УДК 519.713.1

А.Н. ЧЕБОТАРЕВ

СИНТЕЗ Σ-АВТОМАТОВ, СПЕЦИФИЦИРОВАННЫХ В ЛОГИЧЕСКИХ ЯЗЫКАХ LP И LF ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Приведены методы синтеза Σ-автоматов по спецификации в языке LP с детерминированной семантикой и в языке LF с недетерминированной семантикой. В основе этих методов лежит эквивалентное преобразование формулы вида $\forall t F(t)$ в так называемую нормальную форму, структура которой соответствует графу переходов специфицированного Σ-автомата.

Ключевые слова: Σ-автомат, LP-формула, LF-формула, автоматная семантика, нормальная форма, ортогонализация.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах синтеза автоматных моделей, специфицированных в логическом языке, следует использовать такой язык спецификации, который позволит специфицировать достаточно широкий класс автоматов определенного вида и обеспечит приемлемую сложность процедуры синтеза. Обычно уменьшение выразительных возможностей языка упрощает процедуру синтеза специфицируемого в нем автомата. Здесь под выразительными возможностями языка понимается класс специфицируемых в нем автоматов. Исходя из этих соображений в [1] в качестве языка спецификации рассматривалось подмножество L логики первого порядка с одноместными предикатами (MFO), формулы которого имеют вид $\forall t F(t)$, где $F(t)$ — формула, не содержащая кванторов и символов числовых отношений. Класс автоматов, специфицируемых в этом языке, составляют автоматы с конечной памятью. В [2] был предложен язык L*, расширенный конструкцией, которая содержит ограниченные кванторы, что позволило специфицировать некоторые автоматы, не обладающие конечной памятью. В качестве области интерпретации этих языков рассматривается множество целых чисел (моментов дискретного времени). Это упрощает как процесс написания спецификации, делая его более естественным, так и преобразование формул спецификации в процессе синтеза вследствие их инвариантности относительно сдвига во времени. В [3] рассмотрены два фрагмента, LP и LF, логики MFO с ограниченными кванторами, также интерпретируемые на множестве целых чисел. Спецификация в языке LP описывает зависимость поведения системы в текущий момент времени от ее поведения в прошлом, а спецификация в языке LF — желаемое поведение системы в будущем. Язык LP расширяет выразительные возможности языка L*, несколько усложняя алгоритм синтеза. Язык LF дает альтернативные средства для спецификации автоматов, аналогичные формулам логики LTL вида $\mathbf{G}\varphi$. Для языков LP и LF определены две автоматные семантики: детерминированная и недетерминированная, устанавливающие соответствие между формулами спецификации и специфицируемыми ими автоматами из класса детерминированных или недетерминированных Σ-автоматов. Использование недетерминированной семантики позволяет специфицировать автоматы, обратные детерминированным автоматам, а также устанавливать связь между детерминированными автоматами, специфицируемыми формулами логик LP и LF. В качестве автоматной модели, используемой при определении семантики логической формулы, рассматривается Σ-автомат (без выходов).

Для спецификаций в языке L* был разработан метод синтеза [4], позволяющий синтезировать автоматы с количеством состояний порядка нескольких тысяч. Суть метода заключается в приведении исходной спецификации к некоторой нормальной форме, структура которой соответствует представлению синтезируемого автомата в терминах множества состояний и функции переходов. Доказательство корректности этого метода, т.е. что результат синтеза соответствует семантике языка спецификации, основано на теореме о спецификации, сформулированной и доказанной в [2]. Расширение класса формул, используемых для спецификации в языках LP и LF, привело к изменению алгоритма синтеза, хотя основная идея метода сохранилась. Поэтому в [5] в более общем виде были доказаны два варианта теоремы о спецификации соответственно для языка LP с детерминированной семантикой и языка LF с недетерминированной семантикой. В настоящей работе дается обоснование использования этих теорем для синтеза детерминированных и недетерминированных Σ-автоматов и приводятся соответствующие методы синтеза, основанные на расщеплении подформул спецификации.

ЛОГИКИ LP И LF

Логики LP и LF — это фрагменты монадической логики первого порядка с ограниченными кванторами, предназначенные для спецификации циклических Σ-автоматов. Обе логики интерпретируются на множестве **Z** целых чисел, рассматриваемом как множество моментов дискретного времени, в котором функционируют специфицируемые автоматы. Синтаксис этих логик соответствует общепринятому синтаксису логик первого порядка с одноместными предикатами, двуместными отношениями $\leq$ и $\geq$, интерпретируемыми на множестве **Z** обычным образом, и функциями следования и предшествования [3]. В качестве сокращения для выражений с функциями следования или предшествования введены операции прибавления и вычитания единицы, что приводит к термам вида $(t+k)$, где t — предметная переменная, а $k \in \mathbf{Z}$. Атомарные формулы (атомы) имеют вид $p(\tau)$ или $\tau_1 \rho \tau_2$, где p — одноместный предикатный символ, $\rho \in \{<, >, \leq, \geq\}$, а τ, τ_1, τ_2 — термы. Формулы строятся из атомарных формул с помощью логических связок, кванторов, применяемых к предметным переменным, и скобок. Обозначение $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ указывает на то, что множество всех свободных переменных в формуле φ равно $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Спецификации в логиках LP и LF представляют собой замкнутые формулы вида $\forall t F(t)$.

Пусть $\Omega = \{p_1, \ldots, p_m\}$ — множество всех одноместных предикатных символов в формуле F (сигнатура формулы). Поскольку в формуле не интерпретированы только эти предикатные символы, интерпретацию формулы можно рассматривать как упорядоченный набор определенных на **Z** одноместных предикатов $P_1, \ldots, P_m$, соответствующих предикатным символам из Ω. Пусть Σ — множество всех двоичных векторов длины *m*. Тогда интерпретацию формулы F можно представить в виде бесконечного в обе стороны слова в алфавите Σ.

Бесконечное вправо слово $l = \sigma_1 \sigma_2 \ldots$ назовем сверхсловом или ω-словом, бесконечное влево слово $g = \ldots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0$ — обратным сверхсловом, а бесконечное в обе стороны слово $u = \ldots \sigma_{-1} \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \ldots$ назовем **Z**-словом. Для **Z**-слова u бесконечные его отрезки $\ldots \sigma_{k-1} \sigma_k$ и $\sigma_{k+1} \sigma_{k+2} \ldots$, где $k \in \mathbf{Z}$, назовем соответственно k-префиксом и k-суффиксом **Z**-слова u. Если значение позиции k в **Z**-слове несущественно, то будем говорить просто о префиксе и суффиксе **Z**-слова *u*. В дальнейшем не будем различать интерпретации для формулы F и соответствующие им **Z**-слова и будем говорить об истинности или ложности замкнутой формулы F на **Z**-слове. Таким образом, модель для замкнутой формулы F представляет собой **Z**-слово, на котором формула F истинна. Множество всех моделей для формулы F обозначим $M(F)$.

При установлении соответствия между автоматами и логическими формулами те и другие рассматриваются как формализмы для задания множеств сверхслов. Переход от **Z**-слов, ассоциируемых с формулами, к сверхсловам осуществляется путем рассмотрения всех суффиксов **Z**-слов. Таким образом, для формулы F, имеющей множество моделей $M(F)$, получается множество сверхслов

$$W(F)=\bigcup_{u\in M(F)}\{w\,|\,w\in \mathrm{Suf}(u)\},$$

где $\mathrm{Suf}(u)$ — множество всех суффиксов **Z**-слова u. Аналогично определяется множество обратных сверхслов

$$P(F)=\bigcup_{u\in M(F)}\{g\,|\,g\in \mathrm{Pref}(u)\},$$

где $\mathrm{Pref}(u)$ — множество всех префиксов **Z**-слова u.

Определение 1. Формула $F(t)$ с одной свободной переменной t называется k-ограниченной справа ($k\in\mathbf{Z}$), если для любого $\tau\in\mathbf{Z}$ значения формулы $F(\tau)$ на всех **Z**-словах, имеющих одинаковые $(\tau+k)$-префиксы, совпадают, т.е. значение $F(\tau)$ не зависит от значения предикатов при $t>\tau+k$.

Определение 2. Формула $F(t)$ с одной свободной переменной t называется k-ограниченной слева ($k\in\mathbf{Z}$), если для любого $\tau\in\mathbf{Z}$ значения формулы $F(\tau)$ на всех **Z**-словах, имеющих одинаковые $(\tau+k)$-суффиксы, совпадают, т.е. значение $F(\tau)$ не зависит от значения предикатов при $t\le\tau+k$.

Очевидно, что для всякого $k_1>k$ формула $F(t)$, k-ограниченная справа, также и k_1-ограничена справа, а для $k_1<k$ формула $F(t)$, k-ограниченная слева, также и k_1-ограничена слева. Формула $F(t)$ ограничена с обеих сторон, если существуют такие $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$, что $k_1<k_2$ и $F(t)$ k_1-ограничена слева и k_2-ограничена справа. Формулы вида $\forall tF(t)$ называются формулами прошедшего времени (Р-формулами), если $F(t)$ ограничена справа, и формулами будущего времени (F-формулами), если $F(t)$ ограничена слева. Если $F(t)$ ограничена с двух сторон, то формулу $\forall tF(t)$ можно трактовать либо как Р-формулу, либо как F-формулу.

Рассмотрим ограничения, которым удовлетворяют формулы логики LP.

Из всех подформул формулы $F(t)$ выделим множество кванторных подформул, т.е. подформул, состоящих из квантора и ассоциируемой с ним области действия. Для облегчения восприятия формул область действия квантора, отличную от атомарной формулы, будем заключать в скобки. Каждая кванторная подформула формулы $F(t)$ имеет не более двух свободных (в этой подформуле) переменных. Все такие подформулы с одной свободной переменной имеют вид $\exists t_1((t_1\le t+k)F_1(t_1))$ или $\forall t_1((t_1\le t+k)\to F_1(t_1))$, а подформулы с двумя свободными переменными имеют вид $\exists t_2((t_1<t_2\le t+k)F_2(t_2))$ или $\forall t_2((t_1<t_2\le t+k)\to F_2(t_2))$, где $k\in\mathbf{Z}$. Выражения $(t_1\le t+k)$ и $(t_1<t_2\le t+k)$ в этих подформулах называются ограничениями кванторов, а сами кванторы — ограниченными. Атомарные формулы вида $\tau_1\rho\tau_2$, где $\rho\in\{<,>,\le,\ge\}$, встречаются только в ограничениях кванторов. Из сказанного следует, что свободные переменные в кванторных подформулах также встречаются только в ограничениях кванторов. Заметим, что к ограниченным кванторам применимы те же равносильности, что и к обычным, например

$$\exists t_1((t_1\le t)(F_1(t_1)\vee F_2(t_1)))\Leftrightarrow \exists t_1((t_1\le t)F_1(t_1))\vee\exists t_1((t_1\le t)F_2(t_1)).$$

Очевидно, что формулы с одной свободной переменной, удовлетворяющие приведенным выше требованиям, ограничены справа. Таким образом, язык LP составляют Р-формулы.

Логика LF представляет собой фрагмент монадической логики первого порядка, в некотором смысле симметричный логике LP. Синтаксис языка LF совпадает с синтаксисом языка LP во всем, кроме ограничений кванторов. Так, все кванторные подформулы с одной свободной переменной имеют вид $\exists t_1((t_1 \geq t+k)F_1(t_1))$ или $\forall t_1((t_1 \geq t+k) \to F_1(t_1))$, а кванторные подформулы с двумя свободными переменными имеют вид $\exists t_2((t_1 > t_2 \geq t+k)F_2(t_2))$ или $\forall t_2((t_1 > t_2 \geq t+k) \to F_2(t_2))$, где $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, язык LF составляют F-формулы.

Формулы $F(t)$, 0-ограниченные справа или (–1)-ограниченные слева, рассматриваются как способ задания соответственно обратных сверхслов и сверхслов. Будем говорить, что 0-ограниченная справа формула $F(t)$ истинна на обратном сверхслове g, если $F(0)$ истинна на любом двустороннем сверхслове с 0-префиксом g. Аналогично (–1)-ограниченная слева формула $F(t)$ истинна на сверхслове l, если $F(0)$ истинна на любом двустороннем сверхслове с (–1)-суффиксом l.

Определение 3. 0-ограниченная справа формула $F(t)$ задает множество $R(F(t))$ всех тех обратных сверхслов, на которых она истинна.

Определение 4. (–1)-ограниченная слева формула $F(t)$ задает множество $S(F(t))$ всех тех сверхслов, на которых она истинна.

СПЕЦИФИЦИРУЕМЫЕ АВТОМАТЫ

В качестве автоматов над сверхсловами, ассоциируемых с формулами логик LP и LF, рассматриваются частичные неинициальные автоматы без выхода. Такой автомат $A = <\Sigma, Q, \delta>$, где Σ — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, а δ — частичная функция переходов, имеющая вид $\delta: Q \times \Sigma \to Q$, называется детерминированным Σ-автоматом. Если функция переходов имеет вид $\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$, Σ-автомат называется недетерминированным.

Пусть $q_1, q_2 \in Q$, а $\sigma \in \Sigma$. Тройку $< q_1, \sigma, q_2 >$ такую, что $q_2 \in \delta(q_1, \sigma)$, назовем переходом в автомате A из состояния q_1 в состояние q_2, а символ σ — отметкой этого перехода. Предполагается, что символы алфавита Σ представляют собой двоичные векторы длины m, что соответствует кодированию абстрактных символов наборами значений двоичных переменных из множества $\Omega = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Этим переменным соответствуют одноименные предикатные символы в логических спецификациях автоматов. Поэтому каждому такому вектору $\sigma \in \Sigma$ поставим в соответствие конъюнкцию вида $\widetilde{\sigma}(t) = \widetilde{p}_1(t) \& \ldots \& \widetilde{p}_m(t)$, где $\widetilde{p}_i(t) \in \{p_i(t), \overline{p}_i(t)\}$, принимающую значение «истина» на этом векторе. Отметим, что произвольное множество символов алфавита удобно задавать в виде пропозициональной формулы, в качестве имен переменных которой рассматриваются $p_1(t), \ldots, p_m(t)$.

Определение 5. Σ-автомат $A = <\Sigma, Q, \delta>$ называется циклическим, если для каждого $q \in Q$ существуют такие $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ и $q_1, q_2 \in Q$, что $q_1 \in \delta(q, \sigma_1)$ и $q \in \delta(q_2, \sigma_2)$.

В дальнейшем под Σ-автоматом будем понимать циклический Σ-автомат. Такой автомат можно однозначно охарактеризовать в терминах допустимых сверхслов.

Определение 6. Сверхслово $l = \sigma_1\sigma_2\ldots$ в алфавите Σ допустимо в состоянии q Σ-автомата A, если существует такое сверхслово состояний $q_0q_1q_2\ldots$, где $q_0 = q$, что для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $q_{i+1} \in \delta(q_i, \sigma_{i+1})$.

Сверхслово l допустимо для автомата A, если оно допустимо хотя бы в одном из его состояний. Множество всех сверхслов, допустимых для автомата A, называется ω-языком, задаваемым автоматом A.

ТЕОРЕМЫ О СПЕЦИФИКАЦИИ И ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА

Рассматриваются два варианта теоремы о спецификации: для языка LP с детерминированной семантикой и для языка LF с недетерминированной семантикой, которые устанавливают соответствие между структурой формулы спецификации и описанием специфицируемого ею автомата в терминах состояний и функции переходов [5]. Ниже более подробно рассмотрим вариант теоремы для языка LP и основанный на ней метод синтеза детерминированного Σ-автомата.

Теорема 1. Пусть A — детерминированный циклический Σ-автомат с состояниями $q_1, \ldots, q_n$, а $F_1(t), \ldots, F_n(t)$ — такие 0-ограниченные справа формулы, что для всех $i, j = 1, \ldots, n$ выполняются следующие условия:

1) $R(F_i(t)) \cap R(F_j(t)) = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) если σ — отметка перехода из q_i в q_j, то $R(F_i(t))\sigma \subseteq R(F_j(t))$.

Тогда формула

$$G = \forall t \left(\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1) \& \bigvee_{j=1}^{m_i} \tilde{\sigma}_{i_j}(t) \right),$$

где m_i — количество переходов в автомате A из состояния q_i , а $\tilde{\sigma}_{i_j}(t)$ — конъюнкция, соответствующая отметке σ_{i_j} j-го перехода из состояния q_i, специфицирует автомат A, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем $R(F_i(t)) \cap P(G) \neq \varnothing$. Здесь $R(F_i(t))$ — множество обратных сверхслов, задаваемое формулой $F_i(t)$, а $P(G)$ — множество префиксов всех моделей для формулы G.

Пусть формула $F(t)$ в спецификации $\forall t F(t)$ сигнатуры Ω представлена в виде

$$\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1) f_i(t),$$

где $F_i(t-1)$ — такие (–1)-ограниченные справа формулы, что для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ при $i \neq j$ формула $F_i(t) \& F_j(t)$ противоречива, а $f_i(t)$ — пропозициональная формула от переменных вида $p(t)$, где $p \in \Omega$. Представление $F(t)$ в таком виде называется нормальной формой, если для всех $i, j = 1, \ldots, n$ выполняется $F_i(t-1) f_i(t) \& F_j(t) \Leftrightarrow F_i(t-1) f_i'(t)$, где $f_i'(t)$ — формула того же вида, что и $f_i(t)$, причем $f_i'(t)$ может быть противоречием. Очевидно, что из $F_i(t-1) f_i(t) \& F_j(t) \Leftrightarrow F_i(t-1) f_i'(t)$ следует $F_i(t-1) f_i'(t) \& F_j(t) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F_i(t-1) f_i'(t)$, т.е. общезначимость формулы $\forall t (F_i(t-1) f_i'(t) \rightarrow F_j(t))$.

Спецификации $G = \forall t F(t)$, где $F(t)$ представлена в нормальной форме, поставим в соответствие Σ-автомат $A'(G)$, состояния которого $q_1, \ldots, q_n$ соответствуют формулам $F_1(t), \ldots, F_n(t)$ и $\delta_{A'}(q_i, \sigma) = q_j$, если и только если формула $\forall t (F_i(t-1) \tilde{\sigma}(t) \rightarrow F_j(t))$ общезначима. Заметим, что противоречивость $F_i(t) \& F_j(t)$ соответствует тому, что множества обратных сверхслов $R(F_i(t))$ и $R(F_j(t))$ не пересекаются, а общезначимость формулы $\forall t (F_i(t-1) f_i(t) \rightarrow F_j(t))$ соответствует тому, что для любого входного символа σ, принадлежащего множеству символов, задаваемому формулой $f_i(t)$, имеет место включение $R(F_i(t))\sigma \subseteq R(F_j(t))$. Если, кроме того, для каждого $i = 1, \ldots, n$ $R(F_i(t)) \cap P(G) \neq \varnothing$, то автомат $A'(G)$ удовлетворяет спецификации G. Если для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $R(F_i(t)) \cap P(G) = \varnothing$, то подформула $F_i(t-1) f_i(t)$ может быть удалена из формулы $F(t)$, а соответствующее ей состояние — из автомата $A'(G)$. Действительно, из $R(F_i(t)) \cap P(G) = \varnothing$ следует, что формула $F_i(t-1) f_i(t)$ ложна в каждой позиции любой модели для формулы G. Поэтому ее удаление не изменяет множество моделей и, следовательно, специфицируемый автомат.

Поскольку процесс проверки условия $R(F_i(t)) \cap P(G) \neq \varnothing$ весьма трудоемкий, предлагается эту проверку делать после получения автомата $A'(G)$ с учетом его структуры. Если $R(F_i(t)) \cap P(G) = \varnothing$, то состояние q_i этого автомата называется фиктивным и подлежит удалению. Удаление всех состояний автомата $A'(G)$ свидетельствует о противоречивости спецификации. Таким образом, синтез автомата состоит в последовательном выполнении двух процедур. Первая из них по спецификации $G = \forall tF(t)$ строит автомат $A'(G)$, для чего спецификация эквивалентно преобразуется в формулу $\forall tF'(t)$, где $F'(t)$ представлена в нормальной форме. Вторая процедура в автомате $A'(G)$ выделяет специфицируемый подавтомат, удаляя фиктивные состояния с последующим выделением максимального циклического подавтомата.

В настоящей статье ограничимся рассмотрением только первой процедуры, в основе которой лежит следующее утверждение.

Утверждение 1. Для всякой непротиворечивой формулы $\forall tF(t)$ языка LP существует эквивалентная ей формула $\forall tF'(t)$, где $F'(t)$ представлена в нормальной форме.

Рассмотрим конструктивное доказательство этого утверждения.

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛЫ $F(t)$

Построение нормальной формы для формулы $F(t)$ осуществляется за три этапа. На первом этапе формула преобразуется к виду

$$\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1) f_i(t), \tag{1}$$

где все $F_i(t-1)$ являются (–1)-ограниченными справа формулами, а $f_i(t)$ построены из атомов вида $p(t)$ с помощью логических связок. Чтобы более точно охарактеризовать вид такой формулы, введем понятие строгой k-ограниченности формул с одной свободной переменной.

Определение 7. Формула $F(t)$ называется строго k-ограниченной справа, если она k-ограничена справа и ни для какого $k_1 < k$ не является k_1-ограниченной справа.

Симметричным образом вводится понятие строгой k-ограниченности слева. Очевидно, что формула вида (1) строго 0-ограничена справа.

Для определения значения k такого, что формула $F(t)$ строго k-ограничена, вводится понятие правого ранга формулы $F(t)$ (обозначается $r_R(F(t))$) и левого ранга (обозначается $r_L(F(t))$). Значение $r_R(F(t))$ определяется следующим образом.

Пусть Qt обозначает любой из кванторов $\forall t$ или $\exists t$. Будем говорить, что квантор Qt_j подчинен квантору Qt_i, если он находится в области действия этого квантора. На значение правого ранга кванторной подформулы с ограниченным квантором вида $Qt_j \ (t_i < t_j \le t+k)$ влияет только правое ограничение $(t_j \le t+k)$. Поэтому такие подформулы будем рассматривать как формулы с одной свободной переменной t, не находящиеся в области действия никакого квантора, подчиненного Qt. Так, формула $F(t) = \exists t_1((t_1 \le t-2)F_1(t_1)\&$ $\& \forall t_2(t_1 < t_2 \le t) \to F_2(t_2))$ рассматривается как конъюнкция формул $F_1'(t) = \exists t_1((t_1 \le t-2)F_1(t_1))$ и $F_2'(t) = \forall t_2((t_2 \le t) \to F_2(t_2))$. Таким образом, каждая кванторная подформула рассматривается как формула с одной свободной переменной и с ограничением квантора вида $(t_j \le t+k)$. Значение правого ранга $r_R(F(t))$ определим индуктивно при такой трактовке всех кванторных подформул:

1) $r_R(p(t+k)) = k$, здесь и далее $k \in \mathbf{Z}$;

2) если $F(t)$ равна (рассматривается как) $\exists t_1((t_1 \le t+k)F_1(t_1))$ или $\forall t_1((t_1 \le t+k) \to F_1(t_1))$, то $r_R(F(t)) = r_1 + k$, где $r_1 = r_R(F_1(t_1))$;

3) если $F(t)$ построена с помощью логических связок из формул, трактуемых как $F_i(t)$, $i=1,\dots,m$, то $r_R(F(t)) = \max(r_R(F_1(t)),\dots, r_R(F_m(t)))$.

Так, для приведенной выше формулы $F(t)$ при $r_R(F_1(t_1)) = r_R(F_2(t_2)) = 0$ имеем $r_R(F_1'(t)) = -2$, а $r_R(F_2'(t)) = 0$. Поэтому правый ранг формулы $F(t)$ равен $\max(-2, 0) = 0$.

Заметим, что кванторную подформулу с двумя свободными переменными, например $\forall t_2((t_1 < t_2 \le t+k) \to F_2(t_2))$, при вычислении ранга следует рассматривать как относительную константу для квантора $\exists t_1$ или $\forall t_1$, в области действия которого она находится, и, следовательно, можно выносить из области его действия. Для этого подформула, соответствующая области действия квантора $\exists t_1$, преобразуется в дизъюнктивную нормальную форму, а для квантора $\forall t_1$ — в конъюнктивную нормальную форму. Заметим также, что $r_R(\exists t_1(t_1 \le t+k))$ естественно считать равным $-\infty$; таким образом, правый ранг формулы $\exists t_1((t_1 \le t)\ \forall t_2((t_1 < t_2 \le t-2) \to x(t_2)))$ равен $\max(-\infty, -2) = -2$.

Значение $r_L(F(t))$ определяется аналогичным образом с учетом различия в определениях k-префикса и k-суффикса. Так, в пп. 1, 2 значение $r_L(F(t))$ на единицу меньше, например $r_L(p(t+k)) = k-1$, а в п. 3 берется не max, а min рангов формул $F_1(t),\dots, F_m(t)$.

Следующее утверждение связывает понятие ранга формулы с понятием строгой k-ограниченности.

Утверждение 2. Формула $F(t)$ строго k-ограничена справа (слева) тогда и только тогда, когда $r_R(F(t)) = k$ $(r_L(F(t)) = k)$.

Если ранг подформулы $F(t)$ в Р-формуле $\forall t F(t)$ отличен от нуля, то она преобразуется в формулу ранга 0.

Утверждение 3. Для всякой Р-формулы $\forall t F(t)$ существует такая эквивалентная ей формула $\forall t F'(t)$, что $F'(t)$ — строго 0-ограничена справа.

Формула $F'(t)$ получается из $F(t)$ в результате подстановки $t-k$ вместо t, где k — правый ранг формулы $F(t)$.

Кванторную подформулу формулы $F(t)$, не являющуюся подформулой никакой другой кванторной подформулы этой формулы, назовем максимальной. Всякая формула $F(t)$ построена из атомарных формул и максимальных кванторных подформул (с одной и той же свободной переменной) с помощью логических связок. Очевидно, что в представлении (1) максимальные кванторные подформулы не могут иметь правого ранга, равного нулю. При наличии в $F(t)$ таких кванторных подформул они эквивалентно преобразуются в формулы, не содержащие максимальных кванторных подформул ранга 0.

Определение 8. Рангом квантора называется константа k в его ограничении вида $(t_1 \le t+k)$ или $(t_1 < t_2 \le t+k)$.

Для преобразования максимальных кванторных подформул ранга 0 используется операция понижения ранга квантора, состоящая в таком эквивалентном преобразовании кванторной подформулы, при котором ранг соответствующего ей квантора уменьшается на единицу. При этом используются следующие равносильности [6]:

$$\exists t_1((t_1 \le t+k)F_1(t_1)) \Leftrightarrow \exists t_1((t_1 \le t+k-1)F_1(t_1)) \vee F_1(t+k),$$

$$\forall t_1((t_1 \le t+k)F_1(t_1)) \Leftrightarrow \forall t_1((t_1 \le t+k-1)F_1(t_1)) \,\&\, F_1(t+k),$$

$$\forall t_2((t_1 < t_2 \le t+k) \to F_2(t_2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t_2((t_1 < t_2 \le t+k-1) \to F_2(t_2)) \,\&\, ((t_1 < t+k) \to F_2(t+k)),$$

$$\exists t_2((t_1 < t_2 \le t+k)F_2(t_2)) \Leftrightarrow \exists t_2((t_1 < t_2 \le t+k-1)F_2(t_2)) \vee (t_1 < t+k) \,\&\, F_2(t+k).$$

Здесь формулы $F_1(t+k)$ и $F_2(t+k)$ получены из формул $F_1(t_1)$ и $F_2(t_2)$ в результате замены соответствующей переменной на $t+k$. Так, если $F_1(t_1) = x(t_1-1)\,\bar{y}(t_1-1)$, а $k=1$, то $F_1(t+k)=x(t)\,\bar{y}(t)$.

Эти равносильности применяются итеративно к кванторным подформулам со свободной переменной t до тех пор, пока не останется максимальных кванторных подформул ранга 0. Такое преобразование подобно «спуску кванторов» в [6].

Приведем пример преобразования кванторной формулы $F(t)$, имеющей правый ранг, равный нулю.

Пример 1. Пусть

$$F(t)=\exists t_1(\underline{(t_1\le t)}\,\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\forall t_2((t_1<t_2\le t)\to\exists t_3(t_3\le t_2)\,\bar{y}(t_3))).$$

В этой формуле и в каждой последовательно получаемой формуле подчеркнуто ограничение квантора, к которому будет применена операция понижения ранга. В результате итеративного применения этой операции получим такую последовательность формул:

$$\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\;\forall t_2((t_1<t_2\le t)\to$$
$$\to\exists t_3((t_3\le t_2)\bar{y}(t_3))))\vee\bar{x}(t)\,y(t)\;\forall t_2((t<t_2\le t)\to\exists t_3((t_3\le t_2)\bar{y}(t_3)))=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\,\forall t_2(\underline{(t_1<t_2\le t)}\to\exists t_3((t_3\le t_2)\,\bar{y}(t_3))))\vee\bar{x}(t)\,y(t)=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2<t)\to\exists t_3(t_3\le t_2)\,\bar{y}(t_3))((t_1<t)\to$$
$$\to\exists t_3((t_3\le t)\bar{y}(t_3))))\vee\bar{x}(t)\,y(t)=\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2<t)\to$$
$$\to\exists t_3((t_3\le t_2)\,\bar{y}(t_3))))\exists t_3(\underline{(t_3\le t)}\,\bar{y}(t_3))\vee\bar{x}(t)\,y(t)=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)\,\bar{x}(t_1)\,y(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2<t)\to$$
$$\to\exists t_3((t_3\le t_2)\bar{y}(t_3))))(\exists t_3((t_3<t)\bar{y}(t_3))\vee\bar{y}(t))\vee\bar{x}(t)\,y(t).$$

На втором этапе полученная формула вида (1) преобразуется так, чтобы выполнялось условие: для всех $i, j\in\{1,\dots,n\}$ при $i\ne j$ формула $F_i(t-1)\& F_j(t-1)$ противоречива (условие ортогональности).

Прежде чем приступать к рассмотрению дальнейших преобразований, для каждой максимальной кванторной подформулы формулы $F(t)$ введем обозначение вида $\varphi_i(t+k)$, где φ_i — символы, не встречающиеся в формуле $F(t)$, k — правый ранг соответствующей подформулы, $i\in\{1,\dots,s\}$, а s — количество различных максимальных кванторных подформул в формуле $F(t)$. Выражения $\varphi_i(t+k)$ назовем псевдоатомами ранга k. Последующие эквивалентные преобразования будут применяться к формуле, полученной в результате замены всех максимальных кванторных подформул их обозначениями. Такая формула будет трактоваться двояко: либо как сокращенная запись для исходной формулы, либо как бескванторная формула, в которой символы φ_i $(i=1,\dots,s)$ рассматриваются как предикатные символы. В соответствии с этим будем различать два типа эквивалентности таких формул: слабую эквивалентность, соответствующую первому варианту трактовки формул, и сильную эквивалентность, соответствующую второму варианту. Очевидно, что из сильной эквивалентности формул следует их слабая эквивалентность.

Цель введения обозначений для кванторных подформул состоит в том, чтобы преобразования, выполняемые при построении нормальной формы, свести к преобразованиям пропозициональных формул, если атомы и псевдоатомы рассматривать как имена пропозициональных переменных. Представление формулы $F(t)$ в виде (1) после введения обозначений для максимальных кванторных подформул назовем дизъюнктивным представлением, а конъюнкции $F_i(t-1)f_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ — компонентами такого представления с левой частью $F_i(t-1)$ и правой частью $f_i(t)$.

К виду, удовлетворяющему условию ортогональности, формула преобразуется последовательным применением равносильности

$$F_i(t-1)f_i(t) \vee F_j(t-1)f_j(t) \Leftrightarrow F_i(t-1)\overline{F}_j(t-1)f_i(t) \vee \overline{F}_i(t-1)F_j(t-1)f_j(t) \vee$$
$$\vee F_i(t-1)F_j(t-1)(f_i(t) \vee f_j(t)) \qquad (2)$$

к тем парам компонентов формулы, которые не удовлетворяют этому условию. Такое преобразование осуществляется в рамках сильной эквивалентности, поэтому некоторые компоненты полученной формулы могут оказаться противоречивыми при первом варианте ее трактовки. Тем не менее, если полученная формула удовлетворяет условию ортогональности, то и формула с подставленными кванторными подформулами вместо их обозначений также удовлетворяет этому условию.

Дизъюнктивное представление формулы $F(t)$ назовем приведенным, если оно не содержит компонентов с одинаковыми левыми или правыми частями. Перед ортогонализацией формулы целесообразно осуществить ее приведение, т.е. вынести за скобки все одинаковые левые или правые части компонентов. Это, как правило, уменьшает количество применений равносильности (2) и количество компонентов в формуле, полученной в результате ортогонализации. Для упрощения выражений в процессе ортогонализации допускается применение только операций поглощения и приведения.

Результатом второго этапа построения нормальной формы является приведенное дизъюнктивное представление, удовлетворяющее условию ортогональности. Оно определяется однозначно с точностью до эквивалентности левых и правых частей компонентов.

На третьем этапе полученная формула преобразуется к виду, удовлетворяющему следующему условию: для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется равносильность $F_i(t-1)f_i(t)F_j(t) \Leftrightarrow F_i(t-1)f_i'(t)$ (заметим, что $f_i'(t)$ может быть противоречива). Поскольку результаты преобразования должны быть представлены в виде (1), получаемые в процессе преобразования формулы не должны содержать псевдоатомов ранга 0. Нетрудно видеть, что результатом третьего этапа является нормальная форма для исходной формулы $F(t)$. Преобразование, выполняемое на этом этапе, основано на следующем утверждении [4].

Утверждение 4. Пусть формула $F(t)$ представлена в виде $\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1)f_i(t)$, где все $F_i(t-1)$ являются (–1)-ограниченными справа формулами, а $f_i(t)$ построены из атомов вида $p(t)$ с помощью логических связок. Тогда $\forall t F(t) \Leftrightarrow \forall t(F(t) \& (\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t)))$.

Нормальная форма строится путем «расщепления» подформул $F_i(t-1)f_i(t)$, т.е. представления их в виде дизъюнкции подформул аналогичного вида. При этом каждый компонент $F_i(t-1)f_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ умножается последовательно на формулы $F_j(t)$ $(j=1, \ldots, n)$. Если формула $F_j(t)$ содержит максимальные кванторные подформулы, правый ранг которых равен нулю (псевдоатомы вида $\varphi(t)$), то ее следует представить в виде, не содержащем таких подформул. Для этого каждая подформула $\varphi_i(t)$, входящая в $F_j(t)$, заменяется эквивалентной ей формулой, содержащей одно или более вхождений формулы $\varphi_i(t-1)$ и, возможно, другие максимальные кванторные подформулы, правый ранг которых не превышает -1. Назовем такое представление формулы $\varphi_i(t)$ ее

1-разверткой. Если появляются новые максимальные кванторные подформулы, для них вводятся новые обозначения.

Построение 1-развертки формулы $\varphi(t)$ осуществляется путем понижения на единицу ранга всех входящих в нее кванторов, соответствующих кванторным подформулам, которые содержат переменную t. Проиллюстрируем этот процесс на примере.

Пример 2. Здесь, как и в примере 1, подчеркнуто ограничение квантора, к которому будет применена операция понижения ранга.

Пусть

$$\varphi(t)=\exists t_1(\underline{(t_1\le t)}P(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2\le t-1)\to Q(t_2)))=$$
$$=\exists t_1((t_1\le t-1)P(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2\le t-1)\to$$
$$\to Q(t_2)))\vee P(t)\,\forall t_2((t<t_2\le t-1)\to Q(t_2)).$$

Поскольку формула $(t<t_2\le t-1)$ ложна, кванторная подформула с этим ограничением квантора истинна и может быть удалена. В результате получим

$$\varphi(t)=\exists t_1((t_1\le t-1)P(t_1)\,\forall t_2(\underline{(t_1<t_2\le t-1)}\to Q(t_2)))\vee P(t)=$$
$$=\exists t_1((t_1\le t-1)P(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2\le t-2)\to Q(t_2))\&\,((t_1<t-1)\to Q(t-1)))\vee P(t).$$

Формула $(t_1<t-1)\to Q(t-1)$ находится в области действия квантора $\exists t_1(t_1\le t-1)$. Значение $t_1=t-1$, принадлежащее области ограничения этого квантора, не удовлетворяет условию $(t_1<t-1)$ и, следовательно, при $t_1=t-1$ умножать $\varphi(t-1)=\exists t_1((t_1\le t-1)P(t_1)\,\forall t_2((t_1<t_2\le t-2)\to Q(t_2)))$ на $Q(t-1)$ не нужно. Поэтому, чтобы «убрать» условие $(t_1<t-1)$, следует добавить к полученной формуле формулу $P(t-1)$, поглощающую произведение $\varphi(t-1)Q(t-1)$, которое при $t_1=t-1$ равно $P(t-1)Q(t-1)$. В результате получим $\varphi(t)=\varphi(t-1)Q(t-1)\vee P(t-1)\vee P(t)$, что представляет собой 1-развертку формулы $\varphi(t)$. Если условие $(t_1<t+k)$ в применяемой равносильности совпадает с ограничением соответствующего квантора, то это условие можно удалить.

Рассмотрим случай, когда в 1-развертке формулы $\varphi(t)$ появляются новые максимальные кванторные подформулы и, следовательно, новые псевдоатомы.

Пример 3. Пусть

$$\varphi(t)=\exists t_1(\underline{(t_1\le t)}P(t_1)\forall t_3((t_3<t_1)\to R(t_3))\,\forall t_2((t_1<t_2\le t)\to Q(t_2)))=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)P(t_1)\,\forall t_3((t_3<t_1)\to R(t_3))\,\forall t_2(\underline{(t_1<t_2\le t)}\to$$
$$\to Q(t_2)))\vee P(t)(\forall t_3(t_3<t)\to R(t_3))=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)P(t_1)\,\forall t_3((t_3<t_1)\to R(t_3))\,\forall t_2((t_1<t_2<t)\to$$
$$\to Q(t_2))\&\,((t_1<t)\to Q(t)))\vee P(t)\,\forall t_3((t_3<t)\to R(t_3))=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)P(t_1)\,\forall t_3((t_3<t_1)\to R(t_3))\,\forall t_2((t_1<t_2<t)\to$$
$$\to Q(t_2)))\&\,Q(t)\vee P(t)\,\forall t_3((t_3<t)\to R(t_3)).$$

Таким образом,

$$\varphi(t)=\varphi(t-1)Q(t)\vee\varphi_1(t-1)P(t),$$

где $\varphi_1(t)=\forall t_3((t_3\le t)\to R(t_3))$.

Умножение компонента на $F_j(t)$ $(j\in\{1,\dots,n\})$ назовем шагом его расщепления. Если произведение $F_i(t-1)f_i(t)F_j(t)$ противоречиво либо имеет вид $F_i(t-1)f_i'(t)$, где $f_i'(t)\Rightarrow f_i(t)$, то на этом шаге расщепления формулы $F_i(t-1)f_i(t)$ не происходит. В противном случае будем говорить, что расщепление произошло, и если произведение состоит из нескольких компонентов, его следует ортогонализировать. Результат расщепления компонента $F_i(t-1)f_i(t)$ представляет собой дизъюнкцию компонентов, полученных на всех n шагах его расщепления. Заметим, что дизъюнкция компонентов, полученных на различных шагах расщепления, может не удовлетворять условию ортогональности, поэтому результат расщепления также следует ортогонализировать. При этом допускается применение только равносильности (2) и операции поглощения. Очевидно, что каждая формула, получаемая при расщеплении одного компонента, ортогональна каждой формуле, получаемой при расщеплении другого компонента.

Расщепление всех компонентов рассматриваемой дизъюнктивной формы назовем циклом ее расщепления. Если в течение такого цикла произошло расщепление хотя бы одного компонента, то выполняется очередной цикл расщепления. При этом нерасщепленные компоненты умножаются только на те $F_j(t)$, которые получены в результате расщепления компонентов в предыдущем цикле. Этап расщепления завершается, когда в очередном цикле не произошло расщепления ни одного компонента.

В процессе расщепления некоторые компоненты следует удалять. Так, если произведение компонента на все $F_j(t)$, $j=1,\ldots,n$, противоречиво, то его следует удалить, поскольку ему соответствует состояние, из которого отсутствуют переходы. Если для всех $i=1,\ldots,n$ произведение $F_i(t-1)f_i(t)$ на $F_j(t)$ противоречиво, то компонент $F_j(t-1)f_j(t)$ следует удалить, поскольку ему соответствует недостижимое состояние.

Из того, что операция расщепления компонентов применяется к пропозициональной формуле, следует завершимость третьего этапа построения нормальной формы.

Приведем пример построения нормальной формы для формулы $\varphi(t)$.

Пример 4. Пусть

$$\varphi(t)=\exists t_1((t_1\le t)\bar{x}(t_1)y(t_1)\forall t_2((t_1<t_2\le t-1)\to\exists t_3((t_3\le t_2+1)\bar{y}(t_3)))).$$

Преобразуем выражение для $\varphi(t)$ так, чтобы оно не содержало максимальных кванторных подформул ранга 0. При понижении ранга квантора $\exists t_1(t_1\le t)$ получим

$$\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)y(t_1)\forall t_2((t_1<t_2\le t-1)\to\exists t_3((t_3\le t_2+1)\bar{y}(t_3))))\vee\bar{x}(t)y(t).$$

Поскольку правый ранг подформулы $\forall t_2((t_1<t_2\le t-1)\to$ $\to\exists t_3((t_3\le t_2+1)\bar{y}(t_3)))$ равен нулю, необходимо осуществить понижение ранга квантора $\forall t_2(t_1<t_2\le t-1)$. В результате получим

$$\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)y(t_1)\forall t_2((t_1<t_2\le t-2)\to\exists t_3((t_3\le t_2+1)\bar{y}(t_3)))\&$$
$$\&((t_1<t-1)\to\exists t_3((t_3\le t)\bar{y}(t_3))))\vee\bar{x}(t)y(t)=$$
$$=\exists t_1((t_1<t)\bar{x}(t_1)y(t_1)\forall t_2((t_1<t_2\le t-2)\to$$
$$\to\exists t_3((t_3\le t_2+1)\bar{y}(t_3))))\&\exists t_3((t_3\le t)\bar{y}(t_3))\vee\bar{x}(t)y(t)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1).$$

Заменив $\exists t_3((t_3\le t)\bar{y}(t_3))$ на $\exists t_3((t_3<t)\bar{y}(t_3))\vee\bar{y}(t)$, получим

$$\varphi(t)=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee\bar{x}(t)y(t)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1),$$

где $\varphi_1(t)=\exists t_3((t_3\le t)\bar{y}(t_3))$. Соответственно

$$\varphi_1(t)=\varphi_1(t-1)\vee\bar{y}(t),\ \bar{\varphi}_1(t)=\bar{\varphi}_1(t-1)y(t),\ \bar{\varphi}(t)=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee$$
$$\vee\bar{y}(t-1))(x(t)\vee\bar{y}(t))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))x(t)y(t).$$

После ортогонализации дизъюнктивного представления формулы $\varphi(t)$ получим

$$\varphi(t)=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1))\vee\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))\bar{x}(t)y(t)\vee$$
$$\vee\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))(\bar{x}(t)\vee\bar{y}(t)).$$

Введем следующие обозначения:

$$F_1(t-1)=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1),$$

соответственно

$$F_1(t)=\varphi(t)\varphi_1(t)\vee\bar{x}(t)y(t)=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee$$
$$\vee\varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t)\vee\bar{x}(t)y(t);$$
$$F_2(t-1)=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1)),\ F_2(t)=\bar{\varphi}(t)(x(t)\vee\bar{y}(t))=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee$$
$$\vee\bar{y}(t-1))(x(t)\vee\bar{y}(t))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))x(t)y(t);$$
$$F_3(t-1)=\varphi(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1)),\ F_3(t)=\varphi(t)\bar{\varphi}_1(t)(x(t)\vee\bar{y}(t))=$$
$$=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee\bar{x}(t)y(t)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1))\bar{\varphi}_1(t-1)x(t)y(t)=$$
$$=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t).$$

Расссмотрим расщепление компонентов

$$F_1(t-1)\&F_1(t)=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1))(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee$$
$$\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t)\vee\bar{x}(t)y(t))=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee$$
$$\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{x}(t)y(t)=$$
$$=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)(\bar{x}(t)\vee\bar{y}(t)).$$

После ортогонализации получим

$$(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)(\bar{x}(t)\vee\bar{y}(t)).$$

Затем получим

$$F_1(t-1)\&F_2(t)=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1))(\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))\&$$
$$\&(x(t)\vee\bar{y}(t))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))x(t)y(t))=0$$

(здесь и далее символ 0 обозначает противоречие),

$$F_1(t-1)\&F_3(t)=$$
$$=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1))(\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t))=$$
$$=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t).$$

После ортогонализации дизъюнкции результатов расщепления на каждом шаге получим $(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)$. Обозначим

$$F_{11}(t-1)=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)$$

и

$$F_{12}(t-1)=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1).$$

Продолжим расщепление остальных компонентов:

$$F_2(t-1)\bar{x}(t)y(t)\&F_1(t)=$$
$$=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))\bar{x}(t)y(t)(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee\varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee$$
$$\vee\varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t)\vee\bar{x}(t)y(t))=$$
$$=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))\bar{x}(t)y(t)=F_2(t-1)\bar{x}(t)y(t);$$
$$F_2(t-1)\bar{x}(t)y(t)\&F_2(t)=$$
$$=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))\bar{x}(t)y(t)(\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee y(t-1))\&$$
$$\&(x(t)\vee\bar{y}(t))\vee\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee\bar{y}(t-1))x(t)y(t))=0;$$

$$F_2(t-1)\bar{x}(t)y(t)\& F_3(t)=$$
$$=\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))\bar{x}(t)y(t)\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t)=0;$$
$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_1(t)=\varphi(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\&$$
$$\&(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee$$
$$\vee \bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t)\vee \bar{x}(t)y(t))= F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t));$$
$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_2(t)=\varphi(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\&$$
$$\&(\bar{\varphi}(t-1)(x(t-1)\vee y(t-1))(x(t)\vee \bar{y}(t))\vee \bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))x(t)y(t))=0;$$
$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_3(t)=\varphi(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\&$$
$$\&\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t)=0.$$

На этом первый цикл расщеплений заканчивается. Произведение всех компонентов исходного дизъюнктивного представления формулы $\varphi(t)$ на $F_2(t)$ противоречиво, поэтому в синтезируемом автомате отсутствуют переходы в состояния, определяемые $F_2(t)$; следовательно, соответствующий компонент можно удалить. Таким образом, имеем

$$\varphi(t)=F_{11}(t-1)\vee F_{12}(t-1)\vee F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))=$$
$$=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))\vee \bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee$$
$$\vee \varphi(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)(x(t-1)\vee \bar{y}(t-1))(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t)),$$
$$F_{11}(t)=\varphi(t)\varphi_1(t)\vee \varphi_1(t)\bar{x}(t)y(t)=$$
$$=\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee$$
$$\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t)y(t)\vee \bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t),$$
$$F_{12}(t)=\bar{\varphi}_1(t)\bar{x}(t)y(t)=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t)y(t),$$
$$F_3(t)=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t).$$

Второй цикл расщепления:

$$F_{11}(t-1)\& F_{11}(t)=$$
$$=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee$$
$$\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t)y(t)\vee \bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t))= F_{11}(t-1),$$
$$F_{11}(t-1)\& F_{12}(t)=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t)y(t)=0,$$
$$F_{11}(t-1)\& F_3(t)=$$
$$=(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1))\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t)=0;$$
$$F_{12}(t-1)\& F_{11}(t)=$$
$$=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)(\varphi(t-1)\varphi_1(t-1)\vee \varphi(t-1)\bar{y}(t)\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\vee$$
$$\vee \varphi_1(t-1)\bar{x}(t)y(t)\vee \bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{y}(t))=F_{12}(t-1)\bar{y}(t),$$
$$F_{12}(t-1)\& F_{12}(t)=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t)y(t)=F_{12}(t-1)\bar{x}(t)y(t),$$
$$F_{12}(t-1)\& F_3(t)=$$
$$=\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)\bar{\varphi}_1(t-1)\bar{x}(t-1)y(t-1)x(t)y(t)=F_{12}(t-1)x(t)y(t).$$

Результаты расщепления компонента $F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))$ приведем без промежуточных выкладок:

$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_{11}(t)=F_3(t-1)\bar{y}(t),$$
$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_{12}(t)=F_3(t-1)\bar{x}(t)y(t),$$
$$F_3(t-1)(\bar{x}(t)\vee \bar{y}(t))\& F_3(t)=0.$$

В этом цикле ни один компонент не расщепился, поэтому процесс построения нормальной формы для формулы $\varphi(t)$ закончен. Полученной нормальной форме соответствует Σ-автомат, приведенный на рис. 1, где номера состояний совпадают с номерами компонентов нормальной формы.

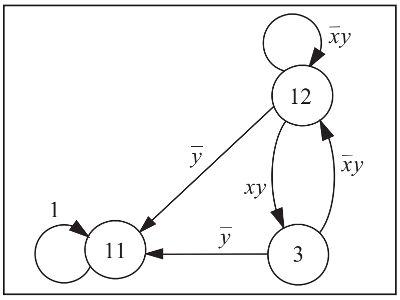

Рис. 1

СИНТЕЗ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АВТОМАТА ПО СПЕЦИФИКАЦИИ В ЯЗЫКЕ LF

Приведем соответствующее определение нормальной формы для формулы $F(t)$.

Пусть формула $F(t)$ в спецификации $\forall t F(t)$ сигнатуры Ω представлена в виде

$$\bigvee_{i=1}^{n} f_i(t) F_i(t+1), \tag{3}$$

где $F_i(t+1)$ — такие 0-ограниченные слева формулы, что для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ при $i \neq j$ формула $F_i(t) \& F_j(t)$ противоречива, а $f_i(t)$ — пропозициональная формула от переменных вида $p(t)$, где $p \in \Omega$. Представление $F(t)$ в таком виде называется нормальной формой, если для всех $i, j = 1, \ldots, n$ выполняется $f_i(t) F_i(t+1) F_j(t) \Leftrightarrow f_i'(t) F_i(t+1)$, где $f_i'(t)$ — формула того же вида, что и $f_i(t)$ и $f_i'(t) \Rightarrow f_i(t)$, причем $f_i'(t)$ может быть противоречием.

Спецификации $G = \forall t F(t)$, где $F(t)$ представлена в нормальной форме, поставим в соответствие Σ-автомат $A'(G)$, состояния которого $q_1, \ldots, q_n$ соответствуют формулам $F_1(t), \ldots, F_n(t)$ и $q_i \in \delta_{A'}(q_j, \sigma)$, если и только если формула $\forall t(\tilde{\sigma}(t) F_i(t+1) \to F_j(t))$ общезначима.

Очевидно, что формула вида (3) строго (–1)-ограничена слева. Если ранг подформулы $F(t)$ в формуле $\forall t F(t)$ отличен от –1, то эта подформула эквивалентно преобразуется в формулу ранга –1 путем подстановки $t-k-1$ вместо t, где k — левый ранг формулы $F(t)$. Для преобразования максимальных кванторных подформул ранга –1 применяется операция повышения ранга квантора, состоящая в таком эквивалентном преобразовании кванторной подформулы, при котором ранг соответствующего ей квантора увеличивается на единицу. Используемые для этого равносильности легко получаются из равносильностей для понижения ранга квантора. Так, например, $\exists t_1((t_1 \geq t) F_1(t_1)) \Leftrightarrow \exists t_1((t_1 \geq t+1) F_1(t_1)) \vee F_1(t)$.

При ортогонализации формулы $F(t)$ используется соотношение, аналогичное (2).

Для построения нормальной формы выполняется «расщепление» компонентов $f_i(t) F_i(t+1)$ $(i = 1, \ldots, n)$, для чего каждый из них последовательно умножается на формулы $F_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$. При этом каждая подформула $\varphi_i(t)$, входящая в $F_j(t)$, заменяется ее 1-разверткой. Построение 1-развертки формулы $\varphi(t)$ осуществляется путем повышения на единицу ранга всех входящих в нее кванторов, определяющих кванторные подформулы, которые содержат переменную t.

Таким образом, алгоритм синтеза автомата, специфицированного в языке LF, совпадает с алгоритмом синтеза в языке LP при соответствующей модификации используемых в нем понятий. Проиллюстрируем на примере работу этого алгоритма.

Пример 5. Пусть $F(t) = a(t) \to \exists t_1((t_1 > t) a(t_1)\ \forall t_2((t_1 > t_2 > t) \to b(t_2)))$, $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Введя обозначение $\varphi(t+1)$ для максимальной кванторной подформулы формулы $F(t)$ и выполнив ортогонализацию, получим $F(t) = \bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1) \vee \varphi(t+1)$. Заметим, что $\bar{a}(t) = b(t) \vee c(t)$ и произведение двух различных положительных (без отрицания) атомов одного и того же ранга равно нулю.

Обозначим $F_1(t+1) = \bar{\varphi}(t+1)$ и $F_2(t+1) = \varphi(t+1)$. При расщеплении используются 1-развертки $F_1(t) = \bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1) \vee c(t)$ и $F_2(t) = b(t)\varphi(t+1) \vee a(t)$.

Расщепление компонента $\bar{a}(t)F_1(t+1)$:

$$\bar{a}(t)F_1(t+1)\,\&\,F_1(t)=\bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1)(\bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1)\vee c(t))=$$
$$=\bar{a}(t)F_1(t+1)=(b(t)\vee c(t))F_1(t+1),$$
$$\bar{a}(t)F_1(t+1)\,\&\,F_2(t)=\bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1)(b(t)\varphi(t+1)\vee a(t))=0.$$

Расщепление компонента $F_2(t+1)$:

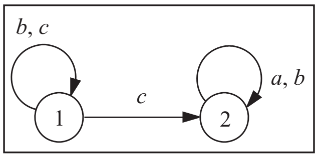

Рис. 2

$$F_2(t+1)\,\&\,F_1(t)=$$
$$=\varphi(t+1)(\bar{a}(t)\bar{\varphi}(t+1)\vee c(t))=c(t)F_2(t+1),$$
$$F_2(t+1)\,\&\,F_2(t)=$$
$$=\varphi(t+1)(b(t)\varphi(t+1)\vee a(t))=(a(t)\vee b(t))F_2(t+1).$$

Поскольку ни один из компонентов не расщепился, на этом построение нормальной формы заканчивается. Соответствующий автомат приведен на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Соответствие между формулами рассмотренных в статье языков спецификации и специфицируемыми ими автоматами устанавливается на основе совпадения ω-языков, задаваемых формулами и автоматами. Поскольку для логик LP и LF ω-язык, определяемый формулой спецификации, может быть задан как детерминированным, так и недетерминированным автоматом, для уточнения такого соответствия следует указать вид специфицированного автомата: детерминированный или недетерминированный, что определяет выбор алгоритма синтеза.

Рассмотренные в статье методы синтеза основаны на двух вариантах теоремы о спецификации [5]: для языка LP с детерминированной семантикой и для языка LF с недетерминированной семантикой. Хотя для обоих языков в [3] определены как детерминированная, так и недетерминированная семантики, в настоящей статье рассмотрен практически один и тот же алгоритм, который по формуле языка LP строит нормальную форму формулы $F(t)$, соответствующую детерминированному Σ-автомату, а по формуле языка LF — нормальную форму, соответствующую недетерминированному автомату. Оба варианта алгоритма синтеза основаны на расщеплении компонентов дизъюнктивного представления формулы $F(t)$ в спецификации $\forall tF(t)$, удовлетворяющего условию ортогональности. Требование ортогональности компонентов определяется условиями теорем о спецификации, которые, в свою очередь, связаны с двумя видами семантики, использующими разбиение множества префиксов (для детерминированной семантики) и множества суффиксов (для недетерминированной семантики) $\mathbf{Z}$-слов, соответствующих моделям для формулы $\forall tF(t)$. Один и тот же алгоритм ортогонализации для формул языка LP определяет разбиение множества префиксов моделей для спецификации $\forall tF(t)$, а для формул языка LF — разбиение множества суффиксов соответствующих моделей.

Из того, что расщепление компонентов осуществляется для пропозициональной формулы, следует завершимость процесса построения нормальной формы. Из этого также вытекает, что семантика языка LP (LF) непротиворечивой формуле ставит в соответствие конечный автомат, количество состояний которого в общем случае может превышать количество определяемых семантикой классов эквивалентности множества префиксов (суффиксов) $\mathbf{Z}$-слов, соответствующих моделям для формулы $\forall tF(t)$.

Алгоритм построения нормальной формы, которая может содержать тождественно ложные компоненты, не решает полностью проблему синтеза автомата. Переход от формул языков LP или LF к пропозициональным формулам позволяет на рассмотренном этапе устранить сложности, связанные с проверкой противоречивости формул первого порядка. Частично они переносятся на этап проверки фиктивности формул, который в настоящей статье не рассматривался. На этом этапе устраняются тождественно-ложные компоненты нормальной формы путем проверки их выполнимости на модели, в качестве которой выступает автомат, соответствующий полученной нормальной форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чеботарев А.Н. Регулярная форма спецификации детерминированных автоматов в языке L. *Прикладная дискретная математика.* 2010. № 4. С. 64–72.
2. Чеботарев А.Н. Расширение логического языка спецификации и проблема синтеза. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 6. С. 11–27.
3. Чеботарев А.Н. Некоторые подмножества монадической логики первого порядка (MFO), используемые для спецификации и синтеза Σ-автоматов. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 4. С. 22–36.
4. Чеботарев А.Н. Синтез процедурного представления автомата, специфицированного в логическом языке L*. I. *Кибернетика и системный анализ.* 1997. № 4. С. 60–74.
5. Чеботарев А.Н. Проблемы синтеза Σ-автоматов, специфицированных в языках LP и LF логики первого порядка. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53. № 5. С. 22–33.
6. Кобринский Н.Е., Трахтенброт Б.А. Введение в теорию конечных автоматов. Москва: Физматгиз, 1962. 405 с.

Надійшла до редакції 16.08.2017

А.М. Чеботарьов

СИНТЕЗ Σ-АВТОМАТІВ, ЩО СПЕЦИФІКОВАНІ У ЛОГІЧНИХ МОВАХ LP І LF ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Анотація. Наведено методи синтезу Σ-автоматів за специфікаціями у мові LP з детермінованою семантикою і у мові LF з недетермінованою семантикою. В основі цих методів лежить еквівалентне перетворення формули вигляду $\forall tF(t)$ в так звану нормальну форму, структура якої відповідає графу переходів специфікованого Σ-автомата.

Ключові слова: Σ-автомат, LP-формула, LF-формула, автоматна семантика, нормальна форма, ортогоналізація.

A.N. Chebotarev

SYNTHESIS OF Σ-AUTOMATA SPECIFIED IN THE FIRST ORDER LOGICAL LANGUAGES LP AND LF

Abstract. This paper presents methods for synthesizing Σ-automata from specifications in the language LP with deterministic semantics and in the language LF with nondeterministic semantics. These methods are based on the equivalent transformation of the formula of the form $\forall tF(t)$ into a so called normal form whose structure corresponds to the state transition graph of a specified automaton.

Keywords: Σ-automaton, LP-formula, LF-formula, automatic semantics, normal form, orthogonalization.

Чеботарев Анатолий Николаевич,
доктор техн. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: ancheb@gmail.com.