УДК 519.85

Ю.Г. СТОЯН, С.В. ЯКОВЛЕВ

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация. Введено понятие конфигурационного пространства геометрических объектов. Его обобщенными переменными являются метрические параметры пространственной формы и параметры размещения объектов. Рассматриваются свойства конфигурационных пространств сложных геометрических объектов. Исследуются структуры конфигурационных пространств для различных классов задач размещения геометрических объектов, в том числе задач упаковки, компоновки и покрытия. Обобщено понятие Ф-функции геометрических объектов с переменными метрическими параметрами.

Ключевые слова: геометрический объект, конфигурационное пространство, обобщенные переменные, компоновка, упаковка, покрытие.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование широкого класса технических и социально-экономических систем предполагает синтез сложных пространственных конфигураций геометрических объектов, составляющих систему, обработкой и преобразованием геометрической информации о них. При взаимодействии материальных объектов, участвующих в процессе синтеза системы, необходимо учитывать их пространственную форму, метрические характеристики, а также различные ограничения на их взаимное расположение. Для описания внешнего вида, очертания и взаимного расположения совокупности материальных объектов используется термин конфигурация. В проективной геометрии под конфигурацией понимают некоторое расположение множества точек, прямых либо поверхностей в пространстве соответствующей размерности [1–3]. Обзор публикаций, посвященных так называемым геометрическим конфигурациям, достаточно полно представлен в [4]. Отдельным важным классом являются комбинаторные конфигурации [2, 5, 6].

Исследование конфигураций как математических объектов естественным образом связано с понятием конфигурационного пространства [7–12]. Неформально конфигурационное пространство можно определить в виде совокупности геометрических переменных, задающих расположение в пространстве некоторой системы и ее частей как относительно одна другой, так и относительно заданной системы отсчета. Число координат (параметров), определяющих эту систему, зависит от количества входящих в нее материальных объектов (тел), а также от характера налагаемых на них связей.

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Независимые параметры, которые однозначно определяют положение системы материальных объектов в пространстве, а их количество равно числу степеней свободы системы, называют обобщенными координатами.

Таким образом, конфигурационное пространство можно определить как абстрактное пространство, задающее конфигурацию системы, т.е. совокупность значений всех ее обобщенных координат. При этом число степеней свободы системы задает размерность конфигурационного пространства. Например, конфигурационное пространство свободного твердого тела можно задать совокупностью трех координат центра инерции и трех углов Эйлера, определяющих поворот системы осей, неизменно связанной с телом, относительно неподвижной системы координат. Конфигурационное пространство системы n твердых тел в пространстве есть совокупность $6n$ координат. При наличии жестких связей между телами и других ограничений на их взаимное расположение размерность конфигурационного пространства изменяется в соответствии с уменьшением числа степеней свободы системы.

Понятие конфигурационного пространства находит широкое применение прежде всего при исследовании динамики твердых тел. В любой фиксированный момент времени точка в этом пространстве определяет состояние системы, характеризуемое обобщенными координатами составляющих ее материальных объектов. Параметризованная кривая в конфигурационном пространстве является траекторией движения системы и полностью определяет ее эволюцию. При этом в рамках теории динамики твердых тел свойства конфигурационных пространств с учетом различной формы, переменных метрических размеров, а также ограничений на взаимное расположение объектов, как правило, не рассматривались. В данном случае указанные характеристики выступают дополнительными обобщенными переменными конфигурационного пространства, а учет ограничений на взаимное расположение объектов требует применения специального математического аппарата. Эти исследования естественным образом интегрируются с основными положениями общей теории геометрического проектирования [13–21], в частности со свойствами введенного пространства геометрических информаций.

Понятие геометрической информации неразрывно связано с геометрическим объектом. В рамках данной статьи под геометрическими объектами будем понимать точечные множества арифметического евклидова пространства заданной размерности. Для построения математических моделей реальных материальных объектов класс точечных множеств может быть значительно сужен введением соответствующих алгебро-топологических ограничений. В частности, для точечных множеств пространств R^2 и R^3 выделен класс так называемых φ-объектов. Точечное множество $S \subset R^3$ называется φ-объектом, если: 1) множество канонически замкнуто; 2) внутренность ($int\,S$) и замыкание ($cl\,S$) множества S имеют один и тот же гомотопический тип; 3) для любой точки множества $int\,S$ существует окрестность $U \subset cl\,S$ такая, что $int\,U$ и $cl\,U$ имеют один и тот же гомотопический тип. Для точечных множеств $S \subset R^2$ достаточно выполнения первых двух условий.

Любой геометрический объект S характеризуется пространственной формой, имеет определенные размеры и занимает некоторое положение в пространстве. Свяжем с объектом S собственную систему координат, начало которой назовем полюсом объекта S. Полюсом, как правило, выбирается произвольная внутренняя точка S. При этом, исходя из геометрических либо физических предположений, можно дать соответствующие рекомендации для выбора полюса. Например, для простоты аналитического описания центрально-симметричных объектов полюс задается в центре симметрии. Если объект S симметричен относительно некоторой оси, с ней совмещается ось его собственной системы координат. Полюс твердого тела целесообразно совмещать с его центром инерции.

В дальнейшем во избежание неоднозначности определений положим, что $S \subset R^3$. При этом полученные результаты очевидным образом распространяются на случай $S \subset R^2$.

Естественным способом задания пространственной формы $\{s\}$ геометрического объекта $S \subset R^3$ является построение уравнения его границы $f(\xi)=0$, где

$\xi = (x, y, z) \in R^3$. Заметим, что задача определения геометрического объекта S по известной функции $f(\xi)$ (прямая задача аналитической геометрии) имеет единственное решение. В то же время для заданного объекта S можно построить бесконечное число уравнений его границы (обратная задача аналитической геометрии). Этот факт позволяет выделять различные классы математических моделей геометрических объектов с учетом дополнительных свойств функции $f(\xi)$. Например, это могут быть условия дифференцируемости $f(\xi)$. Выбор дополнительных свойств функций $f(\xi)$ можно определять, исходя из геометрических свойств объектов, например из свойств нормальности уравнения границы *fr* S геометрического объекта S [22]. Если функция $f(\xi)$ достаточно гладкая в окрестности граничных точек объекта S и с заданной точностью удовлетворяет уравнению нормальности, то она называется нормализованной [22]. Свойства нормальности и нормализованности функций, задающих уравнение границы объекта, используются для конкретизации описания его пространственной формы.

В общем случае уравнение границы *fr* S содержит определенные константы $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, которые характеризуют тополого-метрические свойства объекта S, т.е.

$$f(\xi, \mu) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — переменные с областью допустимых значений $D \subseteq R^k$, а функция $f(\xi, \mu)$ определена и непрерывна всюду на $R^3 \times D$. Класс эквивалентности на множестве геометрических объектов как точечных множеств пространства R^3 зададим следующим образом. Положим, что геометрические объекты имеют одну и ту же пространственную форму, если их уравнения границы можно представить в виде (1) при некотором фиксированном $\hat{\mu} \in D$, причем

$$f(\xi, \hat{\mu}) < 0, \text{ если } \xi \in int\, S;$$

$$f(\xi, \hat{\mu}) > 0, \text{ если } \xi \in R^m \setminus cl\, S.$$

Компоненты вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ назовем метрическими параметрами пространственной формы объекта S. Выбор такой терминологии объясняется тем, что метрические параметры прежде всего характеризуют размеры геометрических объектов, их диаметр, объем, площадь поверхности и т.д.

При аффинных преобразованиях движения объекта S изменяется положение его собственной системы координат относительно некоторой неподвижной системы координат пространства R^3. Для характеристики такого положения зададим так называемые параметры размещения $p = (p_1, \ldots, p_6) = (v, \theta)$, где v — вектор координат полюса объекта в неподвижной системе координат, θ — вектор угловых параметров, определяющих взаимное расположение осей собственной и неподвижной систем координат. Если $S \subset R^3$, то $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Например, угловыми параметрами могут быть выбраны углы Эйлера.

Положение геометрического объекта S относительно неподвижной системы координат *Oxyz* задается так называемым уравнением общего положения

$$F(\xi, \mu, v, \theta) = f[A(\xi - v), \mu] = 0, \tag{2}$$

где A — ортогональный оператор, выраженный через угловые параметры θ.

Для комплексной характеристики геометрического объекта S с учетом его расположения в пространстве используется понятие геометрической информации $g = (\{s\}, \{\mu\}, \{p\})$, содержащей пространственную форму $\{s\}$ как класс эквивалентности на совокупности точечных множеств, метрические параметры $\{\mu\}$ и параметры размещения $\{p\}$. На множестве геометрических информаций заданы линейное пространство канонических информаций и пространство информаций G для конечной системы φ-объектов. В соответствии с общей концепцией построения таких пространств определим их структуру следующим образом. Положим в основу задания компонент геометрической информации $g = (\{s\}, \{\mu\}, \{p\})$ объекта $S \subset R^3$ уравнение его общего положения (2). Зафиксируем пространственную форму $\{s_0\}$ объекта S, задав конкретный вид функции $f : R^3 \times D \to R^1$.

Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(S)$ геометрического объекта S, выбрав в качестве обобщенных координат $g = (\mu, p) = (\mu_1, \ldots, \mu_k, p_1, \ldots, p_6)$. Тогда конфигурационное пространство $\Xi(S)$ является многообразием пространства канонических информаций $G(S)$, а точка $g \in \Xi(S)$ определяет параметризованный геометрический объект $S(g) \subset R^3$. Размерностью конфигурационного пространства $\Xi(S)$ назовем число его обобщенных координат. При заданных значениях обобщенных переменных точка $g \in \Xi(S)$ однозначно определяет геометрический объект $S(g) \subset R^3$, который назовем изображением или изображающей точкой. Заметим, что аналогичное определение изображающей точки используется в общей теории конфигурационных пространств [7–12].

Если все метрические параметры пространственной формы и параметры размещения геометрического объекта S являются обобщенными переменными, то соответствующее конфигурационное пространств $\Xi(S)$ имеет размерность $m = k + 6$. Часть обобщенных переменных пространства $\Xi(S)$ может быть фиксирована. Например, ограничиваясь только всевозможными трансляциями объекта $S \subset R^3$, число параметров размещения уменьшится до трех. Соответствующее конфигурационное пространство $\Xi(S)$ будет иметь размерность $m = k + 3$. При конгруэнтных преобразованиях объекта $S \subset R^3$ размерность конфигурационного пространства равна шести.

Приведем примеры построения конфигурационных пространств для некоторых классов геометрических объектов $S \subset R^3$. Рассмотрим шар S радиуса $r > 0$. Свяжем с ним подвижную систему координат, выбрав ее начало (полюс шара) в центре симметрии S. Определим пространственную форму $\{s\}$ шара следующим уравнением его границы:

$$f(x, y, z, r) = r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Тогда $\mu = r$ является метрическим параметром, а параметры размещения шара S обозначим $p = (v_1, v_2, v_3)$. Соответствующее уравнение общего положения шара имеет вид

$$F(x, y, z, v_1, v_2, v_3, r) = r^2 - (x - v_1)^2 - (y - v_2)^2 - (z - v_3)^2 = 0.$$

Таким образом, конфигурационное пространство $\Xi(S)$ шара S задается четырьмя его обобщенными координатами: v_1, v_2, v_3, r.

Рассмотрим в пространстве R^3 параллелепипед Π со сторонами $2a > 0,\ 2b > 0,\ 2c > 0$. Выберем полюс объекта Π в точке пересечения диагоналей параллелепипеда, а оси собственной системы координат совместим с его осями симметрии. Пространственную форму $\{s\}$ параллелепипеда Π определим уравнением

$$\begin{gathered} f(x, y, z, a, b, c) = a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + c^2 - z^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} - \\ - \sqrt{\left(a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2}\right)^2 + (c^2 - z^2)^2} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда параллелепипед П будет задаваться метрическими параметрами $\mu = (a, b, c)$ и параметрами размещения $p = (v_1, v_2, v_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Уравнение общего положения параллелепипеда можно записать в соответствии с (2) и (3), положив $\xi = (x, y, z)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\mu = (a, b, c)$. Конфигурационное пространство $\Xi(\Pi)$ параллелепипеда П имеет размерность $m = 9$ и определяется обобщенными координатами $v_1, v_2, v_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, a, b, c$.

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО СОВОКУПНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Пусть в пространстве R^3 задана совокупность геометрических объектов $\Omega = \{S_1, \dots, S_n\}$. Положим $J_n = \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\Xi(S_i)$ конфигурационное пространство объекта S_i с обобщенными координатами $g^i = (\mu^i, p^i)$, где $\mu^i = (\mu_1^i, \dots, \mu_{k_i}^i)$, $p^i = (v^i, \theta^i) = (p_1^i, \dots, p_6^i)$, $i \in J_n$. Пространственная форма объекта S_i задается уравнением $f_i(\xi, \mu^i) = 0$ при фиксированном векторе метрических параметров $\mu^i = \hat{\mu}^i$. Тогда уравнение общего положения объекта S_i примет вид

$$F_i(\xi, \hat{\mu}^i, v^i, \theta^i) = f_i[A(\xi - v^i), \hat{\mu}^i] = 0$$

и будет описывать уравнение границы объекта $S_i(g^i)$ в неподвижной системе координат *Oxyz* пространства R^3. Каждой точке $g^i \in \Xi(S_i)$ соответствует параметризованный геометрический объект $S_i(g^i) \subset R^3$, $i \in J_n$.

Рассмотрим конфигурационное пространство совокупности геометрических объектов Ω как прямое произведение конфигурационных пространств объектов $S_i, i \in J_n$, т.е.

$$\Xi(\Omega) = \Xi(S_1) \times \ldots \times \Xi(S_n).$$

Очевидно, что размерность пространства $\Xi(\Omega)$ в общем случае определяется выражением $m = 6n + \sum_{i=1}^{n} k_i$.

С помощью теоретико-множественных операций (объединения, пересечения, дополнения) сформируем сложный геометрический объект

$$S_B = B(S_1, \dots, S_n). \tag{4}$$

При этом объекты $S_i, i \in J_n$, назовем базовыми.

Сложному объекту S_B в конфигурационном пространстве $\Xi(\Omega)$ соответствует параметризованный геометрический объект

$$S_B(g^1, \dots, g^n) = B(S_1(g^1), \dots, S_n(g^n)),$$

а точка $g = (g^1, \dots, g^n) \in \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию геометрических объектов $S_i, i \in J_n$.

Зафиксируем значения обобщенных переменных, положив $g^i = \hat{g}^i, i \in J_n$. Точка $\hat{g} = (\hat{g}^1, \dots, \hat{g}^n) \in \Xi(\Omega)$ является изображающей точкой конфигурационного пространства $\Xi(\Omega)$, которой соответствует сложный объект

$$S_B(\hat{g}^1, \dots, \hat{g}^n) = B(S_1(\hat{g}^1), \dots, S_n(\hat{g}^n)). \tag{5}$$

Геометрический объект $S_B(\hat{g}^1, \ldots, \hat{g}^n)$, представимый в виде (5), назовем сложным объектом первого порядка. При этом базовые объекты $S_i(\hat{g}^i)$, $i \in J_n$, назовем объектами нулевого порядка. По аналогии построения совокупности базовых и сложных объектов первого порядка можно строить геометрические объекты второго и выше порядков. Аналогичный подход использован при построении комбинаторных объектов высших порядков в работах [23, 24].

Для построения уравнения границы сложного геометрического объекта S_B на основе уравнений границ составляющих его базовых объектов разработана теория R-функций [22]. Уравнение границы объекта $S_B(\hat{g}^1, \ldots, \hat{g}^n)$ описывается в соответствии с его предикатным уравнением, соответствующим теоретико-множественному представлению (4), на основе опорных областей Σ_i, определяющих базовые объекты S_i, $i \in J_n$. При этом опорные области задаются в виде

$$\Sigma_i = \{F_i(\xi, \hat{\mu}^i, \hat{v}^i, \hat{\theta}^i) \geq 0\}, \; i \in J_n.$$

В результате граница сложного объекта $S_B(\hat{g}^1, \ldots, \hat{g}^n)$ определяется уравнением

$$f_B(\xi, \hat{\mu}^1, \ldots, \hat{\mu}^n, \hat{g}^1, \ldots, \hat{g}^n) = 0.$$

Пусть $S_1(g^1)$ и $S_2(g^2)$ — базовые объекты (объекты нулевого порядка), описываемые уравнениями общего положения в неподвижной системе координат $Oxyz$

$$F_i(\xi, \mu^i, v^i, \theta^i) = 0,$$

где $\xi = (x, y, z) \in R^3$, $g^i = (v^i, \theta^i) \in R^6$, $\mu^i = (\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_{k_i}^i)$, $i = 1,2$.

Рассмотрим сложный объект S_B, структура которого имеет вид

$$B(S_1, S_2) = S_1 \cap S_2.$$

Тогда уравнение границы сложного объекта $S_B = S_B(g^1, g^2)$ (объекта первого порядка) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(\xi, \mu) = F_1(\xi, \mu^1, v^1, \theta^1) \wedge_0 F_2(\xi, \mu^2, v^2, \theta^2) = \\ = F_1(\xi, \mu^1, v^1, \theta^1) + F_2(\xi, \mu^2, v^2, \theta^2) - \\ - \sqrt{F_1^2(\xi, \mu^1, v^1, \theta^1) + F_2^2(\xi, \mu^2, v^2, \theta^2)} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mu = (\mu^1, v^1, \theta^1, \mu^2, v^2, \theta^2)$, а $\wedge_0$ — операция R-конъюнкции [22].

Выберем полюс объекта S_B и свяжем с ним собственную систему координат. Пусть $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{\theta})$ — параметры размещения объекта S_B в неподвижной системе $Oxyz$. Тогда уравнение общего положения объекта S_B запишем как

$$F_{12}(\xi, \mu, v_B, \theta_B) = f[A(\xi - v_B), \mu] = 0.$$

Таким образом, объект $S_B(g^1, g^2)$ определяется уравнением границы (6), имеет параметры размещения $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{\theta})$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3)$ и метрические параметры $\mu = (\mu^1, v^1, \theta^1, \mu^2, v^2, \theta^2)$. Конфигурационное пространство $\Xi(S_B)$ объекта $S_B(g^1, g^2)$ будет иметь обобщенные координаты $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3, \mu^1, v^1, \theta^1, \mu^2, v^2, \theta^2$ и размерность $m = 18 + k_1 + k_2$. Фиксируя некоторые метрические параметры или параметры размещения объектов $S_1(g^1)$ и $S_2(g^2)$, размерность пространства $\Xi(S_B)$ соответственно уменьшится.

Пусть $S(r_i, v^i)$, $i=1,2,$ — шары с радиусами $r_i > 0$ и параметрами размещения $v^i = (v_1^i, v_2^i, v_3^i)$. Уравнения общего положения шаров в неподвижной системе координат $Oxyz$ имеют вид

$$F_i(\xi, r_i, v^i) = r_i^2 - (x - v_1^i)^2 - (y - v_2^i)^2 - (z - v_3^i)^2 = 0, \ i = 1,2.$$

Уравнение границы объекта $S_{12} = S(r_1, v^1) \cap S(r_2, v^2)$ запишем как

$$\begin{gathered} f(\xi, \mu) = \mu_1 - (x - \mu_2)^2 - (y - \mu_3)^2 - (z - \mu_4)^2 + \\ + \mu_5 - (x - \mu_6)^2 - (y - \mu_7)^2 - (z - \mu_8)^2 - \\ - \sqrt{(\mu_1 - (x - \mu_2)^2 - (y - \mu_3)^2 - (z - \mu_4)^2)^2 + (\mu_5 - (x - \mu_6)^2 - (y - \mu_7)^2 - (z - \mu_8)^2)^2} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\mu_1 = r_1, \mu_2 = v_1^1, \mu_3 = v_2^1, \mu_4 = v_3^1, \mu_5 = r_2, \mu_6 = v_1^2, \mu_7 = v_2^2, \mu_8 = v_3^3.$

Пусть $\widetilde{p} = (\widetilde{v}, \widetilde{\theta})$ — параметры размещения объекта S_{12}, где $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3)$, $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3)$. Тогда уравнение его общего положения в неподвижной системе координат $Oxyz$ по аналогии с (2) примет вид

$$F_{12}(\xi, \mu, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}) = f[A(\xi - \widetilde{v}), \mu] = 0.$$

Заметим, что параметры размещения базовых объектов (объектов нулевого порядка) $S(r_1, v^1)$ и $S(r_2, v^2)$ рассматриваются как метрические параметры пространственной формы сложного объекта S_{12} (объекта первого порядка), описываемого уравнением (7). Конфигурационное пространство объекта S_{12} имеет размерность $m = 14$ и обобщенные координаты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8, \widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3,$ $\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3$. Если ограничиться рассмотрением ориентированных объектов S_{12}, зафиксировав угловые параметры $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3)$, получим соответствующее конфигурационное пространство размерности $m = 11$.

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ УПАКОВКИ И ПОКРЫТИЯ

На значения обобщенных переменных конфигурационных пространств $\Xi(\Omega)$ могут накладываться ограничения. С одной стороны, метрические параметры пространственной формы μ должны принадлежать области допустимых значений D, с другой — сложный объект S_B в ряде задач не должен изменять свою топологическую структуру (связность, число компонент связности, линейную связность границы, гомотопический тип и т.д.). На область допустимых значений обобщенных переменных $g^1, \dots, g^n$ могут накладываться другие дополнительные ограничения, возникающие при решении конкретных задач, например при поиске оптимальных в определенном смысле конфигураций.

Рассмотрим сложный объект S_B, структура которого задается выражением (4). Пусть объект S_i имеет обобщенные переменные g^i в конфигурационном пространстве $\Xi(S_i)$, $i \in J_n$. Тогда точка $g = (g^1, \dots, g^n)$ конфигурационного пространства $\Xi(\Omega)$ задает пространственную конфигурацию (spatial configuration) геометрических объектов $S_i(g^i)$, $i \in J_n$, и определяет в R^3 сложный геометрический объект $S_B(g) = S_B(g^1, \dots, g^n)$. Задавая структуру $S_B(g)$ и многоместные, в частности, бинарные отношения на множестве Ω , можно выделить соответствующие классы пространственных конфигураций. Введем на множестве Ω бинарное отношение непересечения $\{*\}$. Положим, что $S_i * S_j$, если $int\, S_i \cap int\, S_j = \varnothing$, т.е. объекты S_i и S_j не имеют общих внутренних точек.

Совокупность обобщенных переменных $(g^1,\ldots, g^n) \in \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию упаковки (packing configuration) геометрических объектов S_i, $i \in J_n$, если $S_i(g^i) * S_j(g^j)$ для любых $i, j \in J_n$, $i< j$.

Существует класс задач [25–31], в которых геометрические объекты S_i, $i \in J_n$, должны между собой не пересекаться и располагаться внутри некоторой области S_0, которую называют контейнером. Пусть геометрический объект S_0 в конфигурационном пространстве $\Xi(S_0)$ имеет обобщенные переменные g^0. Положим $\bar{S}_0 = cS_0 = R^3 \setminus S_0$. Тогда конфигурация упаковки объектов $\bar{S}_0$, S_i, $i \in J_n$, обеспечивает принадлежность объектов S_i, $i \in J_n$, контейнеру S_0 .

Широкие приложения задач упаковки в контейнер позволяют выделить специальный класс конфигураций размещения. Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$. Совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1,\ldots, g^n) \in \Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию компоновки (layout configuration) геометрических объектов S_0, S_i, $i \in J_n$, если $\bar{S}_0(g^0) * S_j(g^j)$, $S_i(g^i) * S_j(g^j)$ для любых $i, j \in J_n$, $i< j$.

Нетрудно увидеть, что конфигурация компоновки является конфигурацией упаковки, один из объектов которой рассматривается как дополнение к контейнеру. Отличительной особенностью конфигураций компоновки, как правило, является наличие дополнительных условий на минимально и максимально допустимые расстояния между объектами [32–34]. При этом на обобщенные переменные $g^0, g^1,\ldots, g^n$ конфигурационного пространства $\Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ накладываются соответствующие ограничения. Если геометрические объекты S_i, $i \in J_n$, являются твердыми телами заданной массы, можно рассмотреть конфигурацию равновесной упаковки (balanced packing configuration) [35–37]. К этому классу задач относится, в частности, размещение масс вращающихся частей на сбалансированном диске [38, 39].

Заметим, что в работах [25, 40] предложены общие подходы к классификации задач упаковки и компоновки. При этом форма и метрические параметры объектов предполагаются фиксированными. Результаты настоящей статьи позволяют обобщить такие подходы на случай произвольных обобщенных переменных и формализовать новые классы пространственных конфигураций.

Пусть объект S_0 в конфигурационном пространстве $\Xi(S_0)$ имеет обобщенные переменные g^0. Рассмотрим сложный объект $S_B(g^1,\ldots, g^n)$, структура которого задается выражением

$$S_B(g^1,\ldots, g^n) = R^3 \setminus \prod_{i=1}^{n} S_i(g^i) .$$

Сложный объект $S_B(g^1,\ldots, g^n)$ имеет в конфигурационном пространстве $\Xi(\Omega)$ обобщенные координаты g^i, $i \in J_n$. Совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1,\ldots, g^n)$ конфигурационного пространства $\Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию покрытия (covering configuration), если $S_0(g^0) * S_B(g^1,\ldots, g^n)$. При этом геометрический объект S_0 называют областью покрытия, а геометрические объекты $S_i, i \in J_n$, — покрывающими объектами. (Различные постановки задач покрытия приведены, например, в работах [41–45].)

Зададим структуру сложного объекта в виде

$$S_{\widetilde{B}} = \widetilde{B}(S_0, S_1, \ldots, S_n) = S_0 \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right]. \tag{8}$$

Нетрудно увидеть, что совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1, \ldots, g^n)$ конфигурационного пространства $\Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию покрытия области S_0 совокупностью геометрических объектов $S_i, i \in J_n$, если

$$S_0(g^0) \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} S_i(g^i) \right] = S_0(g^0).$$

Преобразуем структуру (8) сложного объекта $\widetilde{S}_B$ и представим ее в виде

$$S_{\widetilde{B}} = \widetilde{B}(S_0, S_1, \ldots, S_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (S_0 \cap S_i).$$

Рассматривая объекты $S_0(g^0), S_i(g^i), i \in J_n$, в виде базовых, сформируем объекты первого порядка: $S_{0i}(g^0, g^i) = S_0(g^0) \setminus S_i(g^i), i \in J_n$. Очевидно, что совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1, \ldots, g^n) \in \Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ будет задавать конфигурацию покрытия, если

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_{0i}(g^0, g^i) = S_0(g^0).$$

Пусть совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1, \ldots, g^n)$ конфигурационного пространства $\Xi(S_0) \times \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию покрытия области S_0 при условии, что покрывающие объекты $S_i, i \in J_n$, образуют конфигурацию упаковки. Такие обобщенные переменные будут задавать конфигурацию разбиения (partitioning configuration). Математическим моделям и методам решения непрерывных задач разбиения множеств посвящены работы [46, 47].

Задачи размещения геометрических объектов при фиксированных значениях обобщенных переменных имеют ярко выраженный дискретный характер. Это позволяет применять для их решения результаты теории евклидовых комбинаторных конфигураций [48–55]. Более того, существует широкий класс непрерывных задач, в которых удается выделить их комбинаторную структуру искусственным расширением пространства обобщенных переменных [56].

Для описания пространственных конфигураций размещения геометрических объектов (упаковки, компоновки, покрытия, разбиения) требуется выбрать обобщенные переменные $g^0, g^1, \ldots, g^n$ соответствующего конфигурационного пространства и сформировать множество их допустимых значений. Характерными ограничениями при этом являются условия непересечения объектов, задаваемые в виде системы уравнений и неравенств. Для формализации соответствующих аналитических зависимостей разработана теория Ф-функции, основные положения которой наиболее полно освещены в работах [13–19]. Однако при этом предполагается, что форма и метрические параметры объектов фиксированы. Для построения Ф-функций сложных геометрических объектов выделены классы базовых и составных 2D и 3D объектов. Аналитически вид Ф-функций базовых объектов приведен в [15–18], а математическое моделирование отношений сложных геометрических объектов строится на основе Ф-функций базовых объектов.

В общем случае исследование пространственных конфигураций требует обобщения понятия Ф-функции с учетом обобщенных переменных геометрических объектов. Рассмотрим параметризованные геометрические объекты $S_1(g^1), S_2(g^2)$, которые имеют обобщенные переменные $g^1=(\mu^1, p^1)$, $g^2=(\mu^2, p^2)$, где $\mu^1=(\mu_1^1,\ldots,\mu_{l_1}^1)$, $\mu^2=(\mu_1^2,\ldots,\mu_{l_2}^2)$, $p^1=(p_1^1,\ldots,p_\alpha^1)$, $p^2=(p_1^2,\ldots,p_\alpha^2)$. Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(S_1)\times\Xi(S_2)$. Пусть $D_1\subseteq R^{l_1}$ и $D_2\subseteq R^{l_2}$ являются областями определения метрических параметров μ^1 и μ^2 соответственно.

Определение 1. Непрерывную, определенную всюду на $R^{2\alpha}\times D_1\times D_2$ функцию $\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)$ назовем обобщенной Ф-функцией геометрических объектов S_1 и S_2 с обобщенными переменными $g^1=(\mu^1, p^1)$, $g^2=(\mu^2, p^2)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)>0, \text{ если } cl\,S_1(g^1)\cap cl\,S_2(g^2)=\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)=0, \text{ если } int\,S_1(g^1)\cap int\,S_2(g^2)=\varnothing,$$

$$fr\,S_1(g^1)\cap fr\,S_2(g^2)\neq\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)<0, \text{ если } int\,S_1(g^1)\cap int\,S_2(g^2)\neq\varnothing.$$

Определение 2. Обобщенную Ф-функцию назовем нормализованной, если ее значение при любых фиксированных метрических параметрах $\hat{\mu}^1\in D_1$ и $\hat{\mu}^2\in D_2$ равно евклидовому расстоянию между объектами $S_1(g^1)$ и $S_2(g^2)$ при условии, что $(g^1, g^2)\in\widetilde{G}$, где $g^1=(\hat{\mu}^1, p^1)$, $g^2=(\hat{\mu}^2, p^2)$, а $\widetilde{G}=\{(g^1, g^2)|\, int\,S_1(g^1)\cap$ $\cap\, int\,S_2(g^2)=\varnothing\}$.

Анализ существующих методов построения Ф-функции базовых 2D и 3D объектов при фиксированных метрических параметрах, как правило, позволяет распространить эти результаты на случай расширения конфигурационного пространства геометрических объектов. Однако этот вопрос подлежит дальнейшему исследованию, поскольку требуется сформировать дополнительные ограничения на обобщенные переменные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты позволили отнести понятие конфигурационного пространства на широкий класс систем, в которых обобщенными переменными являются различные параметры геометрических объектов. Интегрированы исследования конфигурационных пространств в различных направлениях динамики твердых тел с общими подходами теории математического моделирования геометрических объектов. Рассмотрены конфигурационные пространства различных классов задач размещения геометрических объектов, в том числе задач упаковки и покрытия. Наличие обобщенных переменных конфигурационных пространств в задачах размещения естественно позволяет поставить задачу поиска оптимальных конфигураций. При этом вопросы описания области допустимых значений обобщенных переменных, рассмотренные в настоящей статье, приобретают особо важное значение. Перспективными представляются дальнейшие исследования способов формализации геометрических ограничений и разработки методов поиска оптимальных конфигураций для различных классов задач упаковки и покрытия областей сложной формы в соответствующих конфигурационных пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grunbaum B. Configurations of points and lines. *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society. Providence. Rhode Island, 2009. Vol. 103. 404 p.
2. Pisanski T., Servatius B. Configurations from a graphical viewpoint. *Combinatorial Configurations*. Boston: Birkhauser, 2013. P. 157–191.
3. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of combinatorial designs. Second edition. CRC Press, 2010. 784 p.
4. Gropp H. Configurations between geometry and combinatorics. *Discrete Applied Mathematics.* 2004. Vol. 138, N 1. P. 79–88.
5. Berge C. Principes de combinatoire. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
6. Ryser H.J. Combinatorial configurations. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1969. Vol. 17, N 3. P. 593–602.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва.: Наука, 1989. 472 с.
8. Solla S.A., Sorkin G.B., White S.R. Configuration space analysis for optimization problems. *Disordered Systems and Biological Organization,* Bienenstock E. et al. (Eds.). Berlin; Heidelberg: Springer, 1986. P. 283–293.
9. Fadell E., Neuwirth L. Configuration space. *Math. Scand.* 1962. Vol. 10. P. 111–118.
10. Westerland C. Configuration spaces in geometry and topology. *Australian Mathematical Society Gazette.* 2011. Vol. 38, N 5. P. 279–283.
11. Fadell E.R., Husseini S.Y. Geometry and topology of configuration spaces. *Springer Monographs in Mathematics*, 2001. 313 p.
12. Cohen F.R., Gitler S. On loop spaces of configuration spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol**.** 354, N 5. P. 1705–1748.
13. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. *Advances in CAD/CAM.* Proceedings of PROLAMAT82. Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North–Holland, Amsterdam. The Netherlands, 2003.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
15. Stoyan Y., Gil M., Terno J., Romanova T., Schithauer G. Ф-function for complex 2D objects. *4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies.* 2004. Vol. 2, N 1. P. 69–84.
16. Stoyan Yu., Scheithauer G., Romanova T. Mathematical modeling of interaction of primary geometric 3D objects**.** *Cybernetics and System Analysis*. 2005. Vol. 41, N 3. P. 332–342.
17. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation: Two- and three-dimensional problems and applications. *Modeling and Optimization in Space Engineering*, Fasano G., Pintér J. (Eds.). New York: Springer. 2013. Vol. 73. P. 363–388.
18. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y. G., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems. *J. Annals of Operations Research.* Publisher Springer Netherlands. 2010. Vol. 179, N 1. P. 343–368.
19. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications.* 2010. Vol. 43, N 5. P. 535–553.
20. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Optimized Packings with Applications.* Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). New York: Springer. 2015. Vol. 105, P. 265–293.
21. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Placement problems for irregular objects: Mathematical modeling, optimization and applications. *Optimization Methods and Applications.* Butenko S. et al. (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 521–558.
22. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
23. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Optimization Methods and Applications.* Butenko S. et al. (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 239–250.
24. Sergienko I.V., Hulianytskyi L.F., Sirenko S.I. Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and System Analysis*. 2009. Vol. 45, N 5. P. 732–744.
25. Bortfeldt A., Wäscher G. Constraints in container loading: A state of the art review. *European Journal of Operational Research*. 2013. Vol. 229, N 1. P. 1–20.

26. Fasano G. A modeling-based approach for non-standard packing problems. *Optimized Packings with Applications.* Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). New York: Springer. 2015. Vol. 105. P. 67–85.
27. Hifi M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: Model and methodologies. *Advances in Optimization Research.* 2009. Vol. 2009. P. 1–22.
28. Birgin E.G., Martinez J.M., Nishihara F.H., Ronconi D.P. Orthogonal packing of rectagular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization. *Comput. Oper. Res.* 2006. Vol. 33. P. 3535–3548.
29. Egeblad J., Nielsen B.K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polyhedral. *Comp. Geom.* 2009. Vol. 142, N 4. P. 269–288.
30. Fasano G.A. Global optimization point of view for non-standard packing problems*.* *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 155, N 2. P. 279–299.
31. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and packing problems for irregular objects with continuous rotations: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Journal of Operational Research Society*. 2016. Vol. 167, N 5. P. 786–800.
32. Drira A., Pierreval H., Hajri–Gabouj S. Facility layout problems: A survey. *Annual Reviews in Control.* 2007. Vol. 31, N 2. P. 255–267.
33. Fadel G.M., Wiecek M.M. Packing optimization of free-form objects in engineering design. *Optimized Packings with Applications.* Fasano G., Pintér J. (Eds.). New York: Springer. 2015. Vol. 105. P. 37–66.
34. Stoyan Yu.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Optimization of 3d objects layout into a multiply connected domain with account for shortest distances. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 3. P. 374–385.
35. Zhi-Guo Sun, Hong-Fei Teng. Optimal layout design of a satellite module. *Engineering Optimization*. 2003. Vol. 35, N 5. P. 513–529.
36. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies.* Fasano G., Pintér J. (Eds.). New York: Springer. 2016. Vol. 114. P. 369–400.
37. Yi-Chun Xu, Ren-Bin Xiao, Amos M. A novel genetic algorithm for the layout optimization problem. *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2007),* 2007. P. 3938–3942.
38. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie.* 1982. N 2. P. 4–5.
39. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R_n. *Cybernetics and System Analysis.* 1991. Vol. 27, N 4. P. 561–567.
40. Bortfeldt A., Wascher G. Constraints in container loading: A state of the art review. *European Journal of Operational Research.* 2013. Vol. 229, N 1. P. 1–20.
41. Stoyan Yu.G., Patsuk V.M. Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres. *International Journal of Computer Mathematics*. 2014. Vol. 91, N 9. P. 2010–2020.
42. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica.* 1989. Vol. 53, N 3. P. 253–262.
43. Gerasin S.N., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V. Set coverings and tolerance relations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2008. Vol. 44, N 3. P. 333–340.
44. Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Autom. Remote Control.* 1989. Vol. 50, N 5. P. 705–710.
45. Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 3. P. 421–437.
46. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи. Киев: Наук. думка, 2013. 604 с.
47. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51, N 3. P. 325–335.
48. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков: Константа, 2017. 404 с.
49. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Optimization Methods and Applications*. Butenko S. et al. (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 567–584.
50. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930.
51. Yakovlev S.V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics.* 1989. Vol. 25, N 3. P. 385–391.

52. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. Vol. 29, N 5. P. 727–734.
53. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2001. 53(9). P. 1535–1545.
54. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral–spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 1. P. 99–109.
55. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications. *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON).* 2017. P. 1167–1175.
56. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731.

Надійшла до редакції 12.02.2018

Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев

КОНФІГУРАЦІЙНИЙ ПРОСТІР ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Анотація. Уведено поняття конфігураційного простору геометричних об'єктів, узагальненими змінними якого є метричні параметри просторової форми і параметри розміщення об'єктів. Розглянуто властивості конфігураційних просторів складних геометричних об'єктів. Досліджено структури конфігураційних просторів для різних класів задач розміщення геометричних об'єктів, зокрема задач пакування, компонування і покриття. Узагальнено поняття Ф-функції геометричних об'єктів зі змінними метричними параметрами.

Ключові слова: геометричний об'єкт, конфігураційний простір, узагальнені змінні, компонування, пакування, покриття.

Y.G. Stoyan, S.V. Yakovlev

THE CONFIGURATION SPACE OF GEOMETRIC OBJECTS

Abstract. The concept of a configuration space of geometric objects is introduced. Its generalized variables are the metric parameters of the spatial form and the parameters of the location of objects. The properties of configuration spaces of complex geometric objects are considered. The structures of configuration spaces for various classes of geometric object placement problems, including packing and covering problems, are analyzed. The concept of Ф-function of geometric objects with variable metrical parameters is generalized.

Keywords: geometric object, configuration space, generalized variables, layout, packing and covering problems.

Стоян Юрий Григорьевич,
член-кор. НАН Украины, профессор, заведующий отделом Института проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, e-mail: svsyak7@gmail.com.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», e-mail: svsyak7@gmail.com.