УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

УСИЛЕННОЕ ПАРЕТОВСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ДЛЯ ИГР НА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВАХ[1]

Аннотация. Предложено новое понятие равновесия. Его можно использовать для определения справедливого распределения в кооперативных играх на пересекающихся игровых множествах и уточнения иерархической зависимости между известными равновесиями.

Ключевые слова: конфликтные задачи на пересекающихся множествах, игровые равновесия.

Задачи с побочными интересами участников (с частично пересекающимися игровыми множествами) — новый раздел теории игр и конфликтов. Подобные задачи являются более естественной моделью конфликтов в реальной жизни, чем классические задачи, рассматриваемые на едином для всех участников игровом множестве [1–9]. Первая работа [10] по теории игр на пересекающихся игровых множествах опубликована в 2003 г. Новая теория [10–15] обусловила разработку специфических понятий равновесия и понятия сильной угрозы.

Для того чтобы не усложнять изложение громоздкими конструкциями, порождаемыми динамикой и возможностями образования любых коалиций из участников, ограничимся конфликтными задачами в статической постановке, в частности коалициями, состоящими только из одного и $N-1$ участника (коалициями P_1 и P_{N-1}), не рассматривая произвольные коалиции P_k из любого числа k участников ($k=1,\dots,N$). В работе [14] предложено довольно сильное понятие равновесия для конфликтных задач с побочными интересами участников, которое существует не всегда, а в [15], наоборот, — слишком слабое. В данной работе предлагается компромиссное равновесие между ними, эффективное относительно определения справедливого распределения в кооперативных играх.

ФОРМУЛИРОВКИ КОНФЛИКТНЫХ РАВНОВЕСИЙ

Задачи с побочными интересами участников рассматриваются при следующих естественных допущениях.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=1,\dots,N$, — метрические пространства, $Q=Q_1\times\dots\times Q_N$, а G_i, $i=1,\dots,N$, — компактное игровое множество в Q i-го участника; пусть также множество $G=G_1\cap\dots\cap G_N\neq\varnothing$ (хотя это не принципиально), а $G'=G_1\cup\dots\cup G_N$. Пусть, далее, на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал) $J_i(q)$, в максимизации которой заинтересован i-й участник, q_i — стратегия i-го участника, $q=(q_1,\dots,q_N)$ — вектор стратегий всех участников.

Естественно принять, что i-й участник имеет возможность выбирать свою стратегию q_i из проекции $\mathrm{Pr}_{Q_i}G'$ множества G' на пространство Q_i или сечения $G'(q^i)$, а допустимые стратегии $q^i=(q_i,\dots,q_{i-1},q_{i+1},\dots,q_N)$ конкурирующей с ним коалиции P_{N-1} определяются аналогично.

Интересы всех игроков явно сталкиваются только на множестве G, а на множестве $G'\setminus G^i$ i-й участник получает побочные доходы, которые могут существенно зависеть от того, насколько велико различие между множествами $G'\setminus G^i$ и G_i.

[1]Работа поддержана Программой РФФИ № 15-01-08838-а и № 18-01-00842-а.

Приведем предварительно расширенное понятие A-равновесия (обобщающее понятие A-равновесия из работ [16–20]), которое можно рассматривать как понятие наиболее слабого равновесия, содержащего все известные понятия равновесия.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G_i$ назовем A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q^{i*} остальных $N-1$ участников допустима для i-го игрока только одна стратегия $q_i^* = G_i(q^{i*})$;

• или если любой стратегии $q_i \in G_i(q^{i*}) \setminus q^{i*}$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую совместную стратегию $\hat{q}^i$ остальных участников такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_1, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \; \hat{q}^i \in G_i(q_i); \tag{1}$$

этот случай назовем задачей 1-го типа;

• или такую стратегию, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \; \hat{q}^i \in G'(q_i); \tag{2}$$

этот случай назовем задачей 2-го типа, отличающейся от задачи 1-го типа тем, что в ней, помимо угроз $\hat{q}^i$, применяемых в (1) только на множестве $G_i(q_i)$, допускаются «сильные» угрозы (или «санкции»), т.е. угрозы $\hat{q}^i$, действующие не только на множестве $G_i(q_i)$, но и на множестве $G'(q_i) \setminus G_i(q_i)$, на котором угрожающая коалиция из $N-1$ игроков получает доход, а i-й игрок не получает ничего;

• или если любой стратегии $q_i \in G_i(q^{i*}) \setminus q^{i*}$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i$ остальных участников такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \; \hat{q}^i \in G(q_i); \tag{3}$$

этот случай назовем задачей 3-го типа, характеризующейся тем, что вспомогательная игра рассматривается только на пересечении G всех множеств G_i, т.е. игра на общем для всех участников множестве G.

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия в задачах 1-, 2- 3-го типов, если соответствующие условия (1), (2), (3) удовлетворяются в точке $q \in G'$ для всех $i = 1, \ldots, N$, т.е. если $A = \bigcap_{i=1}^{N} A_i$.

В любых конфликтных задачах на едином для всех участников игровом множестве, которые рассматривались в классической теории игр [1–9], множество наислабейших конфликтных равновесий A [16–20] не может быть пустым. В играх с побочными интересами участников [10–15] оно нередко пусто, поэтому потребовалось его заменить, что сформулировано в следующем определении.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in G_i$ назовем P_i-экстремальной, если i-й участник (при фиксированной стратегии q^{i*} коалиции P_{N-1} из всех остальных участников) не может ее улучшить или если при любой его попытке $q_i \in G_i(q^{i*}) \setminus q^{i*}$ увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^* за счет перехода из нее в доступную ему более выгодную ситуацию $q = (q_i, q^{i*}) \in G_i(q^{i*})$ окажется, что ситуация q^* является точкой Парето (т.е. индивидуально-паретовским равновесием [18, с. 145]) по отношению ко всем точкам сечения $G'(q_i)$. Ситуацию q^* назовем P-равновесием, если она P_i-экстремальна одновременно для всех $i \in (1, \dots, N)$.

Предлагаемое $\hat{D}^P$-равновесие, основанное на понятии P-равновесия, как показано ниже на примерах, полезно в любых задачах, а не только в случае пустоты множества A.

Определение 3. Ситуацию q^* назовем $\hat{D}_i^P$-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$q^* \in \hat{D}_i^P = \operatorname{Arg\,Par}_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} P_i} J(\operatorname{Arg\,Par}_{q^i \in P_i(q_i)} J). \tag{4}$$

Назовем ситуацию q^* $\hat{D}^P$-равновесием, если условия (4) удовлетворяются для всех $i = 1, \dots, N$, т.е. если $q^* \in \hat{D}^P = \hat{D}_1^P \cap \dots \cap \hat{D}_N^P$.

Непосредственно из определений 2 и 3 следует теорема.

Теорема 1. Имеет место включение $P \supseteq \hat{D}^P$.

Если A-равновесие в задаче не пусто, то, прежде чем искать сложное $\hat{D}^P$-равновесие, вначале воспользуемся известными понятиями равновесия [10–20], из которых приведем только три равновесия, необходимые для решения примеров.

Определение 4. Ситуацию $q^* = (q_i^*, q^{i*}) \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если совместная стратегия q^{i*} остальных игроков удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*),\ i = 1, \dots, N. \tag{5}$$

Назовем ситуацию q^* B-равновесием, если $q^* \in B = B_1 \cap \dots \cap B_N$.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*),\ i = 1, \dots, N,$$

или, что то же самое, если

$$\max_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} A_i} J_i(\operatorname{Arg\,max}_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)) = J_i(q^*),\ i = 1, \dots, N. \tag{6}$$

Назовем ситуацию q^* $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1 \cap \dots \cap \overline{D}_N = \overline{D}$. Отметим, что $\overline{D}$-равновесие в любых конфликтных задачах, в которых оно имеется, является наиболее сильным и выгодным для всех участников. Однако такое равновесие существует не всегда.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A$ назовем $\overline{D}'$-экстремальной, если

$$\max_{q_i \in A_i(q^{i*})} J_i(\operatorname{Arg\,max}_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)) = J_i(q^*),\ i = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Назовем ситуацию q^* $\overline{D}'$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}' = \overline{D}_1' \cap \dots \cap \overline{D}_N'$.

Пример 1. Рассмотрим игровую задачу с двумя участниками, в которой каждый игрок максимизирует свою матричную платежную функцию на индивидуальном для него игровом множестве, частично пересекающемся с игровым множеством другого участника (т.е. игру с побочными интересами участников):

$$J_1 = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 & \cdot \\ 3 & 8 & \cdot & 2 \\ \cdot & 4 & 9 & \cdot \\ 7 & \cdot & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 2 & 12 \\ 8 & \cdot & 5 & 6 \\ 10 & 4 & 3 & 11 \\ \cdot & 9 & 7 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Игроки располагают стратегиями q_1 и q_2, принимающими только четыре значения. Стратегия q_1 — выбор 1-м игроком любой из четырех строк, а стратегия q_2 — выбор 2-м игроком любого из четырех столбцов. Выбор, например, 1-м игроком первой строки, а 2-м игроком — четвертого столбца приводит к реализации ситуации a_{14}, в которой 1-й игрок ничего не получает, так как эта ситуация не принадлежит его игровому множеству, а 2-й получает свой побочный доход $J_2 = 12$.

В данной задаче игровое множество G_i *i*-го участника задается теми элементами матрицы J_i, в которых приведены возможные значения его выигрыша. Множество $G' = G_1 \cup G_2$ включает все возможные 16 ситуаций, а множество $G = G_1 \cap G_2$, на котором участники вступают в явный конфликт друг с другом, состоит из семи ситуаций: $(a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{24}, a_{32}, a_{33}, a_{43})$.

Исследуем, в какой мере побочные интересы участников и возможности использования ими разных типов угроз могут влиять на доходы участников и решение игры (рассматриваемой как кооперативная или некооперативная).

Вначале ищем наиболее слабые *A*-равновесия (1), отмечая крестиками соответствующие им ситуации:

$$A_1 = \begin{pmatrix} + & + & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A = A_1 \cap A_2 = \varnothing.$$

Поскольку множество *A*-равновесий пусто, тем более не существует и всех известных, более сильных, определяемых на этом множестве равновесий. Поэтому найдем приведенное выше *P*-равновесие (которое в таком случае заменит *A*-равновесие в определении 1) и его усиление — предлагаемое в данной работе новое $\hat{D}^P$-равновесие. Так как искать эти равновесия только на основе их определений сложно, используем геометрическое отображение матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2), приведенное на рис. 1, где по вертикали отложены значения матричной платежной функции J_2, а по горизонтали — значения J_1.

Задачи с побочными интересами участников, не рассматривавшиеся в классической теории игр и конфликтов, обусловливают применение не использовавшейся ранее в математике формы отображений множеств G_1 и G_2 на плоскость (J_1, J_2) (см. рис. 1). В первом квадранте приводится естественное отображение $J(G) = (J_1(G),\ J_2(G))$ семи элементов множества G, на котором определены одновременно две функции — J_1 и J_2, а отображение множества $G_2 \setminus G$ находится левее оси J_2, поскольку на нем функция J_1 не определена. Аналогичным образом отображение множества $G_1 \setminus G$ приводится ниже оси J_1. Причем отображения $J_1(a_{ij})$ указанных элементов обозначены точками ниже оси J_1, отмеченными обозначениями a_{ij} этих элементов.

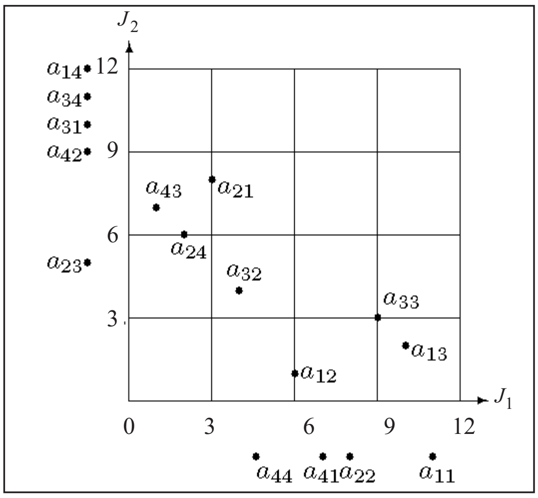

Рис. 1

Несмотря на то что множество A-равновесий в этой задаче пусто, множества равновесий, задаваемые определениями 2 и 3, не пусты. Найдем вначале матрицы P_1, P_2, P:

$$P_1 = \begin{pmatrix} + & + & + & \cdot \\ + & + & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, как ищутся непустые элементы этих матриц. Например, ситуация a_{11} P_1-экстремальна, поскольку в ней достигается максимум в первом столбце. Следовательно, улучшить ее для себя в первом столбце своей игровой матрицы J_1 1-й игрок не может. Причем данная ситуация не может быть P_2-экстремальной, так как она не принадлежит игровой матрице J_2 2-го игрока. Ситуация a_{21} также P_1-экстремальна, поскольку она паретовская по отношению ко всем элементам первой строки матриц J_1, J_2 и ко всем элементам четвертой строки этих матриц. Заметим, что ситуация a_{21} также и P_2-экстремальна, так как она является максимумом во второй строке матрицы J_2.

Аналогично находятся любые другие элементы матриц P_1 и P_2, причем их пересечение P определяется пятью элементами, а предлагаемые новые $\hat{D}^P$-равновесия, усиливающие P-равновесия, задаются следующими четырьмя элементами:

$$\hat{D}_1^P = \operatorname{Arg\,Par}_{q_1 \in \mathrm{Pr}_{Q_1} P_1} J(\operatorname{Arg\,Par}_{q_2 \in P_1(q_1)} J(q)) =$$

$$= \operatorname{Arg\,Par}_{q_1 \in \mathrm{Pr}_{Q_1} P_1} J(a_{11}, a_{13}; a_{21}, a_{22}; a_{32}, a_{33}; a_{43}, a_{44}) =$$

$$= (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{32}, a_{33}),$$

$$\hat{D}_2^P = \operatorname{Arg\,Par}_{q_2 \in \mathrm{Pr}_{Q_2} P_2} J(\operatorname{Arg\,Par}_{q_1 \in P_2(q_2)} J(q)) =$$

$$= \operatorname{Arg\,Par}_{q_2 \in \mathrm{Pr}_{Q_2} P_2} J(a_{21}; a_{32}, a_{42}; a_{13}, a_{33}, a_{43}; a_{14}) = (a_{21}, a_{32}, a_{13}, a_{33}, a_{14}),$$

$$\hat{D}^P = \hat{D}_1^P \cap \hat{D}_2^P = (a_{13}, a_{21}, a_{32}, a_{33}).$$

Если исходная игра рассматривается как кооперативная (в которой кооперативный выигрыш $\max_{a_{ij}} (J_1 + J_2) = 12$ достигается, очевидно, в любой из трех ситуаций (a_{13}, a_{14}, a_{33}), то справедливое распределение кооперативного дохода на основе четырех полученных $\hat{D}^P$-равновесий определяется следующими формулами [11, с. 51; 16, с. 175]:

$$y_1^P = \frac{10+3+4+9}{26+17} 12 \approx 7.2, \quad y_2^P = \frac{2+8+4+3}{26+17} 12 \approx 4.8.$$

В наиболее важном классе сильных угроз (2), равновесия в котором отметим индексом s, множество A^s-равновесий не пусто:

$$A_1^s = \begin{pmatrix} + & + & + & \cdot \\ + & + & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ + & \cdot & + & + \end{pmatrix}, \quad A_2^s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A^s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

Естественные усиления A^s-равновесий определяются следующими равновесиями:

$$B_1^s = (a_{13}, a_{21}, a_{32}, a_{43}),\ B_2^s = (a_{21}, a_{32}, a_{13}, a_{24}),\ B^s = (a_{13}, a_{21}, a_{32}),$$

$$\overline{D}_1^s = a_{13},\ \overline{D}_2^s = a_{21},\ \overline{D}^s = \varnothing,\ \overline{D}'^s = \varnothing.$$

Кооперативный дележ, получаемый на основе трех найденных равновесий (a_{13}, a_{21}, a_{32}), имеет вид

$$y_1^s = \frac{10+3+4}{17+14}12 = 6.6,\ \ y_2^s = \frac{2+8+4}{17+14}12 = 5.4.$$

Рассмотрим вспомогательную игру на пересечении множеств G, где участники, по сути, и вступают в прямой конфликт друг с другом:

$$J_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & 6 & 10 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 4 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},\ J_2^G = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 2 & \cdot \\ 8 & \cdot & \cdot & 6 \\ \cdot & 4 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 7 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Для данной игры находим следующие равновесия:

$$A_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ A_2^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix},\ A^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$B_1^G = (a_{13}, a_{21}, a_{33}),\ B_2^G = (a_{21}, a_{32}, a_{13}),\ B^G = (a_{13}, a_{21}),$$

$$\overline{D}_1^G = a_{13},\ \overline{D}_2^G = a_{21},\ \overline{D}^G = \varnothing,\ \overline{D}'^G = \varnothing.$$

Во вспомогательной игре на пересечении игровых множеств $G_1 \cap G_2$ имеем две равновесные ситуации (a_{13}, a_{21}), определяющие следующее распределение кооперативного дохода:

$$y_1^G = \frac{10+3}{13+10}12 \approx 6.8,\ \ y_2^G = \frac{2+8}{13+10}12 \approx 5.2.$$

Небольшое различие в полученных распределениях кооперативного дохода в трех решениях вспомогательных задач указывает на незначительное влияние побочных доходов на решение исходной игры. Заметим, что если в качестве наисильнейших равновесий в рассматриваемой игре принять пару равновесий $\overline{D}^P \cap B^s \cap B^G = (a_{13}, a_{21})$, то это приводит к дележу $y = (6.8; 5.2)$.

Поскольку сильные угрозы («санкции») — наиболее серьезный фактор в любом конфликте, именно дележ y^s следует признать в качестве базового, который допустимо лишь немного корректировать с учетом других получаемых частных решений вспомогательных задач (см. также Предложение 1 в [13–15]).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ

Рассмотрим конфликтующие динамические системы (в постановке работы [14]), описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник $(i = 1, \ldots, N)$, используя чистые $u_i(t)$ или смешанные $q_i(u_i, t)$ стратегии, стремится обеспечить максимум своего функционала (критерия):

$$J_i(q) = \int_T dt \int_{W_i(t)_i} f_0^i(u, x, t) dq, \ i = 1, \dots, N, \tag{8}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \int_{W'(t)} f(u, x, t) dq, \ t \in T = [t_0, t_1] \subseteq E^1, \tag{9}$$

$$(u, t) \in W' \times T, \tag{10}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \ j = 1, \dots, n, \ x_k(t_1) = x_k^1, \ k \in K \subseteq 1, \dots, n, \tag{11}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ — евклидово n-мерное пространство; $U = \bigcup_{k=1}^{N} U_k$; U_k — конечномерное пространство, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$; $W' = \bigcup_{k=1}^{N} W_k$, W_k — компактные множества в U; $W(t)$ и $W'(t)$ — сечения множеств W и W' в момент $t \in T$; $\widehat{U}_i = \mathrm{Pr}_{U_i} W'$ — проекция множества W' на U_i; $q_i(u_i, t)$ — смешанная стратегия i-го участника, $q = q_1 \dots q_N$; $q^i = q_1 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_N$; Q_i — множество всех смешанных стратегий $q_i(u_i, \cdot)$ i-го игрока в задаче (8), (9) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и заменой множества W' множеством $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \times \dots \times \widehat{U}_N$. Однако в задаче (8)–(11) уравнению (9) при ограничениях (10), (11) удовлетворяют не все указанные выше возможные стратегии $q_i \in Q_i$, $i = 1, \dots, N$, а только те из них, которые обеспечивают удовлетворение ограничений (10), (11); они образуют некоторое компактное подмножество G' в пространстве $Q_1 \times \dots \times Q_N$.

Допущение 2. Пусть множество W — компакт в $U \times T$; отображение $\widehat{f} = (f_0^1, \dots, f_0^N, f_1, \dots, f_n): U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\widehat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\widehat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $\widehat{f}$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t)$: $T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (9); кроме того, функция $\widehat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица $|\hat{f}(u, \bar{x}, t) - \widehat{f}(u, x, t)| \leq$ $\leq b(t)|\bar{x} - x|$ для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Отметим, что найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач, невозможно принципиально. Если A-равновесие несколько усилить, назвав его усиленный аналог A^c-равновесием, то найти удобные для приложений необходимые условия возможно.

Для поиска решения дифференциальных игр воспользуемся определением A^c-равновесия, которое получим, если определение 1 дополнить приведенным ниже определением 7 (т.е., по сути, A^c-равновесие задается определениями 1 и 7).

Определение 7. Ситуация q^* в дифференциальной игре (8)–(11) A^c-экстремальна, если каждое из отношений (1)-(3) выполняется при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\widehat{q}^{\,i}(t) \neq q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \neq q_i^*(t)$. Ситуацию q^* назовем A^c-равновесием в задачах 1-, 2-, 3-го типов, если соответственно требования (1), (2), (3) удовлетворяются в точке q^* для всех $i = 1, \ldots, N$, т.е. если $A^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c$.

По аналогии с A^c-равновесием можно ввести понятие P^c-равновесия. Если в формулировку задачи не входят произведения фазовых координат и управлений и задача линейна по фазовым координатам, то полагаем $A^c = A$ и с помощью приведенных ниже необходимых условий A^c-равновесия сводим решение исходной дифференциальной игры к решению некоторых вспомогательных («локальных») статических игр, в которых платежные функции — гамильтонианы игроков исходной дифференциальной игры [10–20]. Заметим, что если $A^c \neq A$, то всегда остается возможность проверить найденное решение на его оптимальность (равновесность).

Для поиска решений дифференциальных игр с побочными интересами участников воспользуемся теоремой из [14].

Теорема 2. Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t)),\ p_0^i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$\dot{p}_k^i = -\iint\limits_{W'(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*,\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, N,\ p_j^i(t_1) = 0,\ j \notin K, \tag{12}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$; гамильтонианы

$$H^i = \int\limits_{W'(t)} p^i f^i dq^* \tag{13}$$

непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет условиям

$$H^i(\hat{q}^i, q_i) \leq H^i(q^*),\ i = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

В отношении всех других базовых равновесий, более сильных, чем A^c-равновесие, справедливы некоторые естественные аналоги уравнений (12)–(14), причем все статические понятия равновесий переносятся на динамические задачи без каких-либо дополнительных осложнений.

Следующий пример демонстрирует эффективность использования нового понятия равновесия для поиска решения в дифференциальных играх.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную игру с двумя участниками в классе чистых стратегий, трактуя ее как кооперативную и бескоалиционную. Игроки выбором чистых стратегий, соответственно $u_1(t)$ и $u_2(t)$, стремятся обеспечить максимумы своих платежных функционалов

$$J_1 = \int_0^1 x_1 dt,\ J_2 = \int_0^1 x_2 dt \tag{15}$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1, u_2) = u_2 - u_1^2,\ x_1(0) = 0, \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(u_1, u_2) = u_1 - u_2^2,\ x_2(0) = 0, \tag{17}$$

$$u_i \in [0,1],\ i = 1, 2,\ (u_1, u_2) \in W', \tag{18}$$

где $W_1 = FKMLF \setminus \{K, L\}$ — замкнутая фигура (за исключением точек K и L), определяющая множество пар значений стратегий (u_1, u_2), на которых задан функционал J_1; аналогично $W_2 = OKMLO \setminus \{K, L\}$ — множество пар значений стратегий, на которых задан функционал J_2; отрезок $W = (KML)$ — пересечение $W_1 \cap W_2$ игровых множеств участников, на котором определены платежные функционалы J_1, J_2 и где, по сути, игроки вступают в конфликтные отношения. Свои побочные доходы игроки получают на обширных множествах $W_1 \setminus (KML)$ и $W_2 \setminus (KML)$, существенно превосходящих собственно игровое множество (LML). На рис. 2 из всего возможного множества уровней значений функций $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$ на плоскости (u_1, u_2) приведены только уровни $f_1 = u_2 - u_1^2 = 0$ (кривая OLF) и $f_2 = u_1 - u_2^2 = 0$ (кривая OKF), образующие границу множества $W' = W_1 \cup W_2$. Очевидно, что через точку $(u_1, u_2) = (1, 0)$ проходят уровни $f_1 = 1$ и $f_2 = 1$, а через точку $(u_1, u_2) = (0, 1)$ — уровни $f_1 = 1$ и $f_2 = 1$. Эти уровни, как видно из рис. 2, указывают на то, что 1-й игрок улучшает значение своего платежного функционала J_1 при перемещении влево вдоль линий $u_2 = \text{const}$, пересекающих множество W', а 2-й — при перемещении по вертикали вниз.

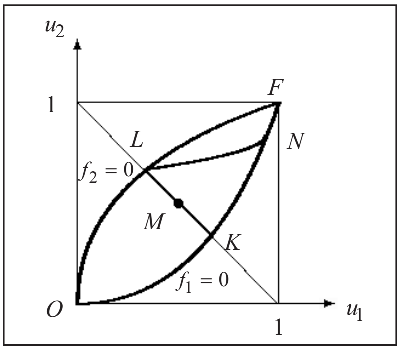

Рис. 2

Найдем решение уравнений (12) и приведем на его основе гамильтонианы исходной игры к удобному виду для формулировки вспомогательной («локальной») игры.

Поскольку гамильтонианы имеют вид

$$H^1 = p_0^1 x_1 + p_1^1 (u_2 - u_1^2) + p_2^1 (u_1 - u_2^2), \; H^2 = p_0^2 x_2 + p_1^2 (u_2 - u_1^2) + p_2^2 (u_1 - u_2^2),$$

уравнения (12) сводятся к соотношениям

$$\dot{p}_1^1 = -p_0^1, \; p_1^1(1) = 0, \; \dot{p}_2^1 = 0, \; p_2^1(1) = 0, \; \dot{p}_2^2 = -p_0^2, \; p_2^2(1) = 0, \; \dot{p}_1^2 = 0, \; p_1^2(1) = 0,$$

имеющим решения

$$p_1^1 = p_0^1(1-t) = (1-t), \; p_2^1 = 0, \; p_2^2 = p_0^2(1-t) = (1-t), \; p_1^2 = 0,$$

подстановка которых в гамильтонианы приводит их к виду

$$H^1 = x_1 + (1-t)(u_2 - u_1^2), \qquad H_2 = x_2 + (1-t)(u_1 - u_2^2).$$

Поскольку $1 - t \geq 0$ на всей траектории, исходную дифференциальную игру приведем всего к одной функционально не изменяемой вспомогательной статической «локальной» игре с платежными функциями

$$f_1 = (u_2 - u_1^2), \; f_2 = (u_1 - u_2^2). \tag{19}$$

Если бы на различных подынтервалах (t_1, t_2) интервала $(0,1)$ гамильтонианы изменяли свой функциональный вид, то пришлось бы на каждом подобном подынтервале решать разные статические «локальные» игры.

С помощью определений 1, 7 и рис. 2 находим следующие наиболее слабые равновесия в «локальной» задаче. Легко видеть из рис. 2, что $A_2 = W_2$, а множество A_1 — замкнутая фигура LNF без точки L, причем кривая LN задается уравнением $u_1^2 = u_2^4 + u_2^2 + u_2 - 1$.

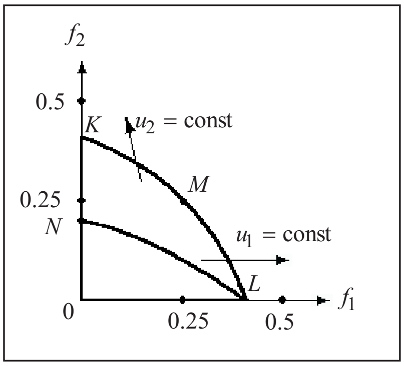

Рис. 3

Заметим, что так как множество A_2 совпадает со всем игровым множеством 2-го игрока, а множество A_1 составляет лишь часть игрового множества W_1 1-го игрока, то теоретически у 1-го игрока гораздо больше возможностей наказывать 2-го игрока, чем у 2-го наказать 1-го. Однако в этой игре пересечение $A = A_1 \cap A_2$ пустое, а следовательно, пустые и все известные равновесия, ус иливающие A-равновесия. Отметим также, что если точки K и L не исключать из игры, то точка L оказывается единственным наиболее слабым A-равновесием в подобной игре.

В любом случае необходимо найти еще какие-либо равновесия. Рассмотрим поиск P-равновесия и нового $\hat{D}^P$-равновесия. Для их поиска следует получить отображение игровых множеств W_1 и W_2 на плоскость (f_1, f_2). Это отображение приведено на рис. 3. Отображения помеченных буквами точек на рис. 2 для удобства обозначены на рис. 3 теми же буквами.

Вначале с использованием рис. 2 и 3 ищем множества P_1, P_2 и P, а затем их усиление — множество $\hat{D}^P$. Множества P_i в данной задаче легко находятся, так как они представляют собой совокупность всех точек пересечения кривых $u_i = \text{const}$ на рис. 3 с кривой KL. Из этого следует

$$P_1 = P_2 = P = \hat{D}^P = KL.$$

Кооперативный выигрыш во вспомогательной, «локальной», игре реализуется в точке M и равен 0.5. Вследствие симметрии выигрышей участников в соответствующих точках отрезков $(KM]$ и $[ML)$ этот выигрыш должен делиться между ними поровну согласно [16, с. 174, 175].

На основе решения «локальной» игры нетрудно подсчитать выигрыши участников и в исходной дифференциальной игре:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 1/2, \;\; x_1 = x_2 = t/2, \;\; J_1 = J_2 = 1/4.$$

Для того чтобы оценить, в какой мере на решение исходной дифференциальной игры влияют побочные доходы участников, необходимо получить решение также в классе сильных угроз и на пересечении W игровых множеств участников.

Для «локальной» игры в классе сильных угроз из рис. 2 находим

$$A_1^s = W_1, \;\; A_2^s = W_2, \;\; A^s = A_1^s \cap A_2^s = (KL).$$

Поскольку даже небольшое усиление A^s-равновесия

$$B_1^s = \varnothing, \;\; B_2^s = (KL), \;\; B^s = \varnothing$$

не позволяет выделить на множестве A более сильное равновесие, заключаем, что отрезок KL представляет собой множество эквивалентных равновесий.

Рассмотрим также вспомогательную игру на пересечении множеств $W_1 \cap W_2 = W$. Для этой игры получаем

$$A_1^W = A_2^W = A^W = (KL), \;\; B_1^W = B_2^W = B^W = (KL).$$

Таким образом, поскольку все вспомогательные игры привели к одному и тому же множеству эквивалентных наисильнейших равновесий, это показывает, что в рассмотренной дифференциальной игре побочные доходы участников, хотя и занимают почти все суммарное игровое множество W', не оказывают влияния на решение игры (что довольно редко встречается и благоприятно для участников).

Отметим, что предлагаемое новое понятие $\hat{D}^P$-равновесия имело существенное значение в определении кооперативного решения дифференциальной игры. Если игра рассматривается как бескоалиционная, то ее решением является множество всех наисильнейших равновесных ситуаций *KL*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Москва: Мир, 1967. 480 с.
2. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. Москва: Физматлит, 1960. 420 с.
3. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Москва: Наука, 1970. 708 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 324 с.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 350 с.
6. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. Москва: Сов. радио, 1980. 304 с.
7. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. Москва: Наука, 1984. 495 с.
8. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 381 с.
9. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. Москва: МАКС Пресс, 2005. 272 с.
10. Смольяков Э.Р. Конфликтные равновесия на множествах с непустым пересечением. *Доклады РАН*. 2003. Т. 391, № 2. С. 172–176.
11. Смольяков Э.Р. Управление конфликтами с побочными интересами участников. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 154 с.
12. Смольяков Э.Р. Теория решения дифференциальных игр с побочными интересами участников. *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, № 12. С. 1647–1659.
13. Смольяков Э.Р. Индивидуально-паретовские равновесия для игровых задач с побочными интересами участников. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 2. С. 29–42.
14. Смольяков Э.Р. Новые равновесия для игр с побочными интересами участников. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 29–42.
15. Смольяков Э.Р. Наиболее общее понятие равновесия для конфликтных задач с побочными интересами. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 18–33.
16. Смольяков Э.Р. Методы решения конфликтных задач. Москва: МАКС Пресс, 2010. 242 с.
17. Смольяков Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. Москва: МАКС Пресс, 2010. 232 с.
18. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 160 с.
19. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 304 с.
20. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. Москва: Наука, 1986. 224 с.

Надійшла до редакції 19.12.2016

Е.Р. Смольяков

ПІДСИЛЕНА ПАРЕТОВСЬКА РІВНОВАГА ДЛЯ ІГОР НА ПЕРЕТИННИХ МНОЖИНАХ

Анотація. Запропоновано нове поняття рівноваги. Його можна використовувати для визначення справедливого розподілу у кооперативних іграх на перетинних ігрових множинах та уточнення ієрархічної залежності між відомими рівновагами.

Ключові слова: конфліктні задачі на перетинних множинах, ігрові рівноваги.

E.R. Smol'yakov

STRONGEST PARETO EQUILIBRIUM FOR GAMES ON CROSSING SETS

Abstract. A new concept of equilibrium is proposed. It can be used for definition of just sharing in cooperative games on crossing sets and for definition of more strict dependence between different equilibria.

Keywords: conflict problems on intersected sets, game equilibrium.

Смольяков Эдуард Римович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия, e-mail: ser-math@rambler.ru.