

УДК 621.391:519.22

І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько

**СХЕМА БЮЙ-БАЛЛО
ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЗМІН КОРЕЛЯЦІЙНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧНИХ КОЛИВАНЬ**

The analysis of coherent estimates of time changeability period for correlation and covariation functions of periodically correlated random processes is carried out. The formulae for estimates variation are derived, their properties are investigated.

Проведено аналіз когерентних оцінок періоду часової мінливості кореляційної і коваріаційної функцій періодично корельованого випадкового процесу. Виведено формули для дисперсії оцінок, досліджено їхні властивості.

В імовірнісній моделі прихованих періодичностей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) властивості коливань описуються періодичними змінами в часі імовірних характеристик як першого, так і другого порядків [1]. Зміни останніх зумовлені стохастичними амплітудою і фазовою модуляціями гармонічних складових. Їх можна виявити на основі аналізу часової мінливості оцінок кореляційних характеристик. Однією з найпростіших схем, яка може бути для цього використана, є так звана схема Бюй-Балло [2, 3]. Аналіз такої схеми у процесі виявлення періодичних змін регулярної складової коливань, яка описується математичним сподіванням ПКВП, був проведений у роботі [3]. Ця стаття присвячена узагальненню схеми Бюй-Балло для виявлення періодичних змін властивостей флуктуаційної складової коливань.

Розглянемо спочатку простіший випадок, коли $m(t) \equiv 0$. Для оцінки періоду сформуємо функціонал

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} = \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau) \overset{\circ}{\xi}(t+u+n\tau),$$

де $\overset{\circ}{\xi}(t)$ – значення реалізації процесу, математичне сподівання якого дорівнює нулю. Його регулярна складова

$$S(\tau) = E\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N b(t+n\tau, u),$$

а її похідні

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n b'_t(t+n\tau, u), \quad \frac{d^2S(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n^2 b''_t(t+n\tau, u).$$

Якщо $\tau = kT$, то

$$\left[\frac{dS(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=kT} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n b'_t(t+nkT, u) = 0,$$

$$\left[\frac{d^2S(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=kT} = \frac{\sum_{n=-N}^N n^2 b''_t(t+nkT, u)}{2N+1} = \frac{b''_t(t, u)}{2N+1} \sum_{n=-N}^N n^2 = \frac{b''_t(t, u)}{3} N(N+1).$$

© І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, 2009

Отже, якщо в момент часу t $b_l''(t, u) \neq 0$, то точки $\tau = kT$ відповідають екстремальним значенням регулярної складової

$$S(\tau) = \sum_{l \in \square} h_l(\tau) B_l(u) e^{i l \omega_0 \tau},$$

де

$$h_l(\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^{i l \omega_0 n \tau} = \frac{\sin l \omega_0 \left(N + \frac{1}{2} \right) \tau}{(2N+1) \sin l \frac{\pi}{T} \tau}.$$

Наявність нерегулярної складової

$$N(\tau) = \hat{b}(t, u, \tau) - S(\tau) \quad (1)$$

зміщує положення екстремуму, однак при великих довжинах відрізків реалізації, які обробляються, ці зміщення будуть незначними.

Якщо $\zeta(t, u) = \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u)$, то очевидно, що $E \zeta(t+n\tau, u) = b(t+n\tau, u)$. Тоді

$$N(\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\zeta}(t+n\tau).$$

Введемо в розгляд параметр

$$\gamma = \sqrt{\frac{EN^2(T)}{S(T)}} \quad (2)$$

і нормовані складові

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{S(\tau)}{S(T)}, \quad \tilde{N}(\tau) = \frac{N(\tau)}{\sqrt{EN^2(T)}}.$$

Тоді

$$\hat{b}(t, u, \tau) = S(T) [\tilde{S}(\tau) + \gamma \tilde{N}(\tau)]. \quad (3)$$

Легко бачити, що $S(T) = b(t, u)$. Оцінку періоду шукатимемо як положення абсолютного максимуму функціоналу (3). Це оцінка є розв'язком рівняння

$$\left[\frac{d\tilde{S}(\tau)}{d\tau} + \gamma \frac{d\tilde{N}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{t}} = 0. \quad (4)$$

Для середньоквадратичного значення нерегулярної складової (1) отримуємо

$$\begin{aligned} EN^2(\tau) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N E \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau, u) \overset{\circ}{\xi}(t+m\tau, u) = \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N b_{\zeta}(t+n\tau, (m-n)\tau, u), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} b_{\zeta}(t+n\tau, (m-n)\tau, u) &= \\ &= E \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau) \overset{\circ}{\xi}(t+u+n\tau) \overset{\circ}{\xi}(t+m\tau) \overset{\circ}{\xi}(t+u+m\tau) - b(t+n\tau, u) b(t+m\tau, u). \end{aligned}$$

Для гаусових ПКВП

$$b_{\zeta}(t+n\tau, (m-n)\tau, u) = b(t+n\tau, (m-n)\tau)b(t+u+n\tau, (m-n)\tau) + \\ + b(t+n\tau, u+(m-n)\tau)b(t+u+n\tau, (m-n)\tau-u).$$

Відтак

$$\gamma = \frac{1}{b(t, u)} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1} \right) \left[b(t, kT)b(t+u, kT) + \right. \right. \\ \left. \left. + b(t, u+kT)b(t+u, kT-u) \right] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Якщо кореляційні зв'язки процесу зникають з ростом зсуву u , тобто

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} b(t, u) = 0, \quad (5)$$

то для всіх значень t , при яких $b(t, u) \neq 0$, $\gamma \rightarrow 0$, коли $N \rightarrow \infty$. Тому величину (2) можемо вважати малим параметром, а розв'язок рівняння (4) шукати у вигляді ряду за степенями γ :

$$\hat{T} = T + \gamma T_1 + \gamma^2 T_2 + \gamma^3 T_3 + \dots$$

Оцінка періоду в першому наближенні має такий вигляд [3]:

$$\hat{T} = T - \gamma \frac{n_1}{S_2},$$

де

$$s_2 = \left[\frac{d^2 \tilde{S}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=T}, \quad n_1 = \left[\frac{d\tilde{N}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T}.$$

Оскільки

$$En_1 = \frac{1}{\sqrt{EN^2(T)}} \left[\frac{dEN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T} = 0,$$

то така оцінка є незміщеною. Для її дисперсії знаходимо

$$D[\hat{T}] = \gamma^2 \frac{E \left[\frac{dN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T}^2}{EN^2(T)} = \frac{9E \left[\frac{dN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T}^2}{[N(N+1)b_t^*(t, u)]^2}.$$

Узявши до уваги, що

$$\frac{dN(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau, u)}{\partial \tau},$$

маємо

$$E \left[\frac{dN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T}^2 = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m, n=-N}^N E \left[\frac{\partial \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial \overset{\circ}{\xi}(t+m\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T}.$$

Оскільки

$$\left[\frac{\partial \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} \left[\frac{\partial \overset{\circ}{\xi}(t+m\tau, u)}{\partial \tau} \right]_{\tau=T} = \left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{\xi}(t+nx, u) \overset{\circ}{\xi}(t+my, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}},$$

то

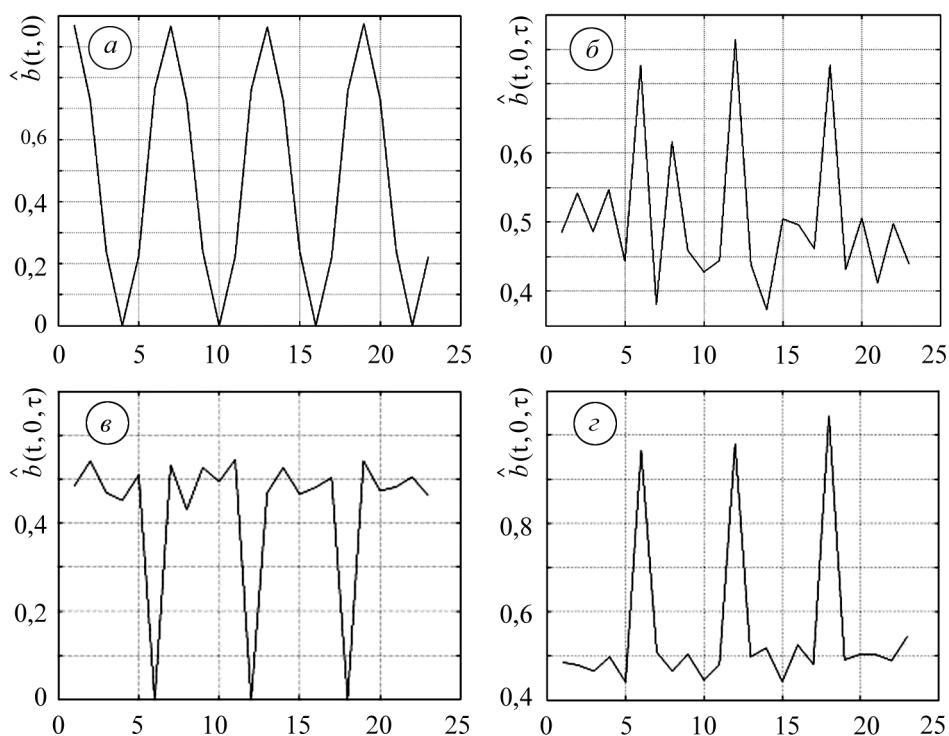
$$E \left[\frac{dN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=T}^2 = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E \xi(t+nx, u) \xi(t+my, u) \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} =$$

$$= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2 b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}},$$

отже,

$$D[\hat{T}] = 9 \left[N(N+1)(2N+1) b''_t(t, u) \right]^{-2} \sum_{m,n=-N}^N \left[\frac{\partial^2 b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}. \quad (6)$$

З останнього виразу випливає, що $D[\hat{T}] \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, якщо кореляційні зв'язки процесу зникають з ростом зсуву u . Недопустимим під час оцінки періоду є вибір тих значень t , для котрих $b(t, u) = 0$ чи $b''(t, u) \neq 0$. Найменшу дисперсію при заданих N отримуємо для таких моментів часу t , де кривизна часової залежності кореляційної функції є максимальною (див. рисунок).



Оцінка кореляційної функції (а) залежно від кількості періодів усереднення $N = 100$; залежності функціоналу $\hat{b}(t, u, \tau)$ від величини пробного періоду τ для різних t , отриманих з використанням симуляційних комп'ютерних моделей: б - $t = 2$; в - $t = 4$; г - $t = 7$.

Запишемо кореляційну функцію $b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u)$ у вигляді ряду Фур'є [4]:

$$b_{\zeta}(t+nx, my-nx, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_k(my-nx, u) e^{ik\omega_0(t+nx)}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 b_\zeta(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} = mn \sum_{k \in \mathbb{I}} \left[ik\omega_0 \tilde{B}'_k(my-nx, u) - \tilde{B}''_k(ny-nx, u) \right] e^{ik\omega_0(t+nx)}, \quad (7)$$

а звідси

$$D[\hat{T}] = 9 \frac{\sum_{m,n=-N}^N mn \left[\sum_{k \in \mathbb{I}} [ik\omega_0 \tilde{B}'_k[(m-n)T, u] - \tilde{B}''_k[(m-n)T, u]] \right] e^{ik\omega_0 t}}{[N(N+1)(2N+1)b''_t(t, u)]^2}.$$

Легко бачити також, що

$$\frac{\partial^2 b_\zeta(s, u_1, u)}{\partial u_1 \partial s} = i\omega_0 \sum_{k \in \mathbb{I}} k \tilde{B}'_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 s},$$

$$\frac{\partial^2 b_\zeta(s, u_1, u)}{\partial^2 u_1} = \sum_{k \in \mathbb{I}} k \tilde{B}''_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 s},$$

тому другу мішану похідну (7) в точках $x=T$, $y=T$ можна записати у вигляді

$$\left[\frac{\partial^2 b_\zeta(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}} = mn \left[\frac{\partial^2 b_\zeta(s, u_1, u)}{\partial u_1 \partial s} - \frac{\partial^2 b_\zeta(s, u_1, u)}{\partial^2 u_1} \right]_{\substack{u_1=(m-n)T \\ s=t}}.$$

Конкретизуємо тепер формулу дисперсії (6) для мультиплікативної моделі

$\xi(t) = \eta(t)f(t)$. Тоді $\zeta(t) = \eta(t)\eta(t+u)f(t)f(t+u)$ і

$$b_\zeta(t+nx, my-nx, u) = \left[R_\eta^2(my-nx) + R_\eta(my-nx+u)R_\eta(my-nx-u) \right] \times \\ \times f(t+nx)f(t+nx+u)f(t+mx)f(t+mx+u).$$

Якщо $u=0$, то матимемо

$$\frac{\partial^2 b_\zeta(t+nx, my-nx, 0)}{\partial x \partial y} = \\ = 4mn \left[2R_\eta^2(my-nx)f(t+nx)f'(t+nx)f(t+my)f'(t+my) + \right. \\ \left. + \left[2f(t+nx)f'(t+nx)f^2(t+my) - 2f(t+my)f'(t+my)f^2(t+nx) \right] \times \right. \\ \left. \times R_\eta(my-nx)R'_\eta(my-nx) - [R'_\eta(my-nx)]^2 f^2(t+nx)f^2(t+my) - \right. \\ \left. - R_\eta(my-nx)R''_\eta(my-nx)f^2(t+nx)f^2(t+my) \right].$$

Звідси, врахувавши, що

$$b''_t(t, u) = R_\eta(u)[f''(t)f(t+u) + 2f'(t)f(t+u) + f(t)f''(t+u)],$$

отримуємо

$$D[\hat{T}] = \frac{36f^2(t)}{[N(N+1)(2N+1)b''_t(t, 0)]^2} \sum_{m,n=-N}^N mn \left[2R^2[(m-n)T][f'(t)] - \right. \\ \left. - \left[R[(m-n)T]R''[(m-n)T] - [R'[(m-n)T]]^2 \right] f^2(t) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{18f^2(t)}{[R_{\eta}(0)N(N+1)(2N+1)[f''(t)f(t) + [f'(t)]^2]]^2} \times \\
&\times \sum_{m,n=1}^N mn \left[2[R_{\eta}^2[(m-n)T] - R_{\eta}^2[(m+n)T]][f'(t)]^2 - \right. \\
&- \left[R_{\eta}[(m-n)T]R_{\eta}''[(m-n)T] + R_{\eta}[(m+n)T]R_{\eta}''[(m+n)T] - \right. \\
&- \left. [R_{\eta}'[(m-n)T]]^2 - [R_{\eta}'[(m+n)T]]^2 \right] [f'(t)]^2 \left. \right]. \tag{8}
\end{aligned}$$

Для швидкозникаючих кореляційних зв'язків

$$D[\hat{T}] = \frac{3f^2(t) \left[2R_{\eta}^2(0)[f'(t)]^2 - [R_{\eta}(0)R_{\eta}''(0) + [R_{\eta}'(0)]^2] \right] f^2(t)}{R_{\eta}^2(0)N(N+1)(2N+1)[[f''(t)f(t) + [f'(t)]^2]]^2}.$$

Якщо $R_{\eta}(u) = De^{-\alpha u^2}$ і $f(t) = \cos \omega_0 t$, то

$$D[\hat{T}] = \frac{6 \cos^2 \omega_0 t (\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \alpha \cos^2 \omega_0 t)}{\omega_0^4 N(N+1)(2N+1) \cos^2 2\omega_0 t}.$$

Дисперсія оцінки періоду, як бачимо, не залежить від дисперсії модулюючого сигналу, а визначається тільки швидкістю зникання його кореляційних зв'язків. При $t = 0$ маємо

$$D[\hat{T}] = \frac{6\alpha}{\omega_0^4 N(N+1)(2N+1)}.$$

Ця величина швидко зникає з ростом числа періодів усереднення N . Залежність дисперсії оцінки періоду від N у загальному випадку відображена в табл. 1.

Таблиця 1. Залежність дисперсії оцінки періоду від кількості періодів N для різних α

N	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,01$
1	6,665863464	0,133317269
10	0,017313931	0,000346278
20	0,002322600	0,000046452
30	0,000705009	0,000014100
40	0,000301077	0,000006021
50	0,000155290	0,000003105
60	0,000090311	0,000001806
70	0,000057073	0,000001141
80	0,000038335	0,000000766
90	0,000026980	0,000000539
100	0,000019701	0,000000394

Описаний вище метод визначення періоду легко узагальнюється на випадок, коли математичне сподівання ПКВП не дорівнює нулю. Тоді доцільно використовувати коваріаційне перетворення

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau)\xi(t+u+n\tau).$$

Якщо $\tau = T$, то математичне сподівання цього функціоналу

$$S(\tau) = E\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \tilde{b}(t+n\tau, u)$$

дорівнює коваріаційній функції сигналу

$$S(\tau) = \tilde{b}(t, u) = b(t, u) + m(t)m(t+u).$$

Нерегулярна складова у цьому випадку

$$N(\tau) = \hat{b}(t, u, \tau) - S(\tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \overset{\circ}{\xi}(t+n\tau, u), \quad \overset{\circ}{\xi}(t, u) = \xi(t)\xi(t+u) - \tilde{b}(t, u).$$

Для її середньоквадратичного значення

$$EN^2(\tau) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N b_{\xi}(t+n\tau, (k-n)\tau, u),$$

де

$$b_{\xi}(t+n\tau, (k-n)\tau, u) = E\xi(t+n\tau)\xi(t+u+n\tau)\xi(t+k\tau)\xi(t+u+k\tau) - \tilde{b}(t+n\tau, u)\tilde{b}(t+k\tau, u).$$

Враховуючи, що непарні центральні моменти центрованого гаусового ПКВП дорівнюють нулю, знаходимо:

$$\begin{aligned} & E\xi(t+n\tau)\xi(t+u+n\tau)\xi(t+k\tau)\xi(t+u+k\tau) - \tilde{b}(t+n\tau, u)\tilde{b}(t+k\tau, u) = \\ & = E[\overset{\circ}{\xi}(t+n\tau) + m(t+n\tau)][\overset{\circ}{\xi}(t+u+n\tau) + m(t+u+n\tau)][\overset{\circ}{\xi}(t+k\tau) + m(t+k\tau)] \times \\ & \times [\overset{\circ}{\xi}(t+u+k\tau) + m(t+u+k\tau)] - \tilde{b}(t+n\tau, u)\tilde{b}(t+k\tau, u) = \\ & = b(t+n\tau, (k-n)\tau)b(t+n\tau+u, (k-n)\tau) + b(t+n\tau, (k-n)\tau+u) \times \\ & \times b(t+n\tau+u, (k-n)\tau-u) + m(t+u+n\tau)m(t+u+k\tau)b(t+n\tau, (m-n)\tau) + \\ & + m(t+k\tau)m(t+u+n\tau)b(t+n\tau, (k-n)\tau+u) + m(t+n\tau)m(t+u+k\tau) \times \\ & \times b(t+n\tau, (k-n)\tau-u) + m(t+n\tau)m(t+k\tau)b(t+n\tau+u, (m-n)\tau). \end{aligned}$$

Відношення (2) тоді дорівнює

$$\gamma = \frac{1}{\tilde{b}(t, u)} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|k|}{2N+1} \right) [b(t, kT)b(t+u, kT) + b(t, u+kT)b(t, u-kT)] + m^2(t+u)b(t, kT) + m^2(t)b(t, kT) + m(t)m(t+u)[b(t, u+kT) + b(t, u-kT)] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

У разі виконання умови (5) і великих N ця величина буде досить малою. Тому властивості оцінки періоду можуть бути проаналізовані з використанням методу малого параметру. Повторюючи перетворення, проведені вище, для дисперсії оцінки отримуємо вираз, подібний до (6):

$$D[\hat{T}] = 9[N(N+1)(2N+1)\tilde{b}_t''(t, u)]^{-2} \sum_{m, n=-N}^N \left[\frac{\partial^2 b_{\xi}(t+nx, my-nx, u)}{\partial x \partial y} \right]_{x=T}^{y=T}. \quad (9)$$

Для мультиплікативної моделі $\xi(t) = \eta(t)f(t)$, коли $m_{\eta} = E\eta(t) \neq 0$:

$$b_{\zeta}^2(t + nx, my - nx, u) = R_{\eta}^2(my - nx) + R_{\eta}(my - nx + u)R_{\eta}(my - nx - u) + \\ + m_{\eta}^2[2R_{\eta}(my - nx) + R_{\eta}(my - nx + u) + R_{\eta}(my - nx - u)] \times \\ \times f(t + nx)f(t + u + nx)f(t + mx)f(t + u + mx).$$

Друга мішана похідна при нульовому зсуві $u = 0$:

$$\frac{\partial^2 b_{\zeta}(t + nx, my - nx, u)}{\partial x \partial y} = 4mn \left[[2R_{\eta}^2(my - nx) + 4m_{\eta}^2 R_{\eta}(my - nx)] \times \right. \\ \times f(t + nx)f(t + my)f'(t + nx)f'(t + my) - [R'_{\eta}(my - nx)]^2 + \\ \left. + R''_{\eta}(my - nx)R_{\eta}(my - nx) + m_{\eta}^2 R''_{\eta}(my - nx) \right] f^2(t + nx)f^2(t + my) + \\ + 8mn \left[f^2(t + nx)f(t + my)f'(t + mx) + f^2(t + my)f(t + nx)f'(t + nx) \right] \times \\ \times \left[R_{\eta}(my - nx)R'_{\eta}(my - nx) + m_{\eta}^2 R'_{\eta}(my - nx) \right].$$

Вираз для дисперсії (9) тоді набуває такого вигляду:

$$D[\hat{T}] = \frac{36f^2(t)}{[N(N+1)(2N+1)\tilde{b}_t''(t,0)]^2} \sum_{m,n=-N}^N mn \left[\begin{aligned} & \left[2R_{\eta}^2[(m-n)T] + \right. \\ & \left. + 4m_{\eta}^2 R_{\eta}[(m-n)T] \right] f'^2(t) - \\ & - \left[R'_{\eta}[(m-n)T] \right]^2 + R''_{\eta}[(m-n)T]R_{\eta}[(m-n)T] + m_{\eta}^2 R''_{\eta}[(m-n)T] \end{aligned} \right] f^2(t) = \\ = \frac{18f^2(t)}{\tilde{R}_{\eta}^2(0)[N(N+1)(2N+1)[f''(t)f(t) + [f'(t)]^2]^2} \times \\ \times \sum_{m,n=1}^N mn \left[\begin{aligned} & 2 \left[R_{\eta}^2[(m-n)T] - R_{\eta}^2[(m+n)T] + 2m_{\eta}^2 \left[R_{\eta}[(m-n)T] - \right. \right. \\ & - R_{\eta}[(m+n)T] \left. \left. \right] \right] [f'(t)]^2 + \left[R'_{\eta}[(m-n)T] \right]^2 - \left[R'_{\eta}[(m+n)T] \right]^2 + \\ & + R''_{\eta}[(m-n)T]R_{\eta}[(m-n)T] - R''_{\eta}[(m+n)T]R_{\eta}[(m+n)T] + \\ & + m_{\eta}^2 \left[R_{\eta}[(m-n)T] - R_{\eta}[(m+n)T] \right] \end{aligned} \right] f^2(t). \quad (10)$$

де $\tilde{R}_{\eta}(0) = R_{\eta}(0) + m_{\eta}^2$. Очевидно, що цей вираз при $m_{\eta} = 0$ збігається з (8).

При швидкозаникаючих кореляціях

$$D[\hat{T}] = \frac{3f^2(t)}{\tilde{R}_{\eta}^2(0)N(N+1)(2N+1)[f''(t)f(t) + [f'(t)]^2]^2} \times \\ \times \left[2[R_{\eta}^2(0) + 2m_{\eta}^2 R_{\eta}(0)][f'(t)]^2 - [R'_{\eta}(0)]^2 + R_{\eta}(0)R''_{\eta}(0) + m_{\eta}^2 R''_{\eta}(0) \right] f^2(t).$$

Для $R_{\eta}(u) = De^{-\alpha u^2}$ і $f(t) = \cos \omega_0 t$, то

$$D[\hat{T}] = \frac{6 \cos^2 \omega_0 t \left[\omega_0^2 \left(1 + \frac{2m_{\eta}^2}{D} \right) \sin^2 \omega_0 t + \alpha \cos^2 \omega_0 t \right]}{\omega_0^4 \left(1 + \frac{m_{\eta}^2}{D} \right) N(N+1)(2N+1) \cos^2 2\omega_0 t}.$$

Вибравши $t = 0$, одержимо:

$$D[\hat{T}] = \frac{6\alpha}{\omega_0^4 N(N+1)(2N+1) \left(1 + \frac{m_\eta^2}{D}\right)}.$$

Дисперсія оцінки періоду, як видно, зменшується зі збільшенням відношення квадрату математичного сподівання до дисперсії сигналу. Залежність дисперсії від усього відношення в загальному випадку наведено на табл. 2.

Таблиця 2. Залежність дисперсії оцінки періоду від кількості періодів N для $\alpha = 0,5$ і різних m_η

N	$m = 0$	$m = 0,01$	$m = 0,5$
1	6,665863464	6,665196877	4,999397598
10	0,017313931	0,017312199	0,012985448
20	0,002322600	0,002322368	0,001741950
30	0,000705009	0,000704938	0,000528757
40	0,000301077	0,000301047	0,000225808
50	0,000155290	0,000155275	0,000116468
60	0,000090311	0,000090302	0,000067733
70	0,000057073	0,000057067	0,000042804
80	0,000038335	0,000038332	0,000028751
90	0,000026980	0,000026977	0,000020235
100	0,000019701	0,000019699	0,000014775

Отже, функціонали, побудовані на основі усереднення через деякий пробний період кореляційного чи коваріаційного добутку значень ПКВП, мають селективні властивості щодо величин цього періоду. В роботі доведено, що точки екстремальних значень функціоналів можуть бути прийняті за оцінки періоду. Виведені за допомогою методу малого параметра формули для дисперсії оцінок дають можливість визначати точність такого оцінювання і дослідити її залежність від довжини відрізка реалізації її параметрів, що описують імовірнісну структуру сигналу. Акцентуємо, що результат цього методу оцінювання суттєво залежить від початкової точки конкретного усереднення і найкращі результати отримують тоді, коли ці точки відповідають екстремальним значенням вибраної для оцінювання імовірної характеристики.

1. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 319 с.
2. Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. – М: Наука, 1965. – 244 с.
3. Яворський І. М., Мацько І. Й., Юзефович Р. М. Когерентні оцінки періоду регулярної складової періодично нестационарних випадкових процесів // Відбір і обробка інформації. – 2008. – Вип. 29 (105). – С. 37–42.
4. Coherent covariance analysis of periodically correlated random process / I. Javors'kyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski and S. P. Brooks. // Signal Processing. – 2007. – **87**, № 1. – P. 13–32.