УДК 519.718.2

О. Ю. Лозинський, С. В. Щербовських

ОПТИМІЗАЦІЯ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИВАЛІСТЮ ТЕСТУВАННЯ ТА ОБСЯГОМ ВИБІРКИ ДЛЯ ОБ'ЄКТІВ З ВЕЙБУЛІВСЬКОЮ МОДЕЛЛЮ ВІДМОВ

The paper is devoted to problem of optimal ratio definitions between sample amount and test duration. It's supposed that life items are distributed by Weibull failure model. The optimal ratio is calculated by minimization cost-function.

Визначено оптимальне співвідношення між обсягом вибірки та тривалістю тестування. Розглянуто тестування об'єктів, напрацювання яких розподілено за моделлю відмов Вейбулла. Оптимальне співвідношення визначено з умови мінімізації витрат на проведення такого тестування.

Постановка проблеми. Об'єкти, на які покладено виконання відповідальні функцій, повинні забезпечувати задані показники безвідмовності. Наближену оцінку таких показників отримують розрахунковим шляхом, на основі аналізу систем-аналогів та спеціалізованої довідкової літератури. А уточнену оцінку – безпосереднім тестування. Під час проведення тестувань похибка та достовірність результату тестування забезпечується певним мінімально необхідним обсягом вибірки N_{min}, проте можуть накладатись додатково такі обмеження.

Обмеження на час, яке полягає в тому, що тривалість тестування не може перевищувати заданого значення T. За такого обмеження необхідно визначити, до якої величини необхідно збільшити обсяг вибірки, щоб скоротити тривалість тестування до заданого значення. Обмеження на обсяг вибірки, яке полягає в тому, що тестується заданий обсяг вибірки $N > N_{\min}$. За такого обмеження необхідно визначити, на скільки доцільно скоротити тривалість тестування.

Проблема полягає у визначенні оптимального співвідношення між обсягом вибірки та тривалістю тестування з погляду мінімізації витрат для об'єктів, напрацювання яких розподілено за моделлю відмов Вейбулла.

Розв'язання поставленої проблеми забезпечить формування рекомендацій щодо обсягу вибірки та тривалості тестування з метою перевірки значення параметрів моделі відмов Вейбулла. Вибір оптимальних співвідношень при заданих значеннях похибки та достовірності результатів забезпечує економію матеріальних ресурсів та часу під час проектування технічних об'єктів.

Аналіз останніх досліджень. Для визначення обсягу вибірки та тривалості тестування існують методи, які ґрунтуються на емпіричних та напівемпіричних аналітичних виразах та таблицях [1–3]. Важливим аспектом проблеми є можливість аналізу планів тестування для об'єктів не лише з експоненціальною моделлю відмов [4, 5]. Залежно від мети тестування визначення обсягу вибірки та тривалості тестування суттєво різняться, а для деяких різновидів тестування, такі вирази відсутні. Сьогодні не існує єдиного методологічного підходу щодо розв'язання вказаної проблеми. Подальші дослідження у цьому напрямі мають міждисциплінарний характер і повинні поєднувати різні науки, такі як економіка, надійність, математичне моделювання тощо, про що зазначено у [6, 7].

Постановка завдань.

1. Сформувати функціонал загальних витрат на проведення тестування.

2. Розробити процедуру обчислення складових функціоналу загальних витрат.

3. Отримати графічні залежності оптимального співвідношення між тривалістю тестування та обсягом вибірки для моделі відмов Вейбулла.

Виклад основного матеріалу. Метою проведення тестування є уточнення числових значень параметра моделі відмов Вейбулла.

Співвідношення між обсягом вибірки N та тривалістю тестування T для проведення тестування визначаємо з умови мінімізації функціоналу витрат. Приймаємо, що функціонал витрат є сумою трьох доданків:

$$Q(N,T) = Q_1(N,T) + Q_2(N,T) + Q_3(N,T). \quad (1)$$

де Q_1 – витрати, пов’язані із напрацюванням об’єктів та засобів діагностики під час тестування; Q_2 – середні витрати через відмови об’єктів під час тестування; Q_3 – середні витрати через недосягнення мети тестування.

Визначимо вираз для обчислення кожного типу із перелічених вище витрат. Приймаємо, що витрати, пов’язані із напрацюванням об’єктів та засобів їх діагностики, визначають згідно з

$$Q_1(N,T) = q_1 \cdot N \cdot T, \quad (2)$$

де q_1 – витрати на один об’єкт за одиницю часу, пов’язані із напрацюванням власне об’єкта та засобів його технічної діагностики під час тестування.

Такі витрати можуть охоплювати вартість електроенергії, що споживається об’єктом під час тестування, паливо-мастильних матеріалів, зарплату персоналу, який обслуговує тестування, і засоби технічної діагностики об’єктів тощо. Залежно від конкретного об’єкта витрати мають різну структуру. Зі збільшенням обсягу вибірки та тривалості тестування такі втрати пропорційно зростають.

Витрати через відмову об’єктів під час тестування визначаємо згідно з

$$Q_{2K} = q_2 \cdot K, \quad (3)$$

де q_2 – витрати на один об’єкт, пов’язані із відмовою цього об’єкта під час тестування; K – кількість об’єктів, що відмовило.

Такі витрати можуть охоплювати вартість власне об’єкта, а також витрати, пов’язані із його вилученням із тестування. Залежно від конкретного об’єкта витрати мають різну структуру.

Формулу (3) безпосередньо застосувати для визначення такого типу витрат некоректно, оскільки кількість об’єктів, що відмовить під час тестування, є випадковою величиною, яка залежить від обсягу вибірки та тривалості тестування.

Введемо поняття середніх витрат через відмови об’єктів. Такі витрати є сумою доданків. Кожний доданок є добутком витрат через відмову вказаного числа об’єктів, що множиться на ймовірність появи такого числа відмов

$$Q_2(N,T) = q_2 \cdot 0 \cdot p_{N,T}(0) + q_2 \cdot 1 \cdot p_{N,T}(1) + \ldots + q_2 \cdot K \cdot p_{N,T}(K) + \ldots + q_2 \cdot N \cdot p_{N,T}(N),$$

де $p_{N,T}(K)$ – функція ймовірності виникнення K відмов у вибірці, що містить N об’єктів і тестується протягом часу T.

Оскільки перший доданок відповідає випадку відсутності відмов, то його у записі опускаємо. Середні витрати через відмови об’єктів у вибірці під час тестування визначаються згідно з

$$Q_2(N,T) = q_2 \cdot \sum_{K=1}^{N} K \cdot p_{N,T}(K). \quad (4)$$

Зі збільшенням обсягу вибірки та тривалості тестування такі втрати мають тенденцію до зростання. Значення функції ймовірності виникнення K відмов у вибірці обсягом N об’єктів за час T визначаємо так:

$$p_{N,T}(K) = \frac{N!}{(N-K)!\cdot K!} R^{N-K}(T) \cdot (1 - R(T))^K, \qquad (5)$$

де R – модель відмов об'єкта, яка задана функцією ймовірності безвідмовної роботи.

Цей вираз відомий у літературі як формула Бернуллі. Результатом проведення тестування є поява на момент часу T не менше N_K числа відмов у вибірці обсягом N. Очікуване число відмов N_K повинно бути не менше за число параметрів моделі відмов. Якщо на момент часу T фактичне число відмов менше за число параметрів, то таке тестування не досягло мети. Вважаємо, що витрати через недосягнення мети тестування становлять q_3. Такі витрати можуть включати повернення вартості проведення тестування, штраф тощо. Оскільки число об'єктів, що відмовить під час тестування є випадковою величиною, то введемо поняття середніх витрат через недосягнення мети тестування. Ця величина є добутком витрат через недосягнення мети тестування q_3 на імовірність появи за час тестування T меншого за N_K числа відмов

$$Q_3(N,T) = q_3 \cdot \left[p_{N,T}(0) + \ldots + p_{N,T}(N_K - 1) \right] = q_3 \left[\sum_{K=0}^{N_K-1} p_{N,T}(K) \right]. \qquad (6)$$

Зі збільшенням обсягу вибірки та тривалості тестування такі втрати мають тенденцію до спадання. Так, підставивши вирази (2), (4) та (6) у формулу (1), отримаємо функціонал витрат на проведення тестування, який залежить від обсягу вибірки N та тривалості тестування T.

Обчислення виразів (4) та (6) передбачає собою обчислення функції ймовірності $p_{N,T}(K)$ згідно з (5). Під час виконання розрахунків за зазначеною формулою виникають проблеми обчислювального характеру.

Значення факторіалу від обсягу вибірки $N!$ за певного значення обсягу вибірки стає більшим за верхню допустиму межу. Під час ділення чисельника $N!$ на знаменник $K!\cdot(N-K)!$ за певних значеннях обсягу вибірки N та кількості відмов K утворюється відношення двох великих чисел, що спричиняє зменшення точності обчислення через обмежену кількість розрядів.

Для програмного забезпечення, у якому проводили дослідження, максимально допустиме N становить лише 170 ($170! > 10^{300}$). З метою забезпечення високої точності та достовірності результатів тестування обсяг вибірки може сягати понад 10000. З огляду на це виникає проблема розробки спеціалізованої обчислювальної процедури, яка б забезпечила високоточний та високоефективний розрахунок функції ймовірності $p_{N,T}(K)$, про що також зазначено у [8].

Для усунення вищезазначених проблем пропонуємо застосувати таку обчислювальну процедуру. Запишемо (5) для випадку K та $(K-1)$ відмов:

$$\left.\begin{aligned} p_{N,T}(K) &= \frac{N!}{(N-K)!\cdot K!} R^{N-K} \cdot (1-R)^K, \\ p_{N,T}(K-1) &= \frac{N!}{(N-K+1)!\cdot (K-1)!} R^{N-K+1} \cdot (1-R)^{K-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Оскільки тривалість тестування T тут і у наступних виразах є незмінною, то під час запису її будемо опускати. Візьмемо відношення першого виразу (7) до другого. Як видно із цього відношення, кожне наступне значення виразу (5) відрізняється від попереднього на однаковий множник. Отже, обчислювальна процедура ґрунтується на ітераційному виразі

$$p_{N,T}(K) = p_{N,T}(K-1) \cdot \frac{N-K+1}{K} \cdot \frac{1-R}{R}. \qquad (8)$$

Цей вираз послідовно розраховуємо для значень K у діапазоні від 1 до N. Початкове значення, від якого починається ітераційний процес, $p_{N,T}(0) = R^N$.

Застосування виразу (8) розв'язує проблему лише частково. Якщо N перевищує допустиме значення, то під час виконання ітераційного процесу на певному кроці отримаємо значення, менше за нижню допустиму межу. Встановлено, що максимально допустиме значення N залежить від значення ймовірності безвідмовної роботи R. Чим менше значення R, тим при меншому значенні N порушується виконання процедури, як це зображено на рис. 1 (крива *1*, суцільна, маркер хрест). Для значень $R << 0,5$ застосування (8) стає неефективним.

Доповнимо наведену процедуру таким ітераційним виразом. Запишемо (5) для випадку (K + 1) та K відмов:

$$\left.\begin{aligned} p_{N,T}(K+1) &= \frac{N!}{(N-K-1)!\cdot(K+1)!} R^{N-K-1}\cdot(1-R)^{K+1}, \\ p_{N,T}(K) &= \frac{N!}{(N-K)!\cdot K!} R^{N-K}\cdot(1-R)^{K}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

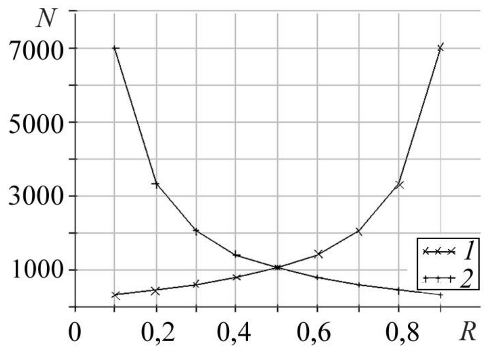

Рис. 1. Графіки залежності допустимого значення обсягу вибірки N від значення ймовірності безвідмовної роботи R.

Розглянемо відношення першого виразу (9) до другого. Як видно із цього відношення, кожне попереднє значення виразу (5) відрізняється від наступного на однаковий множник. Таким чином, обчислювальна процедура ґрунтується на ітераційному виразі

$$p_{N,T}(K) = P(K+1)\cdot\frac{K+1}{N-K}\cdot\frac{R}{1-R}. \quad (10)$$

Цей вираз послідовно розраховують для значень K від (N – 1) до 0. Початкове значення на підставі якого запускається ітераційний процес є $p_{N,T}(N) = [1-R]^N$.

Для (10) спостерігаємо те саме. Якщо N перевищує допустиме значення, то під час виконання ітераційного процесу на певному кроці отримаємо значення, менше за нижню допустиму межу. Проте, для цього виразу чим більше значення R, тим при меншому значенні N порушується виконання процедури, як це показано на рис. 1 (крива *2*, суцільна, маркер плюс). Отже, для значень $R >> 0,5$ застосування (10) стає неефективним.

Якщо жодний із наведених виразів (5), (8) та (10) не забезпечує результату, то використовуємо наближений вираз

$$p_{N,T}(K) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot R\cdot(1-R)\cdot N}}\exp\left(\frac{\left((1-R)\cdot N-K\right)^2}{2\cdot R\cdot(1-R)\cdot N}\right). \quad (11)$$

Застосування (11) забезпечує для $N > 1000$ прийнятну в цій роботі точність, проте за швидкістю обчислень він поступається перед (8) і (10).

Обчислювальна процедура залежно від значення R вибирає найприйнятніший вираз. Якщо $R \geq 0,5$, то значення функцій ймовірності $p_{N,T}(K)$ розраховуємо за (8), якщо $R < 0,5$, то – (10). У випадку, за якого відповідний ітераційний вираз не дав результату через порушення ітераційного процесу, то використовуємо (11).

Розглянемо випадок, за якого модель відмов об'єкта підпорядковується розподілу Вейбула. Для такого об'єкта ймовірність безвідмовної роботи визначається згідно з

$$R(t^*) = \exp[-(t^*)^\beta],$$

де β – параметр форми Вейбулівської моделі відмов.

Перетворення відносних одиниць напрацювання у абсолютні виконуємо згідно з відношенням

$$t = \alpha \cdot t^*,$$

де α – базове значення, яке приймаємо рівним параметрові масштабу Вейбулівської моделі відмов.

Використовуючи Вейбулівську модель відмов, розраховано функціонал витрат на проведення тестувань (1). Оскільки у цьому випадку модель відмов містить два параметри, то умовою недосягнення результату вважаємо відсутність відмов або наявність лише однієї відмови. На рис. 2 наведені якісні тривимірні графіки залежності витрат *Q* від обсягу вибірки *N* та тривалості тестування *T* для різних значень параметра форми Вейбулівської моделі відмов.

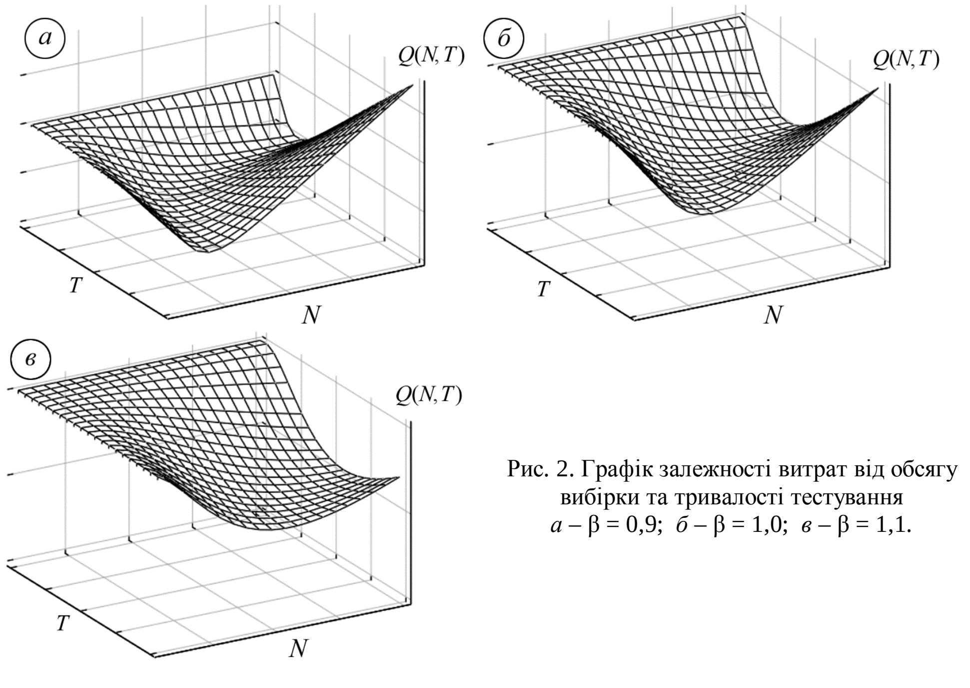

Рис. 2. Графік залежності витрат від обсягу вибірки та тривалості тестування
а – β = 0,9; *б* – β = 1,0; *в* – β = 1,1.

Як видно із рис. 2, кожна із поверхонь має лінію, що відповідає мінімуму витрат. Підвищення вимог щодо необхідної кількості відмов спричиняє збільшення мінімальних витрат і тривалості тестування. Також, зі збільшенням значення параметра форми, спостерігаємо зростання рівня мінімальних витрат.

Використовуючи метод прямого перебирання, визначаємо залежність тривалості тестування від обсягу вибірки за умови забезпечення мінімальних витрат на проведення тестування. Залежності, розраховані зазначеним методом, наведені на рис. 3, де крива *1* (суцільна, маркер квадрат) – залежність тривалості тестування *T* від обсягу вибірки *N* за умови забезпечення мінімальних витрат, якщо параметр форми Вейбулівської моделі відмов β = 0,9; крива *2* (суцільна, маркер ромб) – якщо β = 1,0; крива *3* (суцільна, маркер коло) – якщо β = 1,1.

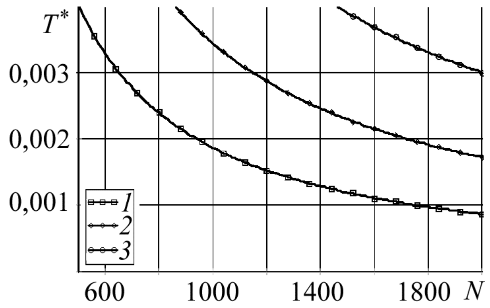

Рис. 3. Графік залежності тривалості тестування від обсягу вибірки за умови забезпечення мінімальних витрат.

Для вказаних кривих зберігається тенденція, що зі збільшенням обсягу вибірки спостерігаємо зменшення часу, необхідного для проведення тестування. Як видно із рис. 3, збільшення значення параметра форми Вейбулівської моделі відмов β, якщо значення параметра масштабу залишається незмінним, призводить до збільшення тривалості тестування.

ВИСНОВКИ

У статті розв'язано проблему визначення оптимального співвідношення між тривалістю тестування та обсягом вибірки з умови мінімізації витрат на проведення тестування об'єктів з моделлю відмов Вейбулла. Вдосконалено обчислювальну процедуру для розрахунку функції ймовірності біноміального розподілу шляхом розробки ітераційного алгоритму, що забезпечує ефективне та адекватне моделювання планів тестування при великих (понад 150) обсягах вибірки. Побудовано математичну модель для визначення функціоналу витрат на тестування для об'єктів з Вейбулівською моделлю відмов, яка ґрунтується на вдосконаленій обчислювальній процедурі розрахунку функції ймовірності біноміального розподілу. Використовуючи таку модель, визначено оптимальне співвідношення між тривалістю тестування та обсягом вибірки для об'єктів з Вейбулівською моделлю відмов.

Досліджено вплив параметра форми Вейбулівської моделі відмов на зазначене співвідношення. Зі збільшенням значення параметра форми за заданого обсягу вибірки необхідно забезпечити більший час тестування.

Отримані результати є основою для продовження досліджень у напряму оптимізації планів тестування, призначених для ідентифікації параметрів моделей відмов, тобто розв'язання завдання мінімізація витрат під час тестування об'єктів із заздалегідь невідомою моделлю відмов.

Публікація написана в рамках наукового проекту за грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених і фінансується за кошти державного бюджету України.

1. *Труханов В. М.* Надежность технических систем типа подвижных установок на этапе проектирования и испытания опытных образцов. – М.: Машиностроение, 2003. – 320 с. – ISBN 5-217-03192-1.
2. *Надежность* машиностроительной продукции: Практическое руководство по нормированию, подтверждению и обеспечению – М.: Издательство стандартов, 1990. – 328 с.
3. *Надежность* технических систем: Справ. / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др. Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
4. *Tse S. K., Yang C. Y.* Reliability sampling plans for the Weibull distribution under Type II progressive censoring with binomial removals // J. Applied Statistics. – 2003. – **30**. – P. 709–718.
5. *Pascual F.* Accelerated life test planning with independent Weibull competing risks with known shape parameter/ F. Pascual // Reliability, IEEE Trans. – 2007. – **56**, № 1. – P. 85–93.
6. *Syuan-Rong Huang, Shuo-Jye Wu.* Reliability sampling plans under progressive type-I interval censoring using cost functions // Ibid. – 2008. – **57**, № 3. – P. 445–451.
7. *Yeu-Shiang Huang, Cheng-Han Hsieh, Jyh-Wen Ho.* Decisions on an Optimal Life Test Sampling Plan With Warranty Considerations // Ibid. – 2008. – **57**, № 4. – P. 643–649.
8. *Shcherbovskykh S.V.* Binomial Distribution Computational Procedure for NUT&NRT Life Testing Plans Modeling // Proc. 9th Int. Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering" (CPEE'2008). – Alushta (Crimea), Ukraine. – 2008. – P. 169.

Національний університет "Львівська політехніка" *Одержано 25.02.2009*