УДК 517.44: 004

В. І. Волинець

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ

The exactness analysis of recurrent methods of calculation of ordinary and modified two-dimensional discrete Fourier and Hartley transforms for skipping and sliding fragments of images on two and one measuring in floating point arithmetic is executed. Analytical expressions for determination of root-mean-squares value of errors of calculation of transforms are obtained, on the basis of which the comparative analysis of exactness of recurrent methods of calculation is executed.

Проведено аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі для стрибкових і ковзних фрагментів зображень за двома та одним виміром в арифметиці з плаваючою комою. Отримано аналітичні вирази для визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення перетворень, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

В основі динамічного спектрального аналізу зображень, який проводиться на ковзних або стрибкових фрагментах зображень, тобто коли черговий фрагмент зображення відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків за одним або двома вимірами, лежить використання рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1, 5, 6, 8], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення, оскільки рекурентні методи беруть до уваги результати обчислення для попередніх фрагментів зображень.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. Дослідженню точності рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ присвячені праці [2–4, 7, 8]. Зокрема, у праці [2] проведений аналіз точності рекурентних методів обчислення одновимірних звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з плаваючою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки, що виникає внаслідок округлення або утинання результату операції додавання чи множення, ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідною послідовністю, яка є білим шумом. Як кількісну оцінку точності обчислення приймають середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення перетворення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується через відношення потужності шуму до потужності вихідного сигналу.

У цій роботі ставимо завдання провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для стрибкових і ковзних фрагментів зображень за двома і одним виміром в арифметиці з плаваючою комою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ для стрибкових фрагментів зображень за двома вимірами базуються на таких рекурентних виразах [1]:

$$F_1(k_1,k_2) = \left[F_0(k_1,k_2) + \Delta F_1(k_1,k_2)\right] \cdot W^{-\left(\frac{m_1 k_1}{N_1} + \frac{m_2 k_2}{N_2}\right)}, \tag{1}$$

$$F_1^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)=F_0^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)+\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot W^{\left(\frac{M_1k_1}{N_1}+\frac{M_2k_2}{N_2}\right)}, \tag{2}$$

де $F_1(k_1,k_2)$, $F_1^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)$ та $F_0(k_1,k_2)$, $F_0^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)$ – звичайне й модифіковане ДПФ для чергового (першого) та попереднього (нульового) фрагментів зображення $x(n_1,n_2)$ розміром $N_1\times N_2$, зсунутих відносно одне одного на m_i відліків за i-м виміром, де $i=\overline{1,2}$; M_i – зсув попереднього фрагменту зображення відносно початку координат за i-м виміром; $W=\exp(-j2\pi)$, де $j=\sqrt{-1}$;

$$\Delta F_1(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_1(n_1,n_2)\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}+\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\Delta x_2(n_1,n_2)\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_3(n_1,n_2)\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)},$$

де

$$\Delta x_1(n_1,n_2)=x(N_1+n_1+M_1,N_2+n_2+M_2)-x(n_1+M_1,n_2+M_2);$$

$$\Delta x_2(n_1,n_2)=x(N_1+n_1+M_1,n_2+M_2)-x(n_1+M_1,n_2+M_2);$$

$$\Delta x_3(n_1,n_2)=x(n_1+M_1,N_2+n_2+M_2)-x(n_1+M_1,n_2+M_2).$$

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПХ для стрибкових фрагментів зображень за двома вимірами базуються на таких рекурентних виразах [1]:

$$\begin{aligned}H_1(k_1,k_2)&=[H_0(k_1,k_2)+\Delta H_1(k_1,k_2)]\cdot\cos(2\pi(m_1k_1/N_1+m_2k_2/N_2))-\\&-[H_0(-k_1,-k_2)+\Delta H_1(-k_1,-k_2)]\cdot\sin(2\pi(m_1k_1/N_1+m_2k_2/N_2)),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}H_1^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)&=H_0^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)+\Delta H_1(k_1,k_2)\cdot\cos(2\pi(M_1k_1/N_1+M_2k_2/N_2))+\\&+\Delta H_1(-k_1,-k_2)\cdot\sin(2\pi(M_1k_1/N_1+M_2k_2/N_2)),\end{aligned} \tag{4}$$

де $H_1(k_1,k_2)$, $H_1^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)$ та $H_0(k_1,k_2)$, $H_0^{\grave{i}}\ (k_1,k_2)$ – звичайне й модифіковане ДПХ для чергового (першого) та попереднього (нульового) фрагментів зображення;

$$\Delta H_1(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_1(n_1,n_2)\cdot\mathrm{cas}(2\pi(n_1k_1/N_1+n_2k_2/N_2))+$$

$$+\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\Delta x_2(n_1,n_2)\cdot\mathrm{cas}(2\pi(n_1k_1/N_1+n_2k_2/N_2))+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_3(n_1,n_2)\cdot\mathrm{cas}(2\pi(n_1k_1/N_1+n_2k_2/N_2)),$$

де $\mathrm{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для стрибкових фрагментів зображень за одним виміром отримують з виразів (1)–(4) для m_1 = 0 та M_1 = 0 у коефіцієнтах W, cos та sin. Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для ковзних фрагментів зображень отримують з виразів (1)–(4) для $m_1 = m_2 = 1$.

Для скорочення подальших записів введемо такі позначення:

$$A = 2\pi(m_1 k_1 / N_1 + m_2 k_2 / N_2)\,;$$

$$B = 2\pi(n_1 k_1 / N_1 + n_2 k_2 / N_2)\,;\; C = 2\pi(M_1 k_1 / N_1 + M_2 k_2 / N_2)\,.$$

Проведемо аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайного двовимірного ДПФ. Обчислення дійсної (Re) та уявної (Im) частин ДПФ за виразом (1) для дійсної послідовності $x(n_1, n_2)$ здійснюють за такими виразами:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} F_1(k_1,k_2) = [\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos(A) - \\ &-[\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin(A)\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} F_1(k_1,k_2) = [\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin(A) + \\ &+[\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos(A)\,, \end{aligned} \qquad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2) = &\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_1(n_1,n_2)\cdot\cos(B) + \sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\Delta x_2(n_1,n_2)\cdot\cos(B) + \\ &+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_3(n_1,n_2)\cdot\cos(B)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2) = &\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_1(n_1,n_2)\cdot(-\sin(B)) + \sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\Delta x_2(n_1,n_2)\cdot(-\sin(B)) + \\ &+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_3(n_1,n_2)\cdot(-\sin(B))\,. \end{aligned}$$

Оскільки абсолютну похибку обчислення деякого значення X в арифметиці з плаваючою комою визначають як $E(X) = X \cdot \varepsilon$, де ε – відносна похибка обчислення значення X, то, враховуючи похибки обчислення операцій додавання ($\varepsilon_{д}$) та множення ($\varepsilon_{м}$) у виразах (5) та (6), рекурентні вирази для визначення абсолютних похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ без врахування похибок обчислення вищих порядків мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &E(\operatorname{Re} F_1(k_1,k_2)) = \operatorname{Re} F_1(k_1,k_2)\cdot\varepsilon_{д_3} + [\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos(A)\cdot(\varepsilon_{д_1} + \varepsilon_{м_1}) - \\ &-[\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin(A)\cdot(\varepsilon_{д_2} + \varepsilon_{м_2}) + \big[E(\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2)) + \\ &\quad +E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))\big]\cdot\cos(A) - [E(\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2)) + E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))]\cdot\sin(A)\,, \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &E(\operatorname{Im} F_1(k_1,k_2)) = \operatorname{Im} F_1(k_1,k_2)\cdot\varepsilon_{д_6} + [\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin(A)\cdot(\varepsilon_{д_4} + \varepsilon_{м_3}) + \\ &+[\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos(A)\cdot(\varepsilon_{д_5} + \varepsilon_{м_4}) + \big[E(\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2)) + \\ &\quad +E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))\big]\cdot\sin(A) + [E(\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2)) + E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))]\cdot\cos(A)\,, \end{aligned} \qquad (8)$$

де

$$\begin{aligned} E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)) = &\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\Delta x_1(n_1,n_2)\cdot\cos(B)\cdot\Bigg(t_1\varepsilon_{д_{7_{n_1,n_2}}} + t_2\varepsilon_{м_{5_{n_1,n_2}}} + \\ &+\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=n_2=0\\ n_1 m_2+n_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{m_1 m_2-1}\varepsilon_{д_{8,l}} + t_3(\varepsilon_{д_{11}} + \varepsilon_{д_{14}})\Bigg) + \sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\Delta x_2(n_1,n_2)\cdot\cos(B)\cdot\Bigg(t_1\varepsilon_{д_{9_{n_1,n_2}}} + \end{aligned}$$

$$+\varepsilon_{\text{м}6_{n_1,n_2}} + \sum_{l=\begin{cases}1, n_1=0, n_2=m_2\\ n_1(N_2-m_2)+n_2-m_2, \text{ інакше}\end{cases}}^{m_1(N_2-m_2)-1} \varepsilon_{\partial 10_l} + t_3(\varepsilon_{\partial 11} + \varepsilon_{\partial 14})\Bigg) + \sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1} \Delta x_3(n_1,n_2)\cdot\cos(B)\times$$

$$\times\left(t_1\varepsilon_{\partial 12_{n_1,n_2}} + \varepsilon_{\text{м}7_{n_1,n_2}} + \sum_{l=\begin{cases}1, n_1=m_1, n_2=0\\ (n_1-m_1)m_2+n_2, \text{ інакше}\end{cases}}^{(N_1-m_1)m_2-1} \varepsilon_{\partial 13_l} + t_3\varepsilon_{\partial 14}\right),$$

$$E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)) = \sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1} \Delta x_1(n_1,n_2)\cdot(-\sin(B))\cdot\Bigg(t_1\varepsilon_{\partial 15_{n_1,n_2}} + t_2\varepsilon_{\text{м}8_{n_1,n_2}} +$$

$$+ \sum_{l=\begin{cases}1, n_1=n_2=0\\ n_1 m_2+n_2, \text{ інакше}\end{cases}}^{m_1 m_2-1} \varepsilon_{\partial 16_l} + t_3(\varepsilon_{\partial 19} + \varepsilon_{\partial 22})\Bigg) + \sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1} \Delta x_2(n_1,n_2)\cdot(-\sin(B))\cdot\Bigg(t_1\varepsilon_{\partial 17_{n_1,n_2}} +$$

$$+\varepsilon_{\text{м}9_{n_1,n_2}} + \sum_{l=\begin{cases}1, n_1=0, n_2=m_2\\ n_1(N_2-m_2)+n_2-m_2, \text{ інакше}\end{cases}}^{m_1(N_2-m_2)-1} \varepsilon_{\partial 18_l} + t_3(\varepsilon_{\partial 19} + \varepsilon_{\partial 22})\Bigg) + \sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1} \Delta x_3(n_1,n_2)\times$$

$$\times(-\sin(B))\cdot\left(t_1\varepsilon_{\partial 20_{n_1,n_2}} + \varepsilon_{\text{м}10_{n_1,n_2}} + \sum_{l=\begin{cases}1, n_1=m_1, n_2=0\\ (n_1-m_1)m_2+n_2, \text{ інакше}\end{cases}}^{(N_1-m_1)m_2-1} \varepsilon_{\partial 21_l} + t_3\varepsilon_{\partial 22}\right),$$

причому $t_1 = \begin{cases}0, M_i + m_i < N_i\\ 1, M_i + m_i \geq N_i\end{cases}$, $t_2 = \begin{cases}0, m_1 = m_2 = 1\\ 1, m_1 \neq 1 \wedge m_2 \neq 1\end{cases}$, $t_3 = \begin{cases}0, m_1 = 0\\ 1, m_1 \neq 0\end{cases}$.

Враховуючи припущення, покладені в основу аналізу, що вхідна послідовність є білим шумом, і відповідно значення перетворення також є білим шумом, математичне очікування похибок обчислення має нульове значення, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення визначаються значеннями дисперсій похибок обчислення (D), котрі отримуємо на підставі (7) та (8):

$$D[E(\operatorname{Re}F_1(k_1,k_2))] = D[\operatorname{Re}F_1(k_1,k_2)]\cdot D[\varepsilon_{\ddot{a}}] + (D[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2)] + D[\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)])\times$$

$$\times\cos^2(A)\cdot(D[\varepsilon_{\ddot{a}}] + D[\varepsilon_{\grave{\imath}}]) + (D[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2)] + D[\operatorname{Im}\Delta F(k_1,k_2)_1])\cdot\sin^2(A)\times$$

$$\times(D[\varepsilon_{\ddot{a}}] + D[\varepsilon_{\grave{\imath}}]) + (D[E(\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2))] + D[E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))])\cdot\cos^2(A) +$$

$$+(D[E(\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2))] + D[E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))])\cdot\sin^2(A), \qquad (9)$$

$$D[E(\operatorname{Im}F_1(k_1,k_2))] = D[\operatorname{Im}F_1(k_1,k_2)]\cdot D[\varepsilon_{\ddot{a}}] + (D[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2)] + D[\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)])\times$$

$$\times\sin^2(A)\cdot(D[\varepsilon_{\partial}] + D[\varepsilon_{\text{м}}]) + (D[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2)] + D[\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)])\cdot\cos^2(A)\times$$

$$\times(D[\varepsilon_{\partial}] + D[\varepsilon_{\text{м}}]) + (D[E(\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2))] + D[E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))])\cdot\sin^2(A) +$$

$$+(D[E(\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2))] + D[E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))])\cdot\cos^2(A), \qquad (10)$$

де

$$D[E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))] = D[\Delta x(n_1,n_2)]\cdot\Bigg[((t_1 + 2t_3)D[\varepsilon_{\partial}] + t_2 D[\varepsilon_{\text{м}}])\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\cos^2(B) +$$

$$+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=n_2=0\\ n_1m_2+n_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{m_1m_2-1}\cos^2(B)+((t_1+2t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\cos^2(B)+$$

$$+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=0, n_2=m_2\\ n_1(N_2-m_2)+n_2-m_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{m_1(N_2-m_2)-1}\cos^2(B)+((t_1+t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+$$

$$\left.+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\cos^2(B)+D\left[\varepsilon_{\partial}\right]\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=m_1, n_2=0\\ (n_1-m_1)m_2+n_2,\text{інакше}\end{cases}}^{(N_1-m_1)m_2-1}\cos^2(B)\right],$$

$$D[E(\mathrm{Im}\,\Delta F_1(k_1,k_2))]=D[\Delta x(n_1,n_2)]\cdot\left[((t_1+2t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sin^2(B)+\right.$$

$$+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=n_2=0\\ n_1m_2+n_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{m_1m_2-1}\sin^2(B)+((t_1+2t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\sin^2(B)+$$

$$+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=0, n_2=m_2\\ n_1(N_2-m_2)+n_2-m_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{m_1(N_2-m_2)-1}\sin^2(B)+((t_1+t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+$$

$$\left.+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sin^2(B)+D[\varepsilon_{\partial}]\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\sum_{l=\begin{cases}1, n_1=m_1, n_2=0\\ (n_1-m_1)m_2+n_2,\ \text{інакше}\end{cases}}^{(N_1-m_1)m_2-1}\sin^2(B)\right].$$

Ґрунтуючись на (9) та (10), отримуємо рекурентний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ

$$D[E(F_1(k_1,k_2))]=D[E(\mathrm{Re}\,F_1(k_1,k_2))]+D[E(\mathrm{Im}\,F_1(k_1,k_2))]=$$
$$=(2D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])\cdot D[F_1(k_1,k_2)]+D[E(\Delta F_1(k_1,k_2))]+D[E(F_0(k_1,k_2))]\,, \qquad (11)$$

де

$$D[E(\Delta F_1(k_1,k_2))]=D[\Delta x(n_1,n_2)]\cdot\left(m_1m_2((t_1+2t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+t_2D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])+\frac{(m_1m_2)^2+m_1m_2}{2}\times\right.$$

$$\times D[\varepsilon_{\partial}]+m_1(N_2-m_2)\cdot((t_1+2t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])+\frac{(m_1(N_2-m_2))^2+m_1(N_2-m_2)}{2}\times$$

$$\times D[\varepsilon_{\partial}]+m_2(N_1-m_1)\cdot((t_1+t_3)D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{\scriptscriptstyle M}])+$$

$$\left.+\frac{(m_2(N_1-m_1))^2+m_2(N_1-m_1)}{2}D[\varepsilon_{\partial}]\right)=D\left[\Delta x(n_1,n_2)\right]\cdot K_1\ .$$

Дисперсію похибок обчислення ДПФ залежно від номера ітерації *p* визначаємо на підставі рекурентного виразу (11) з урахуванням того, що $E(F_0(k_1,k_2))=0$ для $M_i = 0$:

$$D[E(F_p(k_1,k_2))]=(2D[\varepsilon_{ä}]+D[\varepsilon_{ì}])\sum_{l=1}^{p}D[F_l(k_1,k_2)]+\sum_{l=1}^{p}D[E(\Delta F_l(k_1,k_2))]. \qquad (12)$$

Враховуючи, що $D[F_l(k_1,k_2)] = N_1 N_2 D[x(n_1,n_2)]$ та $D[\Delta x(n_1,n_2)] = = 2D[x(n_1,n_2)]$ для $l > N_i / m_i$, вираз (14) набуває такого вигляду:

$$D[E(F_p(k_1,k_2))] = p[N_1 N_2 (2D[\varepsilon_{\text{ä}}] + D[\varepsilon_{\text{ì}}]) + 2K_1] \cdot D[x(n_1,n_2)]\,. \tag{13}$$

В основу аналізу точності рекурентних методів обчислення звичайного двовимірного ДПХ покладений аналіз точності обчислення значень $H_1(k_1,k_2)$ та $H_1(-k_1,-k_2)$ згідно з (3). Оскільки вирази обчислення значень $H_1(k_1,k_2)$ та $H_1(-k_1,-k_2)$ ДПХ мають однакову структуру з виразами (5) та (6) обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, то для аналізу точності обчислення ДПХ можуть бути використані вирази, подібні до виразів (7)–(10), в яких замість значень $\operatorname{Re} F_1(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im} F_1(k_1,k_2)$ ДПФ використовуються відповідно значення $H_1(k_1,k_2)$ та $H_1(-k_1,-k_2)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re} F_0(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im} F_0(k_1,k_2)$ ДПФ − відповідно значення $H_0(k_1,k_2)$ та $H_0(-k_1,-k_2)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re} \Delta F_1(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im} \Delta F_1(k_1,k_2)$ − відповідно значення $\Delta H_1(k_1,k_2)$ та $\Delta H_1(-k_1,-k_2)$, а замість значень $\cos(B)$ та $(-\sin(B))$ − відповідно значення $\operatorname{cas}(B)$ та $\operatorname{cas}(-B)$. У результаті ітераційний вираз суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ можна записати так:

$$D[E(H_p(k_1,k_2))] + D[E(H_p(-k_1,-k_2))] = (2D[\varepsilon_{д}] + D[\varepsilon_{м}])\sum_{l=1}^{p}\big(D[H_l(k_1,k_2)] + \\ + D[H_l(-k_1,-k_2)]\big) + \sum_{l=1}^{p}(D[E(\Delta H_l(k_1,k_2))] + D[E(\Delta H_l(-k_1,-k_2))])\,. \tag{14}$$

Беручи до уваги, що $D[H_l(k_1,k_2)] + D[H_l(-k_1,-k_2)] = 2D[F_l(k_1,k_2)]$ та $D[E(\Delta H_l(k_1,k_2))] + D[E(\Delta H_l(-k_1,-k_2))] = 2D[E(\Delta F_l(k_1,k_2))]$ для $l > N_i / m_i$, сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі більша за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (13), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ збігається з дисперсією похибки обчислення значення ДПФ.

Аналіз точності рекурентних методів обчислення модифікованого двовимірного ДПФ здійснюється на підставі аналізу обчислення дійсної та уявної частин ДПФ згідно з (2), котрі для дійсної послідовності $x(n_1,n_2)$ є такі:

$$\operatorname{Re} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2) = \operatorname{Re} F_0^{\text{ì}}(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\cos(C) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\sin(C)\,, \tag{15}$$

$$\operatorname{Im} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2) = \operatorname{Im} F_0^{\text{ì}}(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\cos(C) - \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\sin(C)\,. \tag{16}$$

Рекурентні вирази абсолютних похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ без врахування похибок обчислення вищих порядків будуть такі:

$$E(\operatorname{Re} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2)) = \operatorname{Re} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2)\cdot\varepsilon_{\text{ä}_2} + \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\cos(C)\cdot(\varepsilon_{\text{ì}_1} + \varepsilon_{\text{ä}_1}) + \\ + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\sin(C)\cdot(\varepsilon_{\text{ì}_2} + \varepsilon_{\text{ä}_1}) + E(\operatorname{Re} F_0^{\text{ì}}(k_1,k_2)) + E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))\cdot\cos(C) + \\ + E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))\cdot\sin(C)\,, \tag{17}$$

$$E(\operatorname{Im} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2)) = \operatorname{Im} F_1^{\text{ì}}(k_1,k_2)\cdot\varepsilon_{\text{ä}_4} + \operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\cos(C)\cdot(\varepsilon_{\text{ì}_3} + \varepsilon_{\text{ä}_3}) - \\ - \operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)\cdot\sin(C)\cdot(\varepsilon_{\text{ì}_4} + \varepsilon_{\text{ä}_3}) + E(\operatorname{Im} F_0^{\text{ì}}(k_1,k_2)) + E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))\cdot\cos(C) - \\ - E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))\cdot\sin(C)\,. \tag{18}$$

З врахуванням (17) та (18) отримуємо рекурентні вирази дисперсій похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ:

$$D[E(\operatorname{Re}F_1^{м}(k_1,k_2))]=D[\operatorname{Re}F_1^{м}(k_1,k_2)]\cdot D[\varepsilon_{\partial}]+[D[\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos^2(C)+$$
$$+D[\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin^2(C)]\cdot(D[\varepsilon_{м}]+D[\varepsilon_{\partial}])+D[E(\operatorname{Re}F_0^{м}(k_1,k_2))]+ \qquad (19)$$
$$+D[E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))]\cdot\cos^2(C)+D[E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))]\cdot\sin^2(C)\,,$$

$$D[E(\operatorname{Im}F_1^{м}(k_1,k_2))]=D[\operatorname{Im}F_1^{м}(k_1,k_2)]\cdot D[\varepsilon_{\partial}]+[D[\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\cos^2(C)+$$
$$+D[\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot\sin^2(C)]\cdot(D[\varepsilon_{м}]+D[\varepsilon_{\partial}])+D[E(\operatorname{Im}F_0^{м}(k_1,k_2))]+ \qquad (20)$$
$$+D[E(\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2))]\cdot\cos^2(C)+D[E(\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2))]\times\sin^2(C)\,.$$

Базуючись на (19) та (20), рекурентний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ записується як

$$D[E(F_1^{ì}\ (k_1,k_2))]=D[E(\operatorname{Re}F_1^{ì}\ (k_1,k_2))]+D[E(\operatorname{Im}F_1^{ì}\ (k_1,k_2))]=$$
$$=D[F_1^{ì}\ (k_1,k_2)]\cdot D[\varepsilon_{ä}]+D[\Delta F_1(k_1,k_2)]\cdot(D[\varepsilon_{ì}\ ]+D[\varepsilon_{ä}])+ \qquad (21)$$
$$+D[E(\Delta F_1(k_1,k_2))]+D[E(F_0^{ì}\ (k_1,k_2))]\,.$$

Ітераційний вираз дисперсії похибок обчислення ДПФ залежно від номера ітерації p отримуємо на підставі рекурентного виразу (21) з урахуванням того, що $E(F_0^{ì}\ (k_1,k_2))=0$ для $M_i=0$:

$$D[E(F_p^{ì}\ (k_1,k_2))]=D[\varepsilon_{ä}]\sum_{l=1}^{p}D[F_l^{ì}\ (k_1,k_2)]+(D[\varepsilon_{ä}]+$$
$$+D[\varepsilon_{ì}\ ])\sum_{l=1}^{p}D[\Delta F_l(k_1,k_2)]+\sum_{l=1}^{p}D[E(\Delta F_1(k_1,k_2))]\,. \qquad (22)$$

Враховуючи вищевизначені значення $D[F_l(k_1,k_2)]$ та $D[\Delta x(n_1,n_2)]$, а також те, що $D[\Delta F_l(k_1,k_2)]=2(m_1N_2+m_2N_1-m_1m_2)D[x(n_1,n_2)]$ для $l>N_i\,/\,m_{ii}$, вираз (22) набуває такого вигляду:

$$D[E(F_p^{м}(k_1,k_2))]=p[N_1N_2D[\varepsilon_{\partial}]+2(m_1N_2+m_2N_1-m_1m_2)\times$$
$$\times(D[\varepsilon_{\partial}]+D[\varepsilon_{м}])+2K_1]\cdot D[x(n_1,n_2)]\ . \qquad (23)$$

В основу аналізу точності рекурентних методів обчислення модифікованого двовимірного ДПХ покладений аналіз точності обчислення значень $H_1^{ì}\ (k_1,k_2)$ та $H_1^{ì}\ (-k_1,-k_2)$ за виразом (4). Оскільки вирази обчислення значень $H_1^{ì}\ \left(k_1,k_2\right)$ та $H_1^{м}(-k_1,-k_2)$ ДПХ мають однакову структуру з виразами (15) та (16) щодо ДПФ, то для аналізу точності обчислення ДПХ можуть бути використані вирази, подібні до виразів (17)–(21), в яких замість значень $\operatorname{Re}F_1^{м}(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im}F_1^{м}(k_1,k_2)$ ДПФ використовуються відповідно значення $H_1^{м}(k_1,k_2)$ та $H_1^{м}(-k_1,-k_2)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re}F_0^{м}(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im}F_0^{м}(k_1,k_2)$ ДПФ − відповідно значення $H_0^{м}(k_1,k_2)$ та $H_0^{м}(-k_1,-k_2)$ ДПХ, замість значень $\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2)$ та $\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2)$ − відповідно значення $\Delta H_1(k_1,k_2)$ та $\Delta H_1(-k_1,-k_2)$. У результаті ітераційний вираз суми дисперсій похибок обчислення значень ДПХ можна записати так:

$$D[E(H_p^{м}(k_1,k_2))]+D[E(H_p^{м}(-k_1,-k_2))]=D[\varepsilon_{д}]\sum_{l=1}^{p}(D[H_l^{м}(k_1,k_2)]+D[H_l^{м}(-k_1,-k_2)])+$$

$$+(D[\varepsilon_{\text{ì}}\ ]+D[\varepsilon_{\text{ä}}])\sum_{l=1}^{p}(D[\Delta H_l(k_1,k_2)]+D[\Delta H_l(-k_1,-k_2)])+$$

$$+\sum_{l=1}^{p}(D[E(\Delta H_l(k_1,k_2))]+D[E(\Delta H_l(-k_1,-k_2))]) \,. \qquad (24)$$

Беручи до уваги, що $D[H_l^{\text{ì}}\ (k_1,k_2)]+D[H_l^{\text{ì}}\ (-k_1,-k_2)]=2D[F_l^{\text{ì}}\ (k_1,k_2)]$, $D[\Delta H_l(k_1,k_2)]+D[\Delta H_l(-k_1,-k_2)]=2D[\Delta F_l(k_1,k_2)]$ та $D[E(\Delta H_l(k_1,k_2))]+$ $+D[E(\Delta H_l(-k_1,-k_2))]=2D[E(\Delta F_l(k_1,k_2))]$ для $l>N_i/m_i$, сума дисперсій похибок обчислення значень ДПХ буде вдвічі більша за значення дисперсії похибки обчислення ДПФ за виразом (23), тобто середнє значення дисперсії похибки обчислення одного значення ДПХ збігається з дисперсією похибки обчислення значення ДПФ.

Прийнявши $D[\varepsilon_{\text{ì}}\ ]=D[\varepsilon_{\text{ä}}]=D[\varepsilon]$, вирази (13) та (23) можна записати так:

$$D[E(F_p(k_1,k_2))]=p[3N_1N_2+2K_2]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n_1,n_2)]\,, \qquad (25)$$

$$D[E(F_p^{\text{ì}}\ (k_1,k_2))]=p[(N_1N_2+4(m_1N_2+m_2N_1-m_1m_2))+2K_2]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n_1,n_2)]\,,(26)$$

де

$$K_2=m_1m_2\left(t_1+2t_3+t_2+\frac{1}{2}\right)+\frac{(m_1m_2)^2}{2}+m_1(N_2-m_2)\cdot\left(t_1+2t_3+\frac{3}{2}\right)+$$

$$+\frac{(m_1(N_2-m_2))^2}{2}+m_2(N_1-m_1)\cdot\left(t_1+t_3+\frac{3}{2}\right)+\frac{(m_2(N_1-m_1))^2}{2}\,.$$

Для проведення порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ і ДПХ визначимо дисперсії похибок обчислення на підставі (25) та (26) для $N_i>>m_i$, прийнявши $N_1=N_2=N$ та $m_1=m_2=m$, в результаті чого отримуємо

$$D[E(F_p(k_1,k_2))]\approx p\cdot(3+km^2)\cdot N^2\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n_1,n_2)]\,, \qquad (27)$$

$$D[E(F_p^{\text{ì}}\ (k_1,k_2))]\approx p\cdot(1+km^2)\cdot N^2\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n_1,n_2)]\,, \qquad (28)$$

де $k=2$ та $k=1$ під час обчислення для стрибкових та ковзних фрагментів за двома вимірами та одним виміром відповідно.

Аналізуючи вирази (27) та (28), можна зробити такі висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ і ДПХ збігається.

2. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ в 5/3–2 рази вища за точність обчислення звичайних двовимірних ДПФ і ДПХ для m = 1 та збігається для $m \to N$.

3. Точність рекурентних методів обчислення звичайних двовимірних ДПФ і ДПХ для ковзних фрагментів збігається з точністю обчислення для стрибкових фрагментів для $m \to 1$ та в $2N/5$–$N/4$ рази вища для $m \to N$.

4. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для ковзних фрагментів збігається з точністю обчислення для стрибкових фрагментів для $m \to 1$ та в $2N/3$–$N/2$ рази вища для $m \to N$.

Перспективою подальших досліджень у напрямку аналізу точності рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з плаваючою комою є перевірка отриманих теоретичних результатів на модельних прикладах.

1. *Волинець В. І.* Рекурентні алгоритми обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. – № 4. – С. 182–187.
2. *Волинець В. І.* Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – **1**, № 2. – С. 171–175.
3. *Волинець В. І.* Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з плаваючою комою // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – **11**, № 4. – С. 151–160.
4. *Волинець В. І.* Аналіз точності рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. – 2007. – **2**, № 3. – С. 180–185.
5. *Цифровые* анализаторы спектра / В. Н. Плотников, А. В. Белинский, В. А. Суханов, Ю. Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
6. *Ярославский Л. П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
7. *Kim Jae-Hwa, Tae-Gyu Chang.* Analytic derivation of the finite word length effect of the twiddle factors in recursive implementation of the sliding-DFT // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2000. – **48**, № 5. – P. 1485–1488.
8. *Zhu Y., Zhou H., Gu H., Wang Z.* Fixed-point error analysis and an efficient array processor design of two-dimensional sliding DFT // Signal Processing. – 1999. – **73**, № 3. – P. 191–201.

Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ

Одержано
07.08.2008