

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ,
ДИФРАГОВАНОГО НА ТРІЩИНІ У МЕТАЛІ**

For estimating of the parameters of the eddy-current transformer and procedure of scanning of the conducting objects, the model of the crack as the electric dipole distribution surface, which electromagnetic field is equivalent to the field scattered by the crack, is proposed. The problem is reduced to the hypersingular integral equation. The solution of this equation is applied for modeling of the crack's magnetic field and the signal induced in coil.

Для оцінки структури вихрострумowego перетворювача і методики сканування провідного об'єкта запропоновано модель тріщини у вигляді поверхневого розподілу електричних диполів, поле яких еквівалентно полю, розсіяному тріщиною. Задачу зведено до гіперсингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок цього рівняння використано для моделювання магнітного поля тріщини та сигналу, наведеного у витку.

Перспективним підходом до розв'язування задач теорії дифракції електромагнетного поля на тілах з просторовими тріщинами є метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який базується на результатах теорії потенціалів. Його переваги полягають у загальності щодо розмірності задач, у задоволенні різнотипних граничних умов, форми та кількості тріщин. Розв'язки ГІР є важливими під час подальшого дослідження електромагнетного поля розсіяного тріщинами, оцінки роздільної здатності методів неруйнівного контролю, визначення сигналів наведених тріщинами у первинних перетворювачах низькочастотного електромагнетного поля. У більшості випадків як первинний перетворювач використовують мікрозонди, основним елементом яких є вимірна котушка, електричний сигнал якої містить інформацію про контрольований об'єкт. Якщо перетин витків котушки значно менший від її діаметра, то додаткову електрорушійну силу, наведену у котушці, можна розрахувати за допомогою співвідношень, отриманих для окремого витка [3].

Авторами було розглянуто тривимірну задачу дифракції плоскої електромагнетної хвилі низької частоти на тріщині у напівбезмежному провідному середовищі (металі). Як модель дефекту розглянуто розріз по розімкненій поверхні з деяким розподілом електричних диполів на ній. Електромагнетне поле диполів вважали еквівалентним розсіяному дефектом полю. Для визначення розподілу диполів отримано у [4] гіперсингулярне рівняння та запропоновано його чисельне розв'язання. У цій роботі отримані розв'язки використано для моделювання поля та сигналу, наведеного тріщиною у круговому витку.

Постава задачі. Нехай провідне середовище з плоскою границею і електропровідністю σ містить неоднорідність S ; магнітна проникність тріщини і середовища, яке їх оточує, дорівнює μ_0 . За первинне поле вважатимемо поле плоскої хвилі, напрям поширення якої перпендикулярний до поверхні провідника. Тоді вектор електричного поля запишемо у вигляді $\vec{E}_i(x) = \vec{E}_0 e^{ikh}$, де $k^2 = i\omega\sigma\mu_0$ ($\text{Im } k > 0$) – квадрат хвильового числа нижнього середовища; h – відстань від точки спостереження до поверхні; \vec{E}_0 – компонента вектора електричного поля на поверхні провідника.

Необхідно знайти та дослідити електромагнетне поле, розсіяне цією тріщиною, та електрорушійну силу, наведену цим полем у круговому витку радіуса R_v , що знаходиться у верхньому середовищі в площині, паралельній границі розподілу середовищ на висоті h_v .

Для подальшого викладу виберемо основну систему координат $Ox_1x_2x_3$. Вісь Ox_3 направимо перпендикулярно до площини розділу середовищ, а вісь Ox_2 – вздовж вектора \vec{E}_0 . Вісь Ox_1 виберемо таким чином, щоб система $Ox_1x_2x_3$ була правою системою координат.

Інтегральне рівняння для розподілу диполів на поверхні тріщини. Позначимо через $\psi(y)$ густину розподілу електричних диполів на поверхні тріщини S з моментом направленим вздовж її нормалі \vec{n} , поле яких еквівалентне полю, розсіяному тріщиною. Згідно з [4] для визначення $\psi(y)$ маємо інтегральне рівняння

$$\int_S \psi(y) v_1(R) dS_y = 4\pi\gamma ik H_0 e^{-ikx_3}, \quad (1)$$

де $v_1(R) = \frac{e^{ikR}}{R^3} (k^2 R^2 + ikR - 1)$; $v_2(R) = \frac{e^{ikR}}{R^5} (3 - 3ikR - k^2 R^2)$; R – відстань між

точками $x, y \in S$, γ – проекція \vec{n} на вісь Ox_2 . H_0 – компонента вектора магнітного поля падаючої хвилі на поверхні провідника.

Для його чисельного розв'язування було запропоновано використати метод граничних елементів [4]. Суттєвим моментом його застосування є вибір розбиття області S . У роботі [5] використано розбиття на граничні елементи спеціальної форми (секторального типу). Проте використання граничних елементів у формі прямокутників дає змогу уникнути принципових труднощів під час чисельного знаходження інтегралів спеціального вигляду на граничних елементах, розташованих біля точки сингулярності x за допомогою стандартних кубатурних формул, що значно підвищує точність їх обчислення.

Розіб'ємо область S на прямокутники зі сторонами h_1, h_2 . Позначимо через $\{S_l\}, l = \overline{1, N}$ множину прямокутників, які належать області S . Прямокутник, що містить точку спостереження x , позначимо через S_{l_0} . За вузлові точки $\bar{y}_l = \{\bar{y}_{l1}, \bar{y}_{l2}\}$ візьмемо центри прямокутних елементів S_l . Шукатимемо наближений розв'язок $\psi_p(y)$ у вигляді

$$\psi_p(y) = \sum_{l=1}^N \psi_l \theta_l(y), \quad (2)$$

де $\theta_l(y) = \begin{cases} 1, & y \in S_l \\ 0, & y \notin S_l \end{cases}$, ψ_l – значення невідомої функції $\psi(x)$ у l -й вузловій точці.

Використавши такий спосіб подання невідомої функції та прийнявши за точки колокації центральні точки прямокутників S_l , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих ψ_l . Після її розв'язання та підстановки цього розв'язку у (2) завершується побудова дискретного наближення розв'язку $\psi(y)$. З фізичного погляду, кожному елементу площі S_l відповідатиме електричний диполь з моментом $\Delta \vec{P}_l = \psi_p(\bar{y}_l) h_1 h_2 \vec{n}$. Для обчислення поля, розсіяного тріщиною, та е.р.с., наведеного ним у первинному перетворювачі, згідно з принципом суперпозиції, достатньо просумувати електромагнетне поле усіх диполів $\Delta \vec{P}_l$. Для цього нам необхідні вирази для низькочастотного магнітного поля, створюваного диполем у верхньому середовищі.

Низькочастотне магнітне поле електричного диполя у верхньому середовищі. Нехай довільно орієнтований електричний диполь з моментом \vec{p} розміщений на глибині h у нижньому середовищі. Виберемо локальну декартову систему координат $O'xyz$, у центрі якої міститься диполь, а осі паралельні осям глобальної системи $Ox_1x_2x_3$. Покладемо φ_0, θ_0 – полярні кути моменту диполя \vec{p} у сферичній системі, пов'язаній з $O'xyz$. Використавши відомі вирази електромагнетного поля диполя у шаруватому середовищі через векторні циліндричні хвильові функції [1], за умови $k_0 \rightarrow 0$, де $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ – квадрат хвильового числа верхнього середовища, отримаємо такі вирази для компонент магнітного поля диполя у верхньому середовищі у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) :

$$\begin{aligned} H_1^{\rho}(\rho, \varphi, z) &= \frac{p \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi)}{2\pi k^2} \int_0^{\infty} \lambda^2 (\lambda - \eta) J_1'(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \\ H_1^{\varphi}(\rho, \varphi, z) &= -\frac{p \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)}{2\pi k^2 \rho} \int_0^{\infty} \lambda (\lambda - \eta) J_1(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \\ H_1^z(\rho, \varphi, z) &= -\frac{p \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi)}{2\pi k^2} \int_0^{\infty} \lambda^2 (\lambda - \eta) J_1(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$; $\text{Re} \eta > 0$; $J_1(x)$ – циліндрична функція Бесселя першого роду.

Електрорушійна сила, наведена у круговому витку магнітним полем диполя. Електрорушійну силу e , яка наведеться змінним магнітним полем у витку, визначають так [3]:

$$e = i\omega \mu \iint_C \vec{n}_0 \vec{H} ds,$$

де \vec{n}_0 – нормаль до площини витка; C – область, обмежена витком. Нехай C – круг радіуса R_v та центр витка O' має координати ρ_w, φ_w, z_w . Враховуючи, що виток знаходиться у площині, паралельній до границі розподілу середовищ, та використовуючи теорему додавання для циліндричних функцій [2], електрорушійну силу e , наведену в круговому витку магнітним полем електричного диполя, можна записати так:

$$e = \frac{p R_v \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_w)}{\sigma} \int_0^{\infty} \lambda (\lambda - \eta) J_1(\lambda \rho_w) J_1(\lambda R) e^{\lambda(h-z_w) - h\eta} d\lambda. \quad (4)$$

Електромагнетне поле еліптичної тріщини з урахуванням границі розділу середовищ. Нехай тріщина описується еліптичним диском S з півосями a і b ($a \geq b$) та центром у точці O_1 . Розв'язавши інтегральне рівняння (1), отримаємо густину розподілу диполів по поверхні S , яку позначимо через $\psi(y)$. Використовуючи цей розподіл, визначимо електромагнетне поле в довільній точці спостереження $x(x_1, x_2, x_3)$ у верхньому середовищі. Позначимо через $O_1y_1y_2y_3$ систему координат з центром в O_1 , осями O_1y_1 і O_1y_2 , що лежать у площині тріщини, та O_1y_3 вздовж нормалі \vec{n} . Виберемо також допоміжну прямокутну систему $yx_1x_2x_3$ з центром у точці y і з осями, паралельними до основної системи координат $Ox_1x_2x_3$. Розглянемо на S деякий малий елемент площі dS_y навколо точки y з координатами $(y_1, y_2, 0)$ відносно $O_1y_1y_2y_3$. Елементові площі dS_y

відповідатиме електричний диполь з моментом $d\vec{P} = \psi(y) dS_y \vec{n}$. Згідно з формулами (3) компоненти вектора магнітного поля цього диполя у верхньому середовищі запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} dH_\rho(x; y) &= \frac{dPi}{2\pi k^2} \sin \theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) G_\rho(\rho, z; h), \\ dH_\varphi(x; y) &= \frac{dPi}{2\pi k^2 \rho} \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) G_\varphi(\rho, z; h), \\ dH_z(x; y) &= -\frac{dPi}{2\pi k^2} \sin \theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) G_z(\rho, z; h). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут

$$\begin{aligned} G_\rho(\rho, z; h) &= -\int_0^\infty \lambda^2 (\eta - \lambda) J_1'(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \\ G_\varphi(\rho, z; h) &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \lambda (\eta - \lambda) J_1(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \\ G_z(\rho, z; h) &= \int_0^\infty \lambda^2 (\eta - \lambda) J_1(\lambda \rho) e^{\lambda(h-z) - h\eta} d\lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

де $h = h(y)$, $(\rho = \rho(x; y), \varphi = \varphi(x; y), z = z(x; y))$ – координати точки x в циліндричній системі $\rho\varphi z$, зв'язаній з прямокутною системою координат $x_1 x_2 x_3$.

Для того, щоб проінтегрувати отримані вирази по S , запишемо компоненти магнітного поля $d\vec{H}$ у системі координат $Ox_1 x_2 x_3$:

$$\begin{aligned} dH_{x_1}(x; y) &= dH_\rho(x; y) \cos \varphi - dH_\varphi(x; y) \sin \varphi, \\ dH_{x_2}(x; y) &= dH_\rho(x; y) \sin \varphi + dH_\varphi(x; y) \cos \varphi, \\ dH_{x_3}(x; y) &= dH_z(x; y). \end{aligned}$$

Звідси, беручи до уваги (5) та (6), враховуючи перехід від еліптичної області інтегрування до кругової S_c та привівши всі величини до безрозмірних, отримаємо такі вирази для магнітного поля тріщини S у верхньому середовищі:

$$\begin{aligned} h_{x_1}(x) &= \frac{i}{2\pi k^2 m} \sin \theta_0 \int_{S_c} \bar{f}(y) \left[\begin{aligned} &\sin(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi G_\rho(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}; \bar{h}) - \\ &-\cos(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi G_\varphi(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}; \bar{h}) \end{aligned} \right] dS_y, \\ h_{x_2}(x) &= \frac{i}{2\pi k^2 m} \sin \theta_0 \int_{S_c} \bar{f}(y) \left[\begin{aligned} &\sin(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi G_\rho(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}; \bar{h}) + \\ &+\cos(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi G_\varphi(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}; \bar{h}) \end{aligned} \right] dS_y, \\ h_{x_3}(x) &= -\frac{i}{2\pi k^2 m} \sin \theta_0 \int_{S_c} \bar{f}(y) \sin(\varphi - \varphi_0) G_z(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}; \bar{h}) dS_y, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{\lambda} = a\lambda$, $m = a/b$, $\bar{k} = ak$, $\bar{\rho} = \rho/a$, $\bar{z} = z/a$, $\bar{h} = h/a$, $\bar{h}(x) = \vec{H}(x)/H_0$, $\bar{f}(y) = \psi(y)/H_0$.

Аналогічно знаходимо вираз для електрорушійної сили, яка наводиться у круговому витку магнітним полем тріщин. Після нескладних перетворень отримаємо з (4):

$$U = -4\pi\gamma\bar{R}_v \sin\theta_0 \int_{S_c} \left[\bar{f}(y) \sin(\varphi_0 - \varphi_w) \times \int_0^\infty \lambda(\lambda - \bar{\eta}) J_1(\lambda\bar{\rho}_w) J_1(\lambda\bar{R}_v) e^{\lambda(\bar{h} - \bar{z}_w) - \bar{h}\bar{\eta}} d\lambda \right] dS_y, \quad (8)$$

де $U = e/E_0$, $\bar{R}_v = R_v/a$, $\bar{\rho}_w = \rho_w/a$, $\bar{z}_w = z_w/a$, $\bar{\eta} = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, γ – проекція вектора \bar{n} на вісь Ox_2 .

Чисельне моделювання та аналіз його результатів. Наближені вирази для магнітного поля у верхньому середовищі, розсіяного тріщиною, отримуємо після підстановки (2) в (7). За достатньо малих розмірів граничних елементів S_l наведені наближені рівності можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} h_{x_1}(x) &\approx \frac{i}{2\pi k^2 m} \sin\theta_0 \sum_{l=1}^N \bar{f}_l \left[\begin{aligned} &\sin(\varphi_l - \varphi_0) \cos\varphi_l G_\rho(\bar{\rho}_l, \varphi_l, \bar{z}_l; \bar{h}_l) - \\ &-\cos(\varphi_l - \varphi_0) \sin\varphi_l G_\varphi(\bar{\rho}_l, \varphi_l, \bar{z}_l; \bar{h}_l) \end{aligned} \right] \Delta S, \\ h_{x_2}(x) &\approx \frac{i}{2\pi k^2 m} \sin\theta_0 \sum_{l=1}^N \bar{f}_l \left[\begin{aligned} &\sin(\varphi_l - \varphi_0) \sin\varphi_l G_\rho(\bar{\rho}_l, \varphi_l, \bar{z}_l; \bar{h}_l) + \\ &+\cos(\varphi_l - \varphi_0) \cos\varphi_l G_\varphi(\bar{\rho}_l, \varphi_l, \bar{z}_l; \bar{h}_l) \end{aligned} \right] \Delta S, \\ h_{x_3}(x) &\approx -\frac{i}{2\pi k^2 m} \sin\theta_0 \sum_{l=1}^N \bar{f}_l \sin(\varphi_l - \varphi_0) G_z(\bar{\rho}_l, \varphi_l, \bar{z}_l; \bar{h}_l) \Delta S. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\Delta S = h_1 h_2$; $\bar{\rho}_l = \bar{\rho}(x, \bar{y}_l)$; $\varphi_l = \varphi(x, \bar{y}_l)$; $\bar{z}_l = \bar{z}(x, \bar{y}_l)$; $\bar{h}_l = \bar{h}(x, \bar{y}_l)$; \bar{f}_l – значення $\bar{f}(y)$ в центрі прямокутника S_l .

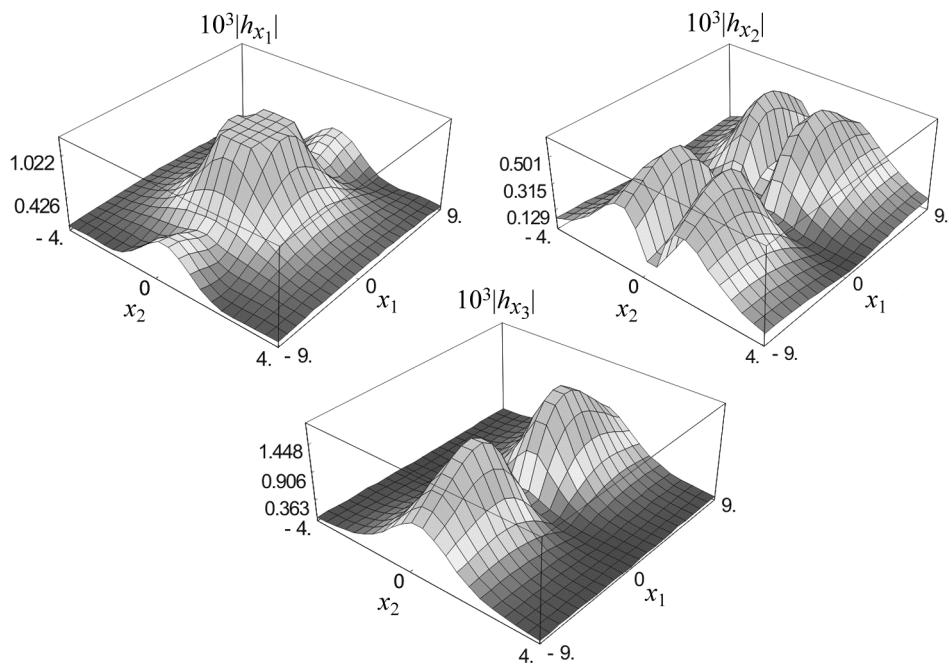
Аналогічним шляхом з (8) отримуємо

$$U = -4\pi\gamma\bar{R}_v \sin\theta_0 \sum_{l=1}^N \left[\begin{aligned} &\sin(\varphi_0 - \varphi_{wl}) \times \\ &\times \int_0^\infty \lambda(\lambda - \bar{\eta}) J_1(\lambda\bar{\rho}_{wl}) J_1(\lambda\bar{R}_v) e^{\lambda(\bar{h}_l - \bar{z}_{wl}) - \bar{h}_l\bar{\eta}} d\lambda \Delta S \end{aligned} \right], \quad (10)$$

де $\bar{\rho}_{wl} = \bar{\rho}_w(x, \bar{y}_l)$, $\varphi_{wl} = \varphi_w(x, \bar{y}_l)$, $\bar{z}_{wl} = \bar{z}_w(x, \bar{y}_l)$.

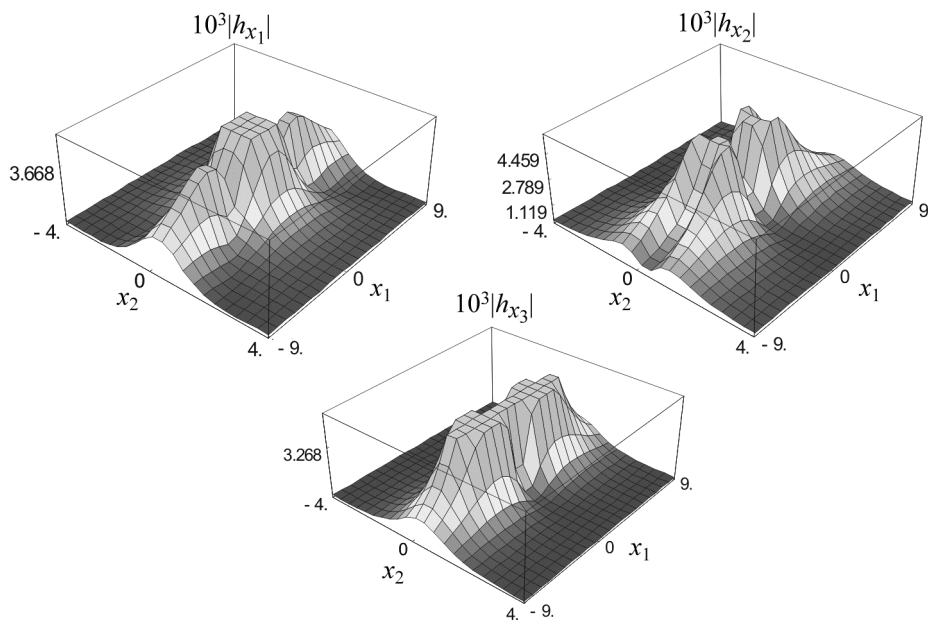
Отримані вирази (9), (10) було застосовано до дослідження електромагнетного поля, розсіяного еліптичною тріщиною. Деякі результати чисельного моделювання наведені на рис. 1–5, які ілюструють просторовий розподіл значень амплітуди компонент $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$, $|h_{x_3}(x)|$ магнітного поля, розсіяного еліптичною тріщиною (рис. 1–4), та електрорушійної сили $|U|$, наведеної нормальною складовою магнітного поля розсіяного дефектом (рис. 4). Для обчислення характеристик поля було використано такі значення параметрів задачі: $\bar{k} = (1+i)/\sqrt{2}$, $O_1 = (0; -1,2; -1,2)$, $R_v = 0.5$.

З наведених залежностей бачимо, що характер компонент магнітного поля та е.р.с. для тріщини збігаються за характером з аналогічними залежностями для диполя (рис. 1–5). Рис. 1–2 демонструють “розгладжування” залежностей $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$, $|h_{x_3}(x)|$ зі збільшенням відстані між точкою спостереження та центром тріщини. Тобто відбувається збільшення відстані між сусідніми максимумами та зменшення їхніх абсолютних значень. Визначено, що при положенні тріщини паралельно розділу середовищ вплив розсіяного поля і відповідно е.р.с. практично дорівнює нулю. У протилежному випадку просторова структура залежностей е.р.с. та поля для тріщин різних розмірів та форми є схожими між собою.



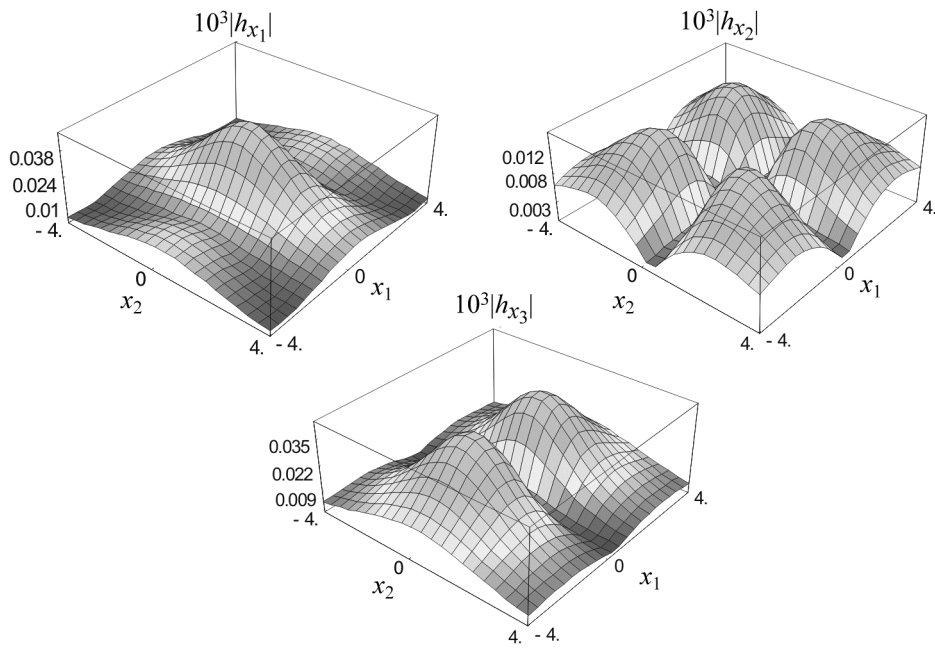
$$x_3 = 1; a = 1; b = 1; \vec{n} = (0; 1; 0).$$

Рис. 1. Просторовий розподіл значень $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$ і $|h_{x_3}(x)|$ для однієї тріщини.



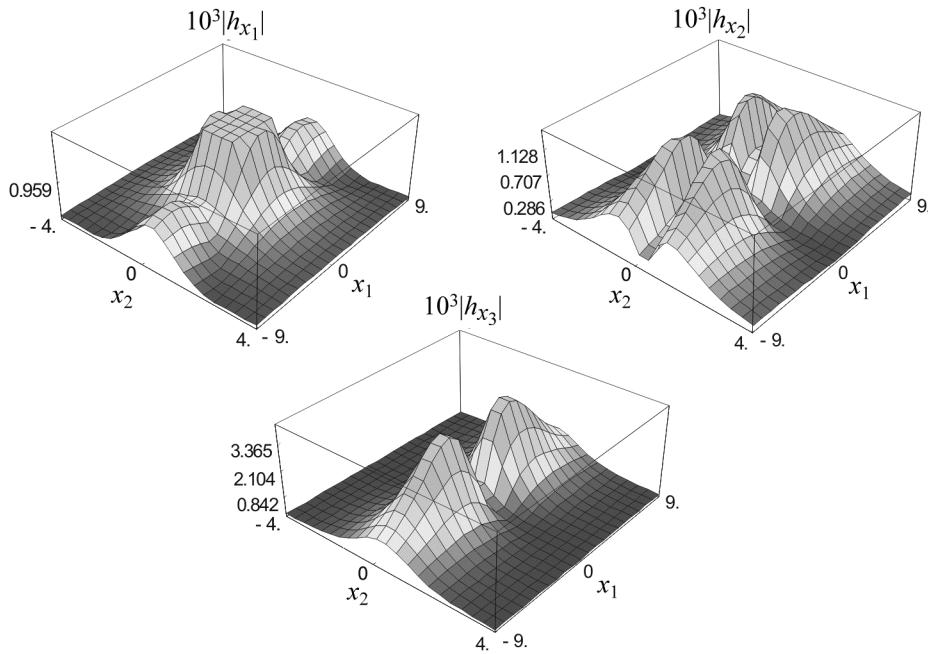
$$x_3 = 0,1; a = 1; b = 1; \vec{n} = (0; 1; 0).$$

Рис. 2. Просторовий розподіл значень $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$ і $|h_{x_3}(x)|$ для однієї тріщини.



$$x_3 = 1; a = 1; b = 0,5; \vec{n} = (0; 0,6; 0,8).$$

Рис. 3. Просторовий розподіл значень $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$ і $|h_{x_3}(x)|$ для однієї тріщини.



$$x_3 = 1; |P_0| = 1; \vec{n} = (0; 1; 0).$$

Рис. 4. Просторовий розподіл значень $|h_{x_1}(x)|$, $|h_{x_2}(x)|$ і $|h_{x_3}(x)|$ для диполя.

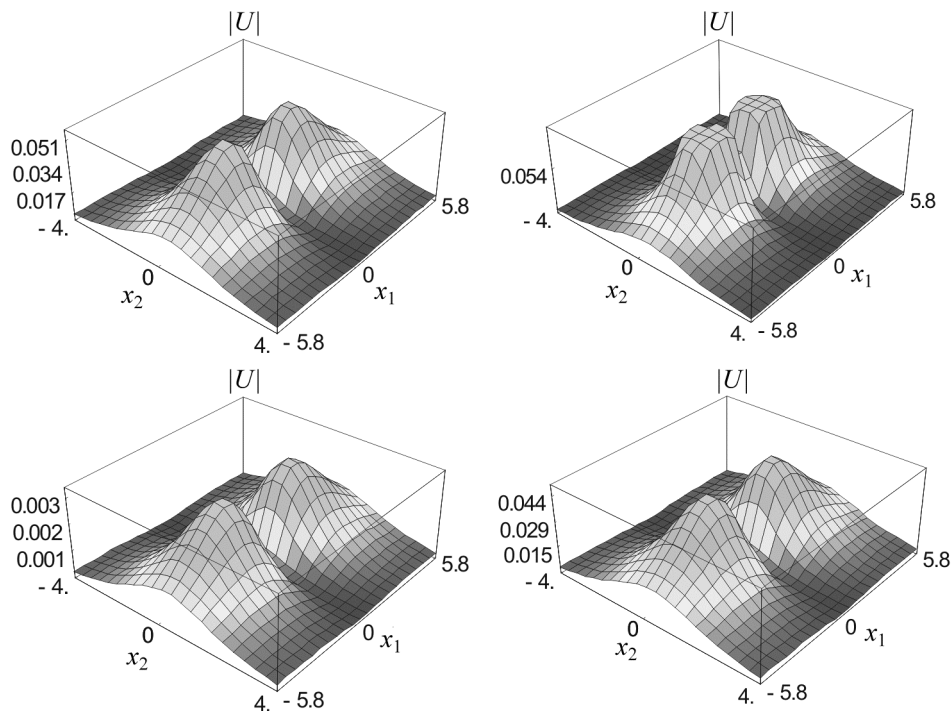


Рис. 5. Просторовий розподіл значень $|U|$ для тріщин і диполя.

ВИСНОВКИ

Для оцінки структури вихрострумового перетворювача та методики сканування об'єкта контролю провідних конструкційних матеріалів запропоновано математичну модель тріщини у вигляді розімкнутої тривимірної поверхні з деяким розподілом електричних диполів, який трактуємо як вторинне джерело розсіяного електромагнетного поля. Для визначення поверхневого розподілу електричних диполів використано гіперсингулярне інтегральне рівняння першого роду. За допомогою методу граничних елементів побудовано дискретний аналог системи інтегральних рівнянь у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої дає наближене значення розподілу електричних диполів.

Використовуючи отримані результати, визначено, що електромагнетне поле тріщини з малим розкритвом наближено описує поле електричного диполя, момент якого направлений перпендикулярно до поверхні тріщини.

Форма тріщини та її розміри не впливають суттєво на характер просторового розподілу електромагнетного поля та сигналу витка.

1. Гордиенко В. И., Кулинич Я. П., Убогий В. П. Моделирование электромагнитных полей в морской среде. – К.: Наук. думка, 1988. – 222 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
3. Колодій Б. І., Орловський А. А., Панасюк В. В. Розсіяння електромагнетних хвиль на дрібних дефектах в плоскошаруватих середовищах. – К.: Наук. думка, 1985. – 132 с.
4. Назарчук З. Т., Кулинич Я. П., Дацко Я. В. Числовий метод визначення електромагнетного поля у метали з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 2. – С. 85–93.
5. Хай М. В. Двухмерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. думка, 1992. – 253 с.