$ определим так:

$$g_{\eta-r+1}=e_\rho, \tag{12}$$

а в случае $r=0$ имеем $\rho=0$. Определим $K_0=0$; $K_1=\eta_1$; $K_2=\eta_1+\eta_2$; …; $K_\sigma=s-K_{\sigma-1}$, где σ находится из (11). Определим $\nu_0=0$, $\nu_1=\eta_n$, $\nu_2=\eta_n+\eta_{n-1}$, …, $\nu_\rho=r-\nu_{\rho-1}$, где ρ находится из (12). Таким образом, имеем теорему.

Теорема 2. (Об идентификации ребра уравнениями в системе ОМР.)

1. Если F — ребро ОМР, то существует, возможно, не единственная (в случае, когда G — мультимножество, а не множество), система равенств с подмножествами индексов, которые определяются соотношениями (8), (9) или (7), (10).

2. Если имеем множество индексов (8), (9) или (7), (10), которые в системе (1) определяют равенства, то эти условия дают множество F: ребро ОМР или его вершину. Размерность этого множества F определяется так: $\dim F=k-\{\lambda+\sum(|\omega_\tau|-|\omega_{\tau-1}|-1)\}$, где $\lambda=k-1$, а суммирование проводится для (9) или (10) при таких индексах ($\tau \in J_{s-1}$ для (9); $\tau \in J_{r-1}$ для (10)), для каждого из которых найдется $j \in J_\sigma$ (для (9)), $j \in J_\rho$ (для (10)), что для (9) выполняется $K_{j-1} \le |\omega_{\tau-1}|=|\omega_{i_{\tau-1}}^{L}|$ и $|\omega_{i_\tau}^{L}|=|\omega_\tau| \le K_j$ (где $\omega_0=0$), а для (10) имеет место $\nu_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|=|\omega_{j_{\sigma-1}}^{R}|$ и $|\omega_{j_\sigma}^{R}|=|\omega_\sigma| \le \nu_j$ (где $\omega_0=0$).

Замечание 2. В теореме 2 размерность F равна нулю в случае, когда F — вершина, или единице, когда F — ребро. Поэтому теорема 2 является критерием ребра.

Пример 4. Пусть $G=\{1, 2, 2, 2, 3\}$, $k=4$. Имеем $\eta_1=1$; $\eta_2=3$; $\eta_3=1$, $\eta=5$. Зададим $K_0=0$, $K_1=1$, $K_2=4$; $\nu_2=4$, $\nu_1=1$, $\nu_0=0$. Рассмотрим вершину

$g^0 = (\underline{1,2},\overline{2,3})$. Если считать $g_1 = 1$; $g_2 = g_3 = 2$; $g_4 = g_{\eta-r+1} = 2$, $g_\eta = g_5 = 3$, $r = s = 2$ (черта снизу и сверху в g^0: снизу слева подчеркиваем s элементов, справа сверху подчеркиваем r элементов), то вершину описывает система, состоящая их двух (левопорожденной и правопорожденной) подсистем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1+2$, $|\omega_1| = 1$, $|\omega_2| = 2$; $x_4 = 3$, $x_4 + x_3 = 5$, $|\omega^1| = 1$, $|\omega^2| = 2$.

Для первого ребра имеем системы и соответственно параметры: $x_1 = 1$, $|\omega_0| = 0$, $|\omega_1| = 1$; $x_4 = 3$, $x_4 + x_3 = 5$, $|\omega^0| = 0$, $|\omega^1| = 1$, $|\omega^2| = 2$; $m = k - (\lambda + (1-0-1) + (2-1-1)) = 1$. Для второго ребра левопорожденная система имеет вид $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 3$, правопорожденная система имеет вид $x_3 = 3$. Как и для первого ребра, размерность $m = 1$. Для третьего рабра имеем $x_1 + x_2 = 3$, $|\omega_1| = 2$, $|\omega_0| = 0$; $x_3 = 3$; $x_4 + x_3 = 5$, $|\omega^1| = 1$, $|\omega^2| = 2$; $m = 1$. Для четвертого ребра имеем $x_1 = 1$; $x_1 + x_2 = 3$; $x_4 + x_3 = 5$; $m = 1$. Пусть теперь вершина $g^0 = (\underline{1,2,2},3)$ представлена в виде ее левопорожденной части: $x_1 = 1$; $x_1 + x_2 = 3$; $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ (т.е. $s = 3$, подчеркнуто слева в g^0) и правопорожденной части: $x_4 = 3$ (т.е. $r = 1$). Первое ребро, состоящее из левопорожденной части системы для g^0, определяет $|\omega_1| = 1$, $|\omega_2| = 2$, $|\omega_3| = 3$. Действительно, размерность m множества F равна единице. Для второго ребра левопорожденная часть системы имеет вид $x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 3$, а правопорожденная часть имеет вид $x_4 = 3$. Легко подсчитав m, убеждаемся, что действительно размерность m множества F равна единице. Рассмотрим третье множество F, которое определяется системой $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_4 = 3$, $|\omega_1| = 1$, $|\omega_2| = 3$, $|\omega_3| = 1$. Подсчитаем размерность m этого множества: $m = k - (\lambda + (3-1-1)) = 4 - 3 - 1 = 0$. Следовательно, F — это вершина. Представив систему для третьего множества F в виде $x_1 = 1$, $x_4 = 3$, $x_2 + x_3 = 4$, легко увидеть, что эта система является вершиной g^0, поскольку при $x_1 = 1$, $x_4 = 3$ из (1) имеем $2 \le x_2 \le 2$; $2 \le x_3 \le 2$. Все выкладки по аналогии с примером 4 легко провести и для общего случая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено описание ребра общего многогранника размещений системой уравнений и неравенств, являющихся подсистемой системы, описывающей этот многогранник. Получен критерий ребра ОМР и дано описание вершины ОМР, содержащее $k-1$ уравнение из системы для ОМР. Как направление дальнейших исследований, целесообразно рассматривать всесторонние исследования структуры ОМР, выявление и типизацию комбинаторных типов ОМР и эти свойства использовать для разработки методов оптимизации в задачах на размещениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Київ: Наук. думка, 2008. 159 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
5. Ємець О.О., Черненко О.О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації. Полтава: ПУЕТ, 2011. 204 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.

6. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. Київ: Наук. думка, 2011. 154 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. Москва: Наука, 1981. 344 с.
8. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації. *Доповіді НАНУ.* 1999. № 8. С. 37–41.
9. Emets O.A., Barbolina T.N. Solving linear optimization problems on arrangements by the truncation method. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2003. Vol. 39, N 6. P. 889–896.
10. Emets' O.O., Roskladka O.V., Nedobachii S. I. Irreducible system of constraints for a general polyhedron of arrangements. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2003. Vol. 55, N 1. P. 1–12.
11. Yemets O.A., Barbolina T.N. Solution of Euclidean combinatorial optimization problems by the method of construction of a lexicographic equivalence. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2004. Vol. 40, N 5. P. 726–734.
12. Yemets O., Chernenko O. A nonreducible system of constraints of a combinatorial polyhedron in a linear-fractional optimization problem on arrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 2. P. 246–254.
13. Yemets O.A., Barbolina T.N., Chernenko O.A. Solving optimization problems with linear-fractional objective functions and additional constraints on arrangements. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2006. Vol. 42, N 5. P. 680–685.
14. Ємець О.О., Черненко О.О. Оптимізація дробово-лінійної функції на розміщеннях: властивості допустимої області. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2006. № 5. С. 22–29.
15. Emets O.A., Ustian N.Yu. Studies of problems of combinatorial optimization of game type on arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2007. Vol. 39, N 1. P. 24–35.
16. Емец О.А., Черненко О.А. Анализ алгоритма решения условных задач оптимизации с дробно-линейной целевой функцией на размещениях. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 4. С. 133–146.
17. Iemets O.O., Yemets O.O. Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 4. P. 547–557.
18. Iemets O.A., Olkhovskaja E.V. Proving the convergence of the iterative method for solving a game-type combinatorial optimization problem on arrangements. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 1. P. 86–97.
19. Iemets O.O., Barbolina T.M. Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 2. P. 285–295.
20. Iemets O.O., Barbolina T.M. Solving linear unconstrained problems of combinatorial optimization on arrangements under stochastic uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 457–466.
21. Ємець О.О., Чілікіна Т.В. Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень. *Вісник Черкаського університету.* Сер. Прикладна математика. Інформатика. 2015. № 18 (351). С. 3–10.
22. Guilband G.Th., Rosenstiehl P. Analyse algebrique d'un scrutin. *Mathematiques et Sciences Humaines.* 1963. T. 4. P. 9–33. URL: http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963_4_9_0.1.
23. Gaiha P., Gupta S.K. Adjacent vertices on permutation. *SIAM J. Appl. Math*. 1977. T. 32, N 2. P. 323–327.
24. Болоташвили Г.Г. О гранях перестановочного многогранника. Сообщения АН Грузии. 1986. Т. 121, № 2. С. 281–284.
25. Rahmania N. Distance vectorielles entremots. *Mathematiques et Sciences Humaines.* 1987. T. 97. P. 67–78. URL: http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987_97_67_0.
26. Vonarnim Annelie, Faigle Ulrich, Schrader Rainer. The permutahedron of series-parallel posets. *Discrete Applied Mathematics.* 1990. Vol. 28. P. 3–9.
27. Concini C., Procesi C. Wonderful models for subspace arrangements. *Selecta Math.* (N.S.). 1995. Vol. 1. P. 1–23.
28. Postnikov A., Stanley R.P. Deformations of Coxeter hyperplane arrangements. *Journal of Combinatorial Theory.* Special issue dedicated to G.-C. Rota. Ser. A 91. 2000. Nos. 1–2. P. 544–597.

29. Postnikov A. Permutohedra, associahedra, and beyond. URL: http://arXiv:math/0507163v1[math.CO] . 2005. 59 p.

30. Baumeister B., Haase C., Nill B., Pattenholz A. On permutation polytopes. URL: http://arXiv:/0709.1615v1[math.CO], 2007. 22 p.

31. Hwang F.K., Lee J.S., Rothblum U.G. Equivalence of permutation polytopes corresponding to strictly supermodular functions. *Discrete Applied Mathematics.* 2008. Vol. 156. P. 2336–2343.

32. Исаченко А.Н., Исаченко Я.А. Наследование гиперграней в задачах на перестановках. Междунар. конгресс по информатике: информационные системы и технологии: Материалы междунар. науч. конгресса (Республика Беларусь, Минск, 31 октября – 3 ноября 2011 года). Ч. 2. Минск: БГУ, 2011. С. 279–282.

33. Croitoru D. , Oh SuHo, Postnikov A. Poset verctors and generalized permutohedra. URL: http://arXiv:/1309.1994v1[math.CO] , 2013. 13 p.

Надійшла до редакції 14.07.2017

Ємець О.О., Ємець Ол-ра О., Поляков І.М.

КРИТЕРІЙ РЕБРА ЗАГАЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА РОЗМІЩЕНЬ

Анотація. Досліджено властивості загального многогранника розміщень для задач оптимізації на розміщеннях: розглянуто опис ребра загального многогранника розміщень системою рівнянь і нерівностей, що є підсистемою системи, яка описує цей многогранник. Отримано критерій ребра загального многогранника розміщень, описано його вершини.

Ключові слова: загальний многогранник розміщень, критерій ребра, задачі оптимізації на розміщеннях.

Iemets O.Ol., Yemets' O.Ol., Polyakov I.M.

CRITERION OF THE EDGE OF THE GENERAL POLYHEDRON OF ARRANGEMENTS

Abstract. The properties of the general polyhedron of arrangements for optimization problems on arrangements are investigated in the paper. An edge of the general polyhedron of arrangements is described by the system of equations and inequalities that is a subsystem of the system describing this polyhedron. The criterion of the edge of the general polyhedron of arrangements is obtained and its vertices are described.

Keywords: general polyhedron of arrangements, edge criterion, optimization on arrangements.

Емец Олег Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Полтавского университета экономики и торговли, e-mail: yemetsli@ukr.net.

Емец Александра Олеговна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Полтавского университета экономики и торговли,
e-mail: yemets2008@ukr.net.

Поляков Иван Михайлович,
аспирант Полтавского университета экономики и торговли.