УДК 519.6

Н.В. МАЙКО

СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Аннотация. Изучена конечно-разностная схема повышенного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевым условием Дирихле. Получены оценки точности приближенного решения, учитывающие влияние краевого условия. Показано, что точность схемы выше в приграничных узлах сеточного множества и повышение порядка аппроксимации не влияет на эффект от краевого условия.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевое условие Дирихле, разностная схема, девятиточечный шаблон, разностный оператор, оценка точности, краевой эффект.

ВВЕДЕНИЕ

При решении краевых и начально-краевых задач конечно-разностным методом замечено [1], что точность приближенного решения выше вблизи той части границы области, где задано краевое условие Дирихле. Количественной характеристикой указанного наблюдения являются оценки скорости сходимости схемы, которые учитывают влияние краевого условия. Такие оценки получены в ряде публикаций (например, [2–5]).

В настоящей статье рассмотрена стандартная схема повышенного порядка аппроксимации на девятиточечном шаблоне для двумерного уравнения Пуассона с краевым условием Дирихле на сторонах прямоугольника. К решению уравнения Пуассона сводятся, как известно, важные классы прикладных задач, одной из которых является задача о кручении призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением. С использованием разностного аналога этой задачи и теоремы сравнения получена априорная оценка точности метода с учетом краевого эффекта.

Аналогичная схема рассмотрена в [6], где с применением иного подхода получена оценка для погрешности в норме с весом.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \Delta u = -f(x),\ x \in D, \\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ — прямоугольник, $\Gamma = \partial D$ — граница прямоугольника D.

Введем сеточные множества

$$\omega_\alpha = \{ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1 \},$$

$$h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ N_\alpha \ge 2 \text{ — целое},$$

$$\omega_\alpha^+ = \omega_\alpha \cup \{l_\alpha\},\ \omega_\alpha^- = \omega_\alpha \cup \{0\},\ \overline{\omega}_\alpha = \omega_\alpha \cup \{0\} \cup \{l_\alpha\},\ \alpha = 1,2,$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2,\ \gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$$

и используем стандартные обозначения из работы [7].

Аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$\Lambda y(x)+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2\, y(x)=-T_1T_2 f(x),\ \ x\in\omega,$$
$$y(x)=0,\ \ x\in\gamma, \tag{2}$$

где $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_\alpha y=y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $x\in\omega$, $\alpha=1,2$, $T=T_1T_2$ — усредняющий оператор [8],

$$T_1 v(x)=\frac{1}{h_1^2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}(h_1-|x_1-\xi|)v(\xi,x_2)d\xi,\ \ x\in\omega,$$

$$T_2 v(x)=\frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)v(x_1,\xi)d\xi,\ \ x\in\omega.$$

Для погрешности $z(x)=y(x)-u(x)$ имеем задачу

$$\Lambda z(x)+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2\, z(x)=-\psi(x),\ \ x\in\omega,$$
$$z(x)=0,\ \ x\in\gamma, \tag{3}$$

где $\psi(x)$ — погрешность аппроксимации:

$$\psi=\Lambda u+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2 u+T_1T_2 f=$$

$$=\Lambda_1 u+\Lambda_2 u+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2 u-\Lambda_1(T_2u)-\Lambda_2(T_1u)=$$

$$=\Lambda_1\left(u-T_2u+\frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 u\right)+\Lambda_2\left(u-T_1u+\frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 u\right)=\Lambda_1\eta_1+\Lambda_2\eta_2,$$

$$\eta_\alpha(x)=u(x)-T_{3-\alpha}u(x)+\frac{h_{3-\alpha}^2}{12}\Lambda_{3-\alpha}u(x),\ \ x\in\omega\ \ (\alpha=1,2).$$

Здесь используется соотношение $\Lambda_1(T_2u)+\Lambda_2(T_1u)=-Tf(x)$, полученное в результате применения оператора $T=T_1T_2$ к уравнению задачи (1) в узлах $x\in\omega$ с учетом формулы $T_\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(x)=u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $x\in\omega$ $(\alpha=1,2)$.

На множестве $\overset{0}{H}_h$ сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ, определим скалярное произведение

$$(y,v)=\sum_{x\in\omega}h_1h_2\,y(x)v(x)$$

и норму

$$\|v\|=\|v\|_{L_2(\omega)}=\sqrt{(v,v)}=\left(\sum_{x\in\omega}h_1h_2 v^2(x)\right)^{1/2}.$$

Используем также обозначение

$$\|v\|_{C(\omega)}=\max_{x\in\omega}|v(x)|.$$

СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ

Известно (см., например, [7]), что одномерная спектральная задача

$$\Lambda_\alpha w^{(\alpha)}(x_\alpha)+\lambda^{(\alpha)}w^{(\alpha)}(x_\alpha)=0,\ x_\alpha\in\omega_\alpha,$$
$$w^{(\alpha)}(0)=w^{(\alpha)}(l_\alpha)=0 \tag{4}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}=\frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{k_\alpha\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ k_\alpha=1,\ldots,N_\alpha-1,$$

и соответствующие им собственные функции

$$w_{k_\alpha}^{(\alpha)}=w_{k_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha)=\sqrt{\frac{2}{l_\alpha}}\sin\frac{k_\alpha\pi x_\alpha}{l_\alpha},\quad \sum_{x_\alpha\in\omega_\alpha}h_\alpha(w_{k_\alpha}^{(\alpha)}(x_\alpha))^2=1,$$

$$k_\alpha=1,\ldots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2.$$

Собственные значения $\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1^{(\alpha)}<\lambda_2^{(\alpha)}<\ldots<\lambda_{N_\alpha-1}^{(\alpha)},$$

$$\lambda_1^{(\alpha)}=\frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\ge\frac{8}{l_\alpha^2},\ \lambda_{N_\alpha-1}^{(\alpha)}=\frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{(N_\alpha-1)\pi h_\alpha}{2l_\alpha}=\frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\le\frac{4}{h_\alpha^2},$$

$$\frac{4k_\alpha^2}{l_\alpha^2}\le\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}\le\frac{4}{h_\alpha^2},\ k_\alpha=1,\ldots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2.$$

Напомним, что двумерная спектральная задача

$$\Lambda w(x)+\lambda w(x)=0,\ x\in\omega,$$
$$w(x)=0,\ x\in\gamma, \tag{5}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{k_1k_2}=\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)}=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}$$

и соответствующие им собственные функции

$$w_{k_1k_2}(x)=w_{k_1}^{(1)}(x_1)w_{k_2}^{(2)}(x_2)=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sin\frac{k_1\pi x_1}{l_1}\sin\frac{k_2\pi x_2}{l_2},\ ||w_{k_1k_2}||=1,$$

$$k_\alpha=1,\ldots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2.$$

Отметим, что для функций $w_{k_1k_2}$ выполняются соотношения

$$\Lambda_\alpha w_{k_1k_2}=\Lambda_\alpha(w_{k_\alpha}^{(\alpha)}w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)})=w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)}\Lambda_\alpha(w_{k_\alpha}^{(\alpha)})=$$

$$=w_{k_{3-\alpha}}^{(3-\alpha)}(-\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}w_{k_\alpha}^{(\alpha)})=-\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}w_{k_1k_2},\ \alpha=1,2;$$

$$\Lambda_1\Lambda_2w_{k_1k_2}=\Lambda_1\Lambda_2(w_{k_1}^{(1)}w_{k_2}^{(2)})=\Lambda_1(-w_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}w_{k_2}^{(2)})=$$

$$=\lambda_{k_1}^{(1)}w_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}w_{k_2}^{(2)}=\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}w_{k_1k_2}.$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу

$$\begin{gathered}\Lambda v(x)+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2 v(x)=-1,\ x\in\omega;\\ v(x)=0,\ x\in\gamma.\end{gathered}\tag{6}$$

Введем разностный оператор

$$A=A_1+A_2-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}A_1A_2,\ \text{где}\ A_\alpha y=-\Lambda_\alpha y,\ A_\alpha:\overset{0}{H}_h\to\overset{0}{H}_h,\ \alpha=1,2.$$

Лемма 1. Оператор A самосопряжен и положительно определен в $\overset{0}{H}_h$. Для него выполняются оценки

$$\frac{2}{3}(A_1+A_2)\le A\le A_1+A_2.$$

Доказательство. Операторы A_1 и A_2 самосопряжены: $A_\alpha^*=A_\alpha$, поскольку

$$(A_\alpha y,v)=(-y_{x_\alpha\bar{x}_\alpha},v)=(y,-v_{x_\alpha\bar{x}_\alpha})=(y,A_\alpha v)\ \ \forall\, y,v\in\overset{0}{H}_h\ \ (\alpha=1,2);$$

перестановочны: $A_1A_2=A_2A_1$, поскольку

$$A_1A_2\,y=(y_{\bar{x}_2x_2})_{\bar{x}_1x_1}=(y_{\bar{x}_1x_1})_{\bar{x}_2x_2}=A_2A_1\,y\ \ \forall\, y\in\overset{0}{H}_h;$$

удовлетворяют неравенствам [7]

$$(A_\alpha y,y)\le\lambda_{N_\alpha-1}^{(\alpha)}\|y\|^2=\frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\|y\|^2\ \le\frac{4}{h_\alpha^2}\|y\|^2\ \ \forall\, y\in\overset{0}{H}_h,$$

$$(A_\alpha y,y)\ge\lambda_1^{(\alpha)}\|y\|^2=\frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}\|y\|^2\ge\frac{8}{l_\alpha^2}\|y\|^2\ \ \forall\, y\in\overset{0}{H}_h,$$

т.е. $\frac{8}{l_\alpha^2}I\le A_\alpha\le\frac{4}{h_\alpha^2}I$ $(\alpha=1,2)$, I — тождественный оператор. Отсюда, в частности, следует положительная определенность операторов A_1, A_2.

Тогда оператор A_1A_2 самосопряжен: $(A_1A_2)^*=A_1A_2$, поскольку

$$(A_1A_2)^*=A_2^*A_1^*=A_2A_1=A_1A_2;$$

положительно определен: $A_1A_2\ge\frac{64}{l_1^2l_2^2}E$, поскольку

$$(A_1A_2\,y,y)=(A_1A_2^{1/2}A_2^{1/2}y,y)=(A_2^{1/2}A_1A_2^{1/2}y,y)=(A_1A_2^{1/2}y,A_2^{1/2}y)\ge$$

$$\ge\frac{8}{l_1^2}(A_2^{1/2}y,A_2^{1/2}y)=\frac{8}{l_1^2}(A_2y,y)\ge\frac{8}{l_1^2}\cdot\frac{8}{l_2^2}\|y\|^2\ \ \forall\, y\in\overset{0}{H}_h.$$

Отсюда следует самосопряженность и положительная определенность операторов A_1+A_2 и A, а также неравенство $A\le A_1+A_2$.

Докажем теперь оценку $\frac{2}{3}(A_1+A_2)\le A$:

$$A=A_1+A_2-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}A_1A_2=A_1\left(E-\frac{h_2^2}{12}A_2\right)+A_2\left(E-\frac{h_1^2}{12}A_1\right)\ge$$

$$\ge A_1\left(E-\frac{h_2^2}{12}\frac{4}{h_2^2}E\right)+A_2\left(E-\frac{h_1^2}{12}\frac{4}{h_1^2}E\right)=\frac{2}{3}(A_1+A_2).$$

Отсюда следует самосопряженность и положительная определенность оператора A. $\boxdot$

Из доказанной леммы 1 следует однозначная разрешимость задачи (2).

Решение $v(x)$ задачи (6) ищем в виде

$$v(x)=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_1k_2} w_{k_1k_2}(x). \tag{7}$$

Очевидно, что $v(x)=0$ при $x\in\gamma$. Из принципа максимума [7] следует, что $v(x)\ge 0\ \forall x\in\overline{\omega}$. Для отыскания коэффициентов $v_{k_1k_2}$ используем представление

$$1=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_1k_2} w_{k_1k_2}(x), \tag{8}$$

где

$$c_{k_1k_2}=(1,w_{k_1k_2})=\sum_{x\in\omega} h_1h_2 w_{k_1k_2}(x)=\sum_{x\in\omega} h_1h_2\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sin\frac{k_1\pi x_1}{l_1}\sin\frac{k_2\pi x_2}{l_2}=$$

$$=\frac{2h_1h_2}{\sqrt{l_1l_2}}\sum_{i=1}^{N_1-1}\sin\frac{k_1\pi i h_1}{l_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}\sin\frac{k_2\pi j h_2}{l_2}=$$

$$=\frac{2h_1h_2}{\sqrt{l_1l_2}}\frac{\sin\frac{(N_1-1)k_1\pi h_1}{2l_1}\sin\frac{N_1k_1\pi h_1}{2l_1}}{\sin\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}}\frac{\sin\frac{(N_2-1)k_2\pi h_2}{2l_2}\sin\frac{N_2k_2\pi h_2}{2l_2}}{\sin\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}=$$

$$=\frac{2h_1h_2}{\sqrt{l_1l_2}}\frac{\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}-\cos\left(\frac{N_1k_1\pi h_1}{l_1}-\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\right)}{2\sin\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}}\frac{\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}-\cos\left(\frac{N_2k_2\pi h_2}{l_2}-\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}\right)}{2\sin\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}=$$

$$=\frac{2h_1h_2}{\sqrt{l_1l_2}}\frac{\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}-(-1)^{k_1}\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}}{h_1\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}}\frac{\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}-(-1)^{k_2}\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{h_2\sqrt{\lambda_{k_2}^{(2)}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\frac{(1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2})\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}}$$

(использована формула $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$, $\theta\notin\{2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\}$, $n\in\mathbb{N}$).

Подставляя суммы (7) и (8) в уравнение задачи (6), имеем

$$\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\left[\left(-\lambda_{k_1k_2}+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}\right)v_{k_1k_2}+c_{k_1k_2}\right]w_{k_1k_2}(x)=0,\ x\in\omega.$$

Отсюда получаем

$$v_{k_1k_2}=\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}},\ k_\alpha=1,\dots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2,$$

поскольку

$$\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}=\lambda_{k_1}^{(1)}\left(1-\frac{h_2^2}{12}\lambda_{k_2}^{(2)}\right)+\lambda_{k_2}^{(2)}\left(1-\frac{h_1^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\right)\geq$$

$$\geq\lambda_{k_1}^{(1)}\left(1-\frac{h_2^2}{12}\frac{4}{h_2^2}\right)+\lambda_{k_2}^{(2)}\left(1-\frac{h_1^2}{12}\frac{4}{h_2^2}\right)=\frac{2}{3}(\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)})>0.$$

Таким образом,

$$v(x)=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{c_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}w_{k_1k_2}(x),\ x\in\overline{\omega},\tag{9}$$

где $\lambda_{k_1}^{(1)},\ \lambda_{k_2}^{(2)},\ w_{k_1k_2}(x), \lambda_{k_1k_2},\ c_{k_1k_2}$ определены в (4), (5) и (8).

Исследуем свойства функции $v(x)$.

Лемма 2. Для функции $v(x)$ выполняются неравенства

$$v(x)\leq\frac{l_1l_2\pi^4}{48}=\text{const},\ x\in\omega;$$

$$v(x_1,x_2)\leq M_1|h|,\ x_\alpha\in\{h_\alpha,\ l_\alpha-h_\alpha\},\ x_{3-\alpha}\in\omega_{3-\alpha}\ \ (\alpha=1,2);\tag{10}$$

$$v(x_1,x_2)\leq M_2|h|^2\ln\frac{M_3}{|h|},\ x_\alpha\in\{h_\alpha,\ l_\alpha-h_\alpha\}\ (\alpha=1,2),$$

где постоянные $M_1,M_2,\ M_3$ не зависят от $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$. Оценка (10) не улучшаема по $|h|$.

Доказательство. Учитывая неравенство $\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)}\geq 2\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}$ и оценки

$$\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}\geq\frac{2}{3}(\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)}),\ \lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}\geq\frac{4k_\alpha^2}{l_\alpha^2},\ k_\alpha=1,\dots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2,$$

для всех $x\in\omega$ имеем

$$v(x)=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}(1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2})\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\left(\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}\right)}\times$$

$$\times\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sin\frac{k_1\pi x_1}{l_1}\sin\frac{k_2\pi x_2}{l_2}\leq$$

$$\le \sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\cdot 2\cdot 2}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\,\frac{2}{3}(\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)})}\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}=\frac{24}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\,(\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)})}\le$$

$$\le \frac{24}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\,2\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\sqrt{\lambda_{k_2}^{(2)}}}=$$

$$=\frac{12}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\le \frac{12}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\frac{4k_1^2}{l_1^2}\frac{4k_2^2}{l_2^2}}=$$

$$=\frac{3l_1 l_2}{4}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\frac{1}{k_1^2}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{k_2^2}\le \frac{3l_1 l_2}{4}\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{1}{k_2^2}=\frac{3l_1 l_2}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2=\frac{l_1 l_2\pi^4}{48}=\mathrm{const}.$$

Рассмотрим теперь $v(x)$ в приграничных узлах вблизи сторон прямоугольника D:

$$(h_1, x_2),\ (l_1-h_1, x_2),\ x_2\in\omega_2;\ (x_1, h_2),\ (x_1, l_2-h_2),\ x_1\in\omega_1.$$

Например, для (h_1, x_2), $x_2\in\omega_2$, имеем

$$v(h_1,x_2)=\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}(1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2})\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\cos\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\left(\lambda_{k_1k_2}-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}\right)}\times$$

$$\times\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\sin\frac{k_1\pi h_1}{l_1}\sin\frac{k_2\pi x_2}{l_2}\le$$

$$\le\frac{16}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}\,\frac{2}{3}(\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)})}\sin\frac{k_1\pi h_1}{l_1}=$$

$$=\frac{16}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{2\sin\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\cos\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}}{\frac{2}{h_1}\sin\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}\,\frac{2}{h_2}\sin\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}\,\frac{2}{3}\left(\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}\right)}=$$

$$=h_1\frac{24}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\frac{2}{h_2}\sin\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}\left(\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{k_2\pi h_2}{2l_2}\right)}\le$$

$$\le h_1\frac{24}{l_1 l_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{\frac{2k_2}{l_2}\left(\frac{4k_1^2}{l_1^2}+\frac{4k_2^2}{l_2^2}\right)}<h_1 3l_1\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\frac{1}{k_2}\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2+\left(\frac{k_2 l_1}{l_2}\right)^2}=$$

$$= h_1 3 l_1 \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2} \frac{\frac{\pi k_2 l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2} - 1}{2\left(\frac{k_2 l_1}{l_2}\right)^2} = h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left(\frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2}}{k_2^2} - \frac{1}{k_2^3} \right) <$$

$$< h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2}}{k_2^2} - \frac{1}{k_2^3} \right) =$$

$$= h_1 \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \left(\frac{\pi l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} - \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^3} \right) = M_1 h_1 < M_1 |h|,$$

где $M_1 = \frac{3}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \left(\frac{l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \frac{\pi^3}{6} - \zeta(3) \right)$, ζ — дзета-функция Римана.

Установим теперь оценку для $v(x)$ вблизи угловых точек прямоугольника D. Например, в узле (h_1, h_2) имеем

$$v(h_1, h_2) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} (1-(-1)^{k_1})(1-(-1)^{k_2}) \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}} \left(\lambda_{k_1 k_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)} \right)} \times$$

$$\times \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{l_2} \le$$

$$\le \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(2)}} \frac{2}{3} (\lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)})} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{l_2} =$$

$$= \frac{16}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{2 \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} \cos \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} 2 \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2} \cos \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2}}{\frac{2}{h_1} \sin \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} \frac{2}{h_2} \sin \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2} \frac{2}{3} \left(\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2} \right)} \le$$

$$\le h_1 h_2 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2 l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2 l_2}} \le$$

$$\le h_1 h_2 \frac{24}{l_1 l_2} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{\frac{4 k_1^2}{l_1^2} + \frac{4 k_2^2}{l_2^2}} < h_1 h_2 \frac{6 l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 + \left(\frac{k_2 l_1}{l_2} \right)^2} =$$

$$= h_1 h_2 \frac{6l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{\frac{\pi k_2 l_1}{l_2} \operatorname{cth} \frac{\pi k_2 l_1}{l_2} - 1}{2\left(\frac{k_2 l_1}{l_2}\right)^2} < h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{1}{k_2} \le$$

$$\le h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \left(1 + \int_1^{N_2} \frac{dx}{x} \right) = h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} (1 + \ln N_2) = h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{el_2}{h_2} =$$

$$= h_1 h_2 3\pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{el_2 \sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le$$

$$\le (h_1^2 + h_2^2) \frac{3}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2} \ln \frac{el_2 \sqrt{6}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = M_2 |h|^2 \ln \frac{M_3}{|h|},$$

где $M_2 = \frac{3}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{\pi l_1}{l_2}$, $M_3 = \sqrt{6} el_2$.

Исследуем теперь неулучшаемость оценки для $v(x)$ в угловых узлах сетки ω. Рассмотрим, например, узел (h_1, h_2). Обозначим $U(x)$ решение задачи при $f(x) \equiv 1$ (задача о кручении призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением D):

$$\Delta U(x) = -1, \quad x \in D,$$

$$U(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Известно [9, с. 683], что в окрестности вершины (0,0) функцию $U(x)$ можно представить в виде

$$U(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1 x_2}{\pi} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1 x_2} + w(x_1, x_2), \quad (11)$$

где $w(x_1, x_2)$ — регулярная функции в окрестности точки $(0, 0)$.

Применив теоремы 3.1 и 8.1 из [10], получим, что функция $w(x)$ не влияет на поведение функции $U(x)$ в окрестности вершины (0,0). Это означает, что оценка для функции $v(x)$ в окрестности точки (0,0) не улучшаема и определяется первыми двумя слагаемыми формулы (11).

Аналогичные рассуждения можно применить для каждой из трех других вершин прямоугольника D, принимая ее за начало координат и выполняя надлежащую линейную замену переменных. $\boxdot$

Лемма 3. Пусть $F(x)$ — произвольная сеточная функция, заданная на ω, а шаги h_1 и h_2 удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \sqrt{5}. \quad (12)$$

Тогда для решения $Y(x)$ задачи

$$\Lambda Y(x) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 Y(x) = -F(x), \quad x \in \omega,$$
$$Y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad (13)$$

справедлива оценка

$$|Y(x)| \le v(x)\,||F||_{C(\omega)}, \quad x \in \omega, \tag{14}$$

где функция $v(x)$ определена в (9).

Доказательство. Перепишем задачу (13) в виде

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)Y(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)(Y(x_1+h_1,x_2)+Y(x_1-h_1,x_2))+$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)(Y(x_1,x_2+h_2)+Y(x_1,x_2-h_2))+$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)(Y(x_1+h_1,x_2+h_2)+Y(x_1-h_1,x_2+h_2)+$$

$$+Y(x_1+h_1,x_2-h_2)+Y(x_1-h_1,x_2-h_2))+F(x), \quad x \in \omega,$$

$$Y(x)=0, \quad x \in \gamma.$$

Отсюда при условии $\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \sqrt{5}$ по теореме сравнения [7] получим оценку (14). ⊡

Заметим, что в случае квадратной сетки $(h_1 = h_2)$ условие (12) выполняется.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА

Исследуем скорость сходимости построенной разностной схемы в сеточной метрике $C(\omega)$ в случае принадлежности решения исходной дифференциальной задачи класса $W_\infty^m(D)$, $2 < m \le 6$.

Теорема 1. Пусть решение $u(x_1, x_2)$ задачи (1) удовлетворяет условию $\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2}, \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \in L_\infty(D)$. Тогда при $\frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \sqrt{5}$ точность разностной схемы (2) характеризуется оценкой

$$|z(x)| \le M v(x)\,||u||_{W_\infty^6(D)}\,|h|^4, \quad x \in \omega, \tag{15}$$

где M — постоянная, не зависящая от $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, а для функции $v(x)$ выполняются соотношения $v(x) = O(|h|)$ и $v(x) = O\left(|h|^2 \ln \frac{1}{|h|}\right)$ вблизи сторон и вершин прямоугольника D соответственно.

Доказательство. Применяя лемму 3 к задаче (3) при $F = \psi$, получаем оценку

$$|z(x)| \le v(x)\,||\psi||_{C(\omega)}, \quad x \in \omega. \tag{16}$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации $\psi(x)$. Слагаемое $\eta_1(x)$ имеет представление:

$$\eta_1(x) = u(x) - T_2 u(x) + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 u(x) =$$

$$= \frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2 - |x_2 - \xi|)\left(u(x_1,x_2) - u(x_1,\xi) + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 u(x_1,\xi)}{\partial \xi^2}\right)d\xi =$$

$$
=\frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\left(-\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}(\xi-x_2)-\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}(\xi-x_2)^2-\right.
$$

$$
-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^3}(\xi-x_2)^3-\frac{1}{3!}\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)^3\frac{\partial^4 u(x_1,\xi_1)}{\partial \xi_1^4}d\xi_1+
$$

$$
\left.+\frac{h_2^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^3}(\xi-x_2)+\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)\frac{\partial^4 u(x_1,\xi_1)}{\partial \xi_1^4}d\xi_1\right)\right)d\xi.
$$

Учитывая соотношения

$$
\frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)(\xi-x_2)d\xi=0,\ \frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)(\xi-x_2)^3\,d\xi=0,
$$

$$
\frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)(\xi-x_2)^2\,d\xi=\frac{h_2^2}{6},
$$

получаем

$$
\eta_1(x)=-\frac{1}{6h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)^3\frac{\partial^4 u(x_1,\xi_1)}{\partial \xi_1^4}d\xi_1+
$$

$$
+\frac{1}{12h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)\frac{\partial^4 u(x_1,\xi_1)}{\partial \xi_1^4}d\xi_1.
$$

Отсюда следует представление

$$
\Lambda_1\eta_1(x)=
$$

$$
=-\frac{1}{6h_1^2h_2^2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}(h_1-|x_1-\xi_2|)d\xi_2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)^3\frac{\partial^6 u(\xi_2,\xi_1)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_1^4}d\xi_1+
$$

$$
+\frac{1}{12h_1^2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}(h_1-|x_1-\xi_2|)d\xi_2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)\frac{\partial^6 u(\xi_2,\xi_1)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_1^4}d\xi_1,\ x\in\omega.
$$

Тогда

$$
|\Lambda_1\eta_1(x)|\le\left(\frac{1}{6h_1^2h_2^2}h_1^2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\left|\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)^3\,d\xi_1\right|+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{12h_1^2}h_1^2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\left|\int\limits_{x_2}^{\xi}(\xi-\xi_1)d\xi_1\right|\right)\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}\right\|_{L_\infty(D)}=
$$

$$
=\left(\frac{1}{6h_1^2h_2^2}h_1^2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\frac{(x_2-\xi)^4}{4}d\xi+\right. \tag{17}
$$

$$+\frac{1}{12h_1^2}h_1^2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\frac{(x_2-\xi)^2}{2}d\xi\Bigg)\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}\right\|_{L_\infty(D)}=$$

$$=\left(\frac{1}{6h_1^2h_2^2}h_1^2\frac{h_2^6}{60}+\frac{1}{12h_1^2}h_1^2\frac{h_2^4}{12}\right)\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}\right\|_{L_\infty(D)}=\frac{7}{720}h_2^4\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}\right\|_{L_\infty(D)},\ x\in\omega.$$

Аналогично получаем оценку

$$|\Lambda_2\eta_2(x)|\le\frac{7}{720}h_1^4\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4\partial x_2^2}\right\|_{L_\infty(D)},\ x\in\omega. \tag{18}$$

С учетом неравенств (17) и (18) оценка (16) принимает вид

$$|z(x)|\le v(x)\frac{7}{720}|h|^4\left(\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4\partial x_2^2}\right\|_{L_\infty(D)}+\left\|\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2\partial x_2^4}\right\|_{L_\infty(D)}\right),\ x\in\omega, \tag{19}$$

где $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$.

Из неравенства (19) и леммы 2 следует оценка (15). ⊡

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применяя приемы из работы [8], можно доказать оценку

$$|z(x)|\le Mv(x)\,||u||_{W_\infty^m(D)}\,|h|^{m-2},\ x\in\omega\ \ (2<m\le 6),$$

где $\frac{1}{\sqrt{5}}\le\frac{h_1}{h_2}\le\sqrt{5}$, а постоянная M не зависит от $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$ и выполняются соотношения $v(x)=O(|h|)$ и $v(x)=O\left(|h|^2\ln\frac{1}{|h|}\right)$ вблизи сторон и вершин прямоугольника D соответственно.

Теорема 1 свидетельствует о повышении точности схемы (2) в приграничных узлах сеточного множества ω, что отражает влияние краевого условия Дирихле. Из изложенного также следует, что повышение порядка аппроксимации не влияет на эффект от краевого условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci*. (*Proc. of the Bulgarian Academy of Sciences*). 1989. V. 42, N 5. P. 41–44.
2. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ*. Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1985. С. 30–34.
3. Makarov V.L., Demkiv L.I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi-linear elliptic equations with variable coefficients taking into account boundary effect. *Lecture Notes in Computer Science*. 2005. Vol. 3401. P. 80–90.
4. Makarov V.L., Demkiv L.I. Weight uniform accuracy estimate of finite-difference method for Poisson equation taking into account boundary effect. *Numerical Analysis and Its Application. 4th International Conference*. Lozentz, Bulgaria, June 16–20, 2008. P. 92–103.

5. Майко Н.В., Рябичев В.Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 5. С. 113–124.
6. Майко Н.В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 1. С. 145–153.
7. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 762 p.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Москва: Высшая школа, 1987. 296 с.
9. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 848 с.
10. Волков Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. *Труды МИАН СССР*. 1965. Т. 77. С. 89–112.

Надійшла до редакції 19.10.2017

Н.В. Майко

СХЕМА ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНИКУ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ КРАЙОВОЇ УМОВИ ДІРІХЛЕ

Анотація. Досліджено скінченно-різницеву схему підвищеного порядку апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні для рівняння Пуассона в прямокутнику з крайовою умовою Діріхле. Отримано оцінки точності наближеного розв'язку, які враховують вплив крайової умови. Доведено, що точність схеми вища в примежових вузлах сіткової множини і підвищення порядку апроксимації не впливає на ефект від крайової умови.

Ключові слова: рівняння Пуассона, крайова умова Діріхле, різницева схема, дев'ятиточковий шаблон, різницевий оператор, оцінка точності, крайовий ефект.

N.V. Mayko

THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME OF HIGHER ORDER OF ACCURACY FOR THE TWO-DIMENSIONAL POISSON EQUATION IN A RECTANGLE WITH ALLOWANCE FOR THE EFFECT OF THE DIRICHLET BOUNDARY CONDITION

Abstracts. We investigate the finite-difference scheme of higher order of accuracy on a nine-point template for Poisson's equation in a rectangle with the Dirichlet boundary condition. We substantiate the error estimate taking into account the influence of the boundary condition. We prove that the accuracy order is higher near the sides of the rectangle than at the inner nodes of the mesh set and increase in the approximation order has no impact on the boundary effect.

Keywords: Poisson's equation, Dirichlet boundary condition, finite-difference scheme, nine-point template, discrete operator, error estimate, boundary effect.

Майко Наталия Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: mayko@knu.ua.