УДК 004.932

Р. А. Воробель

ЛОГАРИФМІЧНА ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ. ЧАСТИНА 1: БАЗОВА МОДЕЛЬ

New algebraic structure, which presents basic model for logarithmic image processing, is described. In this structure interval (*–M, M*) is a set of pixel gray levels. Operations of addition and multiplication on real scalar are defined for this interval. The set of gray levels with these operations creates real vector space. New structure generalizes model of Jourlin–Pinoli. Examples of new model application to image quality enhancement are shown.

Описано нову алгебраїчну структуру для базової моделі логарифмічної обробки зображень. У ній множину рівнів сірого елемента зображення розглянуто на проміжку (*–M, M*). Для нього означено операції додавання та множення на дійсну скалярну величину. З цими операціями множина рівнів сірого утворює дійсний векторний простір. Нова структура узагальнює модель Jourlin-Pinoli. Наведено приклади застосування нової моделі для покращання якості зображень.

Покращання якості зображень є важливим завданням їх опрацювання для подальшого аналізу та прийняття рішень. Різні аспекти вирішень цього завдання відомі як розтяг динамічного діапазону, нерізке маскування, підсилення локальних контрастів, рангові та гістограмні перетворення. Зокрема, у роботі [22] Stockham запропонував підхід з використанням теорії гомоморфних перетворень, які ввів 1965 р. Oppenheim [17]. При цьому була використана мультиплікативна модель зображення. Складовими цієї моделі є освітлення сцени та відбиваюча здатність її елементів. Поліпшення якості зображення досягали різним підсиленням цих складових при одночасному стисненні діапазону яскравостей. A Jourlin та Pinoli у 1985 р. побудували теорію логарифмічного оброблення зображень [13], яка випливала з властивостей проходження світла через прозоре середовище (закон ***Bougher–Lambert***). Основою цієї теорії є застосування моделі, представленої алгебраїчною структурою (алгеброю), яка використовує додавання та множення додатних дійсних чисел на додатне дійсне число, що обмежує її функціональні можливості. Зазначимо, що саме Oppenheim у 1965 р. сформулював проблему конструювання алгебраїчних моделей систем опрацювання сигналів і представив один з її розв'язків [17, 18] гомоморфною фільтрацією. Для аналізу нелінійної (гомоморфної) системи він використовував принцип суперпозиції та узагальненого додавання. Розвиваючи цей підхід, ми побудували базову алгебраїчну модель, яка узагальнює відому модель логарифмічного оброблення зображень [7–9, 13–16, 19–21] через розширення її функціональних можливостей. Тому розглянемо її більш детально.

1. Основи логарифмічної моделі. У багатьох математичних моделях монохромні зображення, елементи яких мають певні рівні сірого, є функціями з обмеженої підмножини в R^2. Переважно за рівень сірого вибирають величину з проміжку $[0, M]$, де $M = 2^n - 1$, а n – це кількість двійкових розрядів, відведених для формування величини рівня сірого елемента зображення. Математичні методи оброблення зображень використовують як додатні, так і від'ємні величини та функції. Проблеми постають тоді, коли результат операції не належить проміжку $[0, M]$. Для усунення цього недоліку використовуватимемо підхід, описаний у роботах [13–16], де модель логарифмічної обробки зображень реалізовувалася поелементною операцією додавання рівнів сірого елементів двох зображень u та v

$$u \oplus v = u + v - \frac{u \cdot v}{M}, \tag{1}$$

операцією множення на скаляр $\alpha \otimes u$ за формулою

$$\alpha \otimes u = M - M\left(1 - \frac{u}{M}\right)^{\alpha}, \tag{2}$$

та операцією віднімання

$$u\,\Theta v = M\,\frac{u - v}{M - v}. \tag{3}$$

Хоча у роботі [14] декларувалося, що областю визначення рівнів сірого є інтервал (–∞, *M*), де *M* > 0, правило додавання від'ємних чисел та чисел з різними знаками в ній не встановлене, правило віднімання від'ємних чисел та чисел з різними знаками теж не приведене, а множення на скаляр (2) розглядалося тільки для додатних дійсних чисел α > 0.

Метою роботи є побудова такої моделі, яка би усувала вказані недоліки та уможливила оперування як з додатними, так і від'ємними дійсними числами при реалізації операцій додавання, множення та віднімання. При цьому поряд з розширенням функціональних можливостей моделі логарифмічної обробки зображень Jourlin та Pinoli [13–16] використаємо лінійне перетворення рівнів сірого з проміжку [0, *M*] в проміжок (–*M*, *M*). Для множини рівнів сірого $E = (-M, M)$ побудуємо універсальну алгебру з двома бінарними операціями типу $\langle 2, 2\rangle$ [2, 4], чи як її ще називають алгебраїчну структуру [3] дійсного векторного простору [1, 5, 6], означивши в ньому додавання $\langle + \rangle$, множення на скаляр $\langle \times \rangle$ та скалярний добуток $(\cdot \,|\, \cdot)_E$, формуючи в такий спосіб евклідів простір рівнів сірого. Розглянемо також найпростіші приклади поліпшення якості зображень на основі так сконструйованої базової алгебраїчної моделі логарифмічної обробки зображень.

2. Базова модель логарифмічної обробки зображень для дійсного векторного простору рівнів сірого їх елементів

Доведемо лему, а потім на її основі теорему.

Лема. Множина $E = (-M, M)$, де $M > 0$, з операцією додавання $\langle + \rangle$:

$\forall u, v \in E$

$$u \langle + \rangle v \overset{def}{=} sign(u+v) \cdot M \cdot \left(1 - \left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right), \tag{4}$$

де

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{ÿêù î} \;\; x < 0, \\ 0, & \text{ÿêù î} \;\; x = 0, \\ 1, & \text{ÿêù î} \;\; x > 0, \end{cases}$$

утворює адитивну абелеву групу $G = (E; \langle + \rangle)$.

Доведення. Для адитивної абелевої групи мають справджуватися такі аксіоми:

– додавання комутативне;

– додавання асоціативне;

– у множині E існує однозначний нульовий елемент e;

– кожному елементу u множини E відповідає однозначно визначений протилежний елемент z.

Тому покажемо, що кожній парі u, v елементів з E відповідає елемент $u\langle+\rangle v$ (4), який називається сумою u та v, причому справджуються зазначені вище аксіоми:

2.1. Додавання комутативне:

$$u\langle+\rangle v = sign\left(u+v\right)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right)=$$

$$= sign(v+u)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\cdot(1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\right)^{sign(v+u)}\right)= v\langle+\rangle u. \quad \blacksquare$$

2.2. Додавання асоціативне. Нехай задані $u, v, w > 0$. Тоді:

$$(u\langle+\rangle v)\langle+\rangle w = sign(u+v)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right)\langle+\rangle w=$$

$$= sign(u+v+w)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign\,(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign\,(v)}\cdot(1-\frac{|w|}{M})^{sign\,(w)}\right)^{sign\,(u+v+w)}\right)=$$

$$= u\langle+\rangle sign(v+w)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|v|}{M})^{sign\,(v)}\cdot(1-\frac{|w|}{M})^{sign\,(w)}\right)^{sign\,(v+w)}\right)= u\langle+\rangle(v\langle+\rangle w)\,.$$

Аналогічне твердження справедливе і для інших співвідношень між u, v та w за їх знаками. $\blacksquare$

2.3. У множині E існує однозначно визначений нульовий елемент e, такий, що $u\langle+\rangle e = u$ для кожного елемента u:

Таким елементом є $e = 0$. Для нього отримуємо

$$u\langle+\rangle 0 = sign(u+0)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign\,(u)}\cdot(1-\frac{|0|}{M})^{0}\right)^{sign\,(u+0)}\right)=$$

$$= \cdot sign(u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})\right)= sign(u)\cdot|u| = u \quad .\blacksquare$$

2.4. Кожному елементу u в множині E відповідає однозначно визначений протилежний елемент z, такий, що $u\langle+\rangle z = 0$. Таким елементом є $z = -u$. Для нього отримуємо

$$u\langle+\rangle z = sign(u-u)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign\,(u)}\cdot(1-\frac{|u|}{M})^{sign\,(-u)}\right)^{sign\,(u-u)}\right)=$$

$$= 0\cdot M\cdot(1-1) = 0. \quad \blacksquare$$

Отже, $G = (E;\langle+\rangle)$ є адитивною абелевою групою. $\blacksquare$

Зазначимо, що функція додавання (4) при $M = 1$ може використовуватися як основа конструювання балансних норм [11, 12] та є функцією агрегації в біполярному масштабі [10].

Враховуючи описану вище лему, доведемо тепер таку теорему.

Теорема. Нехай задане поле дійсних чисел $(R;+,\cdot)$ та адитивна абелева група $G=(E;\langle+\rangle)$. Тоді операція відображення $R\langle\times\rangle E\to E:(\alpha,u)\to\alpha\langle\times\rangle u$ для довільного $\alpha\in R$ і для довільного $u\in E$, яка описується виразом

$$\alpha\langle\times\rangle u \overset{def}{=} sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right), \tag{5}$$

є операцією множення вектора на скаляр, а множина E безпосередньо є векторним простором над полем дійсних чисел R.

Доведення. Оскільки кожній парі α, u, де α – скаляр, а u – елемент множини E (вектор), має відповідати елемент $\alpha\langle\times\rangle u$, який називається добутком скаляра α на вектор u (5), то покажемо, що ця операція множення вектора на скаляр для довільних елементів u та v з множини E і для довільних дійсних чисел $\alpha,\beta\in R$ задовольняє таким аксіомам:

– множення на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів;

– множення на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів;

– множення на скаляри асоціативне;

$-1\langle\times\rangle\, u=u$.

2.5. Множення векторів на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів:

$$\alpha\langle\times\rangle(u\langle+\rangle v)=(\alpha\langle\times\rangle u)\langle+\rangle(\alpha\langle\times\rangle v).$$

Розглянемо виконання операції $\alpha\langle\times\rangle(u\langle+\rangle v)$. Відповідно до (5) можемо записати

$$\alpha\langle\times\rangle(u\langle+\rangle v)=\alpha\langle\times\rangle\left(sign(u+v)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right)\right)=$$

$$=sign(\alpha\cdot sign(u+v))\cdot M\cdot\left(1-\left(1-\left|1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right|\right)^{|\alpha|}\right)=$$

$$=sign(\alpha\cdot(u+v))\cdot M\cdot\left(1-\left(\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)}\right)^{sign(u+v)}\right)^{|\alpha|}\right)=$$

$$=sign(\alpha\cdot(u+v))\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)\cdot sign(u+v)\cdot|\alpha|}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign(v)\cdot sign(u+v)\cdot|\alpha|}\right). \tag{6}$$

З іншого боку

$$(\alpha\langle\times\rangle u)\langle+\rangle(\alpha\langle\times\rangle v)=sign\left(sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)+\right.$$

$$\left.+sign(\alpha\cdot v)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|v|}{M})^{|\alpha|}\right)\right)\times$$

$$\times M\cdot\left(1-\left(\left(1-\left|sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)\right|\right)^{sign(sign(\alpha\cdot u))}\right.\right.\times$$

$$\times\Big(1-\Big|sign\ (\alpha\cdot v)\times$$

$$\times M\cdot\left(1-(1-\frac{|v|}{M})^{|\alpha|}\right)\Big|\Big)^{sign\ (sign\ (\alpha\cdot v))}\Bigg)^{sign\left(sign\ (\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)+sign\ (\alpha\cdot v)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|v|}{M})^{|\alpha|}\right)\right)}\Bigg). \quad (7)$$

Аналіз складових цього виразу свідчить, що $\forall u,\ v\in E$ і $\forall\,\alpha\in R$

$$sign\left(sign\ (\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)+sign\ (\alpha\cdot v)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|v|}{M})^{|\alpha|}\right)\right)=$$

$$=sign\ \ (sign\ \ (\alpha\cdot(u+v)))=sign\ \ (\alpha\,(u+v))\,.$$

Тоді з виразу (7) маємо

$$(\alpha\langle\times\rangle\,u)\ \langle+\rangle\ (\alpha\langle\times\rangle\,v)=sign\,(\alpha\,(u+v))\times$$

$$\times M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{sign\ (\alpha\cdot u)\cdot|\alpha|}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{sign\ (\alpha\cdot v)\cdot|\alpha|}\right)^{sign(\alpha\cdot\,(u+v))}=$$

$$=sign(\alpha\cdot(u+v))\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{\ sign\ (u)\cdot sign\ (u+v)\cdot|\alpha|}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{\ sign\ (v)\cdot sign\ (u+v)\cdot|\alpha|}\right). \quad (8)$$

З порівняння виразів (6) та (8) випливає, що $\alpha\langle\times\rangle\,(u\,\langle+\rangle v)=$ $=(\alpha\langle\times\rangle\,u)\ \langle+\rangle\,(\alpha\langle\times\rangle v)$. ■

2.6. Множення вектора на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів:

$$(\alpha+\beta)\ \langle\times\rangle\,u=(\alpha\,\langle\times\rangle u)\ \langle+\rangle\ (\beta\langle\times\rangle u)\,.$$

З виразу (5) отримуємо

$$(\alpha+\beta)\langle\times\rangle\ u=sign((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha+\beta|}\right).$$

Водночас $\alpha\ \langle\times\rangle\ u=sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)$ та

$\beta\ \langle\times\rangle\ u=sign(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)$. Звідки

$$(\alpha\langle\times\rangle u)\ \langle+\rangle\ (\beta\langle\times\rangle u)=sign\left(sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)+sign(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)\right)\times$$

$$\times M\cdot\left(1-\left(1-\left|sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)\right|^{sign(\alpha\cdot u)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\left|sign(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)\right|^{sign(\beta\cdot u)}\right)^{sign\left(sign(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha|}\right)+sign(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)\right)}\right)=$$

$$=sign\,((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-\left(\left(1-1+(1-\frac{|u|}{M})^{\ \alpha\cdot sign\ (u)}\right)\cdot\left(1-1+(1-\frac{|u|}{M})^{\beta\cdot sign(u)}\right)\right)^{sign\ ((\alpha+\beta)\cdot u)}\right)=$$

$$= sign\,((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{\,sign\,(u)\cdot sign\,((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$= sign\,((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha+\beta|}\right).\ \blacksquare$$

2.7. Множення вектора на скаляри асоціативне:

$$(\alpha\cdot\beta)\,\langle\times\rangle\, u=\alpha\langle\times\rangle(\beta\langle\times\rangle u)\,.$$

З виразу (5) отримуємо

$$(\alpha\cdot\beta)\langle\times\rangle\, u = sign(\alpha\cdot\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha\cdot\beta|}\right)$$

та

$$\beta\langle\times\rangle u = sign\,(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right),$$

тому

$$\alpha\langle\times\rangle(\beta\langle\times\rangle u)=\alpha\langle\times\rangle\left(sign\,(\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)\right)=$$

$$= sign(\alpha\cdot sign\,(\beta\cdot u))\cdot M\cdot\left(1-\left(1-1+(1-\frac{|u|}{M})^{|\beta|}\right)^{|\alpha|}\right)=$$

$$= sign(\alpha\cdot\beta\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\alpha\cdot\beta|}\right).\ \blacksquare$$

2.8. $1\langle\times\rangle u = u$.

$$1\langle\times\rangle u = sign\,(1\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|1|}\right)= sign\,(u)\cdot M\cdot\left(1-1+\frac{|u|}{M}\right)=u\,.\ \blacksquare$$

З виразу (5) випливає також, що результат множення скаляра α на вектор u завжди належить множині E , тобто $\alpha\langle\times\rangle\, u\in E$ незалежно від знаків α та u .

Отже, властивості абелевої групи $G=(E;\langle+\rangle)$ з операцією додавання векторів $\langle+\rangle$ (4), а також операція множення вектора на скаляр (5) підтверджують, що множина елементів (векторів) E над полем скалярів R утворює дійсний векторний простір. ■

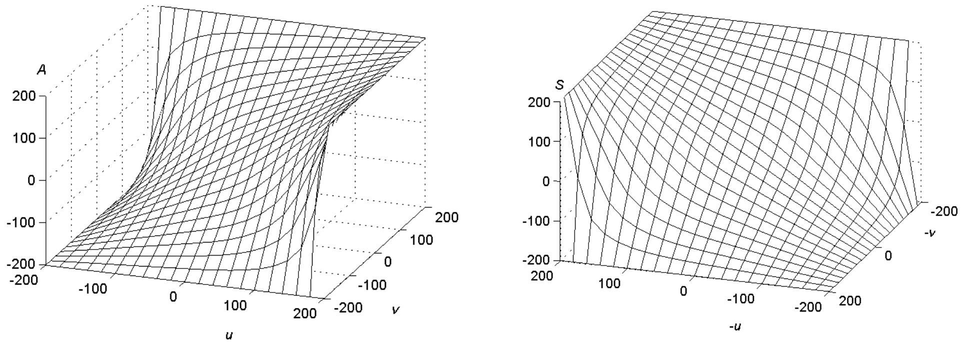
З так означеної операції додавання (4) отримуємо вираз для реалізації операції віднімання:

$\forall u,\ v\in E$

$$u\,\langle-\rangle\, v\ = sign\,(u-v)\cdot M\cdot\left(1-\left((1-\frac{|u|}{M})^{\,sign(u)}\cdot(1-\frac{|v|}{M})^{\,sign(-v)}\right)^{sign(u-v)}\right). \qquad (9)$$

Графічне представлення функцій додавання $A=u\,\langle+\rangle\, v$ (4) та віднімання $S=u\,\langle-\rangle\, v$ (9) як бінарних операцій універсальної алгебри для $M=200$ подано на рис. 1*а* та 1*б* відповідно.

Фундаментальний ізоморфізм. Побудованій векторній структурі властивий ізоморфізм, який однозначно відображає елементи простору E у простір дійсних чисел R через нелінійну функцію $\varphi : E \to R$:



а – функція додавання (4) *б* – функція віднімання (9)

Рис. 1. Графічне представлення функцій додавання (4) та віднімання (9).

$$\varphi : u \to \varphi(u) = -M \cdot \ln\left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \right) \tag{10}$$

з оберненою функцією

$$\varphi^{-1} : y \to \varphi^{-1}(y) = sign\,(y) \cdot M \cdot (1 - e^{-\frac{|y|}{M}}) .$$

Ізоморфізм φ верифікується такими властивостями:

а) $$\varphi(u \langle + \rangle v) = \varphi(u) + \varphi(v) .$$

Підставляючи вираз (4) у формулу (10), отримуємо

$$\varphi(u \langle + \rangle v) = -M \cdot \ln\Bigg(1 - \frac{1}{M}\left| sign\,(u+v) \cdot M \times \left(1 - \left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)} \right)^{sign(u+v)} \right) \right|^{sign(u\langle + \rangle v)} \Bigg) =$$

$$= -(sign\,(u+v))^2 M \ln\left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)} \right) =$$

$$= -M \cdot \ln\left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)} \right). \tag{11}$$

Використовуючи вираз (10), знаходимо:

$$\begin{aligned} \varphi(u) + \varphi(v) &= -M \cdot \ln\left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \right) - M \cdot \ln\left((1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)} \right) = \\ &= -M \cdot \ln\left((1 - \frac{|u|}{M})^{sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{sign(v)} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Тому з порівняння виразів (11) і (12) випливає, що $\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(u\langle+\rangle v)$. ■

б) $\varphi(\lambda\langle\times\rangle u)=\lambda\varphi(u)$.

З виразу (5) маємо

$$\lambda\langle\times\rangle u = sign\,(\lambda\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\lambda|}\right).$$

Підставляючи цей вираз у формулу (10), отримуємо

$$\varphi(\lambda\langle\times\rangle u)=-M\cdot\ln\left((1-\frac{\left|sign\,(\lambda\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|\lambda|}\right)\right|}{M})^{sign(\lambda\cdot u)}\right)=$$

$$=-sign(\lambda\cdot u)\cdot M\cdot\ln\left((1-\frac{|u|}{M})^{|\lambda|}\right)=-sign(u)\cdot\lambda\cdot M\cdot\ln\left(1-\frac{|u|}{M}\right). \qquad (13)$$

Водночас

$$\lambda\varphi(u)=-\lambda\cdot M\cdot\ln\left((1-\frac{|u|}{M})^{sign(u)}\right)=-sign(u)\cdot\lambda\cdot M\cdot\ln\left(1-\frac{|u|}{M}\right). \qquad (14)$$

Тому, порівнюючи вирази (13) і (14), маємо $\lambda\varphi(u)=\varphi(\lambda\langle\times\rangle u)$. ■

3. Евклідів простір рівнів сірого елементів зображення базової моделі логарифмічної обробки зображень

Скалярний добуток двох рівнів сірого $(\cdot|\cdot)_E:\ E\times E\to R$ визначається зі збереженням ізоморфізму (10):

$\forall u,\ v\in E$

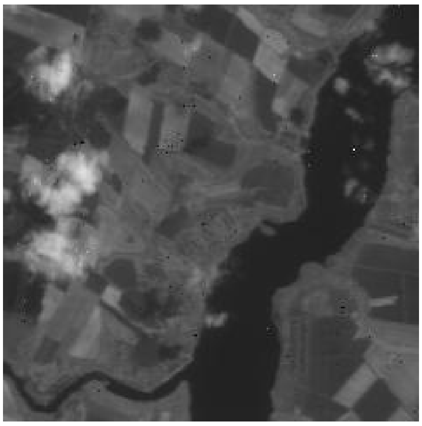
$(u\,|\,v)_E=\varphi(u)\cdot\varphi(v)$.

Так означений скалярний добуток $(\cdot|\cdot)_E$ на просторі рівнів сірого задає евклідів простір. Норма $\|\cdot\|_E: E\to R^+$ визначається через скалярний добуток

$$\forall u\in E\quad \|u\|_E=\sqrt{(u\,|\,u)_E}=|\varphi(u)|.$$

4. Приклади застосування побудованої базової моделі до поліпшення якості зображень

Розглянемо найпростіші приклади застосування нової базової моделі до поліпшення якості зображень. На рис. 2 показані зображення *Pout* (рис. 2*а*), до рівнів сірого кожного елемента якого додана за правилом (4) від'ємна величина – 0,1 (рис. 2*в*), а отриманий результат помножено за правилом (5) на 2 (рис. 2*г*); зображення *River* (рис. 2*б*), до рівнів сірого кожного елемента якого додана за правилом (4) величина 0,4 (рис. 2*г*), а отриманий результат помножено за правилом (5) на 1,5 (рис. 2*д*). Вказані числові величини є пронормованими рівнями сірого відносно значення M = 255. Отримані зображення засвідчують простоту і дієвість побудованого підходу поліпшення їх якості.



а) зображення *Pout* *б*) зображення *River*

в) $u\langle + \rangle -0{,}1$ *г*) $u\langle + \rangle 0{,}4$

г) $u\langle \times \rangle 2$ *д*) $u\langle \times \rangle 1{,}5$

Рис. 2. Приклади використання арифметичних операцій для поліпшення якості зображень на основі нової базової моделі.

ВИСНОВКИ

Експериментальні дослідження підтвердили коректність запропонованої базової моделі логарифмічної обробки зображень та її ефективність. Нова модель, яка реалізує алгебру з двома бінарними операціями типу $\langle 2,2 \rangle$, є водночас структурою векторного простору над полем дійсних чисел і має завдяки цьому ширші функціональні можливості через оперування як з додатними, так і від'ємними числами для елементів (векторів) множини E і для значень скаляра, які належать до дійсних додатних і від'ємних чисел, а не тільки додатних, як це є у відомій моделі [13–16]. Це відкриває нові функціональні можливості алгебраїчної моделі та перспективу її застосування під час розв'язування широкого кола задач опрацювання зображень.

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Физматлит, 1971. – 432 с.
2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
3. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер. 2004. – 302 с.
4. *Основи* дискретної математики / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печорін. – К.: Наук. думка, 2002. – 579 с.
5. *Райков Д. А.* Векторные пространства. – М.: Физматлит, 1962. – 212 с.
6. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. – М.: Физматлит, 1963. – 264 с.
7. *Courbebaisse G., Trunde F., Jourlin M.* Wavelet transform and LIP model. Image Analysis and Stereology. – 2002. – **21**. – P. 121–125.
8. *Deng G.* An entropy interpretation of the logarithmic image processing model with application to contrast enhancement // IEEE Transactions on Image Processing. – 2009. – **18**, № 5. – P. 1135–1140.
9. *Deng G., Cahill L. W., Tobin G. R.* The study of logarithmic image processing model and its application to image enhancement // IEEE Transactions on Image Processing. – 1995. – **4**, № 4. – P. 506–512.
10. *Grabisch M.* Aggregation on bipolar scales / Eds. Harrie C.M. de Swart, Ewa Orlowska, Gunther Schmidt, Marc Roubens // Theory and Application of Relational Structures as Knowledge Instruments II. – Springer, 2006. – P. 355–371.
11. *Homenda W.* Triangular norms, uni- and nullnorms, balanced norms: the cases of the hierarchy of iterative operators / Eds. E. P. Klement, R. Mesiar // 24th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory. Abstracts. February 4–8, 2003. – Linz, 2003. – P. 27–35.
12. *Homenda W.* Balanced fuzzy sets // Information Sciences. – 2006. – **176**. – P. 2467–2506.
13. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Département de Mathématiques, No 3, Université de Saint-Etienne, Décembre 1985.
14. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Journal of Microscopy. – 1988. – **149**, № 1. – P. 21–35.
15. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Image dynamic range enhancement and stabilization in the context of the logarithmic image processing model // Signal Processing. – 1995. – **41**, № 2. – P. 225–237.
16. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Logarithmic image processing // In: Advances in Imaging and Electron Physics. – 2001. – **115**. – P. 129–196.
17. *Oppenheim A. V.* Superposition in a class of non-linear system // Technical Report 432. Research Laboratory of Electronics. M. I. T., Cambridge Ma. – 1965. – 62 p.
18. *Oppenheim A. V.* Generalized superposition // Information and Control. – 1967. – **11**, № 5&6. – P. 528–536.
19. *Pinoli J.-C.* A general comparative study of the multiplicative homomorfic, log-ratio and logarithmic image processing approaches // Signal Processing. – 1997. – **58**, № 1. – P. 11–45.
20. *Pinoli J.-C.* The logarithmic image processing model: connection with human brightness perception and contrast estimators // J. Mathematical Imaging and Vision. – 1997. – **7**. – P. 341–358.
21. *Pinoli J.C., Debayle J.* Logarithmic adaptive neighborhood image processing (LANIP): introduction, connections to brightness perception, and application issues // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. – 2007. – Vol. 2007, Article ID 36105, doi: 10.1155/2007/36105, 22 p.
22. *Stockham T. G., Jr.* Image processing in the context of visual models // Proceeding of the IEEE. – 1972. – **60**, № 7. – P. 828–842.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
11.06.2009