

УДК 537.874.4

А. Т. Синявський

### **ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОВИМІРНОЇ ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ ЗАХАРОВА–ШАБАТА**

A numerical aspect of inverse scattering problem solution for plane wave normal incidence on an absorbing medium is considered in the paper. The electromagnetic field equations are reduced to the Zakharov-Shabat's one. A new numerical scheme is developed taking into account peculiarities of integral equation method for this inverse scattering problem solution. Having a satisfactory accuracy this method does not require both time consumed iterative approximation and direct matrix inversion.

Розглянуто зворотню задачу розсіювання для плоскої, нормальнопадаючої електромагнітної хвилі на поверхню вісесиметричного середовища з втратами. Хвильове рівняння приведено до рівняння типу Захарова–Шабата, а розв'язок зворотної задачі розсіювання подано у вигляді системи інтегральних рівнянь. Ефективності запропонованого методу числового розв'язку такої системи досягнуто завдяки рекурентній процедурі знаходження оберненої матриці.

Теорію зворотних задач розсіювання широко застосовують для вирішення багатьох прикладних задач, таких як мікрохвильова візуалізація, дистанційне зондування, синтез елементів антенно-фідерної техніки, неруйнівний контроль і т.д. За певних умов зворотню задачу розсіювання приводять до одновимірної, застосовуючи метод розділення змінних при представленні розв'язку системи рівнянь електромагнітного поля для плоскої хвилі, яка поширюється над вісесиметричною шаруватою структурою.

Використання строгого математичного підходу до розв'язання зворотної задачі розсіювання було започатковано у працях Марченко [1], Гельфанда та Левітана [2]. Зворотню задачу розсіювання, в її оригінальному формулюванні, розв'язано для моделі квантового розсіювання. Як показано в [3], одновимірну зворотню задачу дифракції для електромагнітних хвиль можна розв'язати шляхом приведення хвильового рівняння до рівняння Шредінгера. Аналіз різних підходів до розв'язку одновимірної зворотної задачі розсіювання електромагнітних хвиль можна знайти в [3–5]. Зворотні задачі розсіювання для середовищ з втратами мають особливе фізичне значення [6, 7]. Ця проблема є еквівалентною до зворотної задачі розсіювання для енергонезалежного потенціалу в рівнянні Шредінгера [8], а також системі Дірака [9]. Варто відзначити працю Jaulen [10], де цю проблему протрактовано як зворотню задачу розсіювання для системи рівнянь типу Захарова–Шабата [11]. Крім того, розв'язок нелінійних еволюційних рівнянь [11, 12] є іншою областю застосування підходу зворотної задачі розсіювання, де система рівнянь Захарова–Шабата відіграє важливу роль. Саме таке формулювання зворотної задачі розсіювання плоскої хвилі розглянуто в статті.

Незважаючи на наявність багатьох аналітично обґрунтованих методів розв'язку зворотної задачі розсіювання для електромагнітних хвиль, числовий аспект розв'язання цієї проблеми вимагає детального дослідження. Більшість числових методів дають змогу отримати розв'язок зворотної задачі для системи Захарова–Шабата, використовуючи розклад в ряд Неймана разом з вибором найкращої апроксимації початкового наближення [13, 14]. Тому отриманий розв'язок є нічим іншим як уточнена апроксимація оригінального розв'язку. Метою роботи, результати якої подано у цій статті, є розвиток нового числового методу розв'язку одновимірної зворотної задачі розсіювання, якому не властиві недоліки існуючих методів.

© А. Т. Синявський, 2009

**Метод інтегральних рівнянь для розв'язку зворотної задачі розсіювання електромагнітних хвиль для середовищ з втратами.** Геометрію досліджуваного процесу взаємодії електромагнітної хвилі та середовища можна представити як нормальне падіння плоскої хвилі на поверхню плоскої вісесиметричної структури. Введено припущення про те, що середовище не має розривів у шуканих функціях діелектричної проникності  $\varepsilon(z)$  та провідності  $\sigma(z)$ . Функції діелектричної проникності  $(\varepsilon(z) - 1)$  та провідності  $\sigma(z)$  мають також компактний носій в правому напівпросторі  $z > 0$ . У цьому випадку, рівняння електромагнітного поля для електричної  $E(z)$  та магнітної  $H(z)$  складової напруженості можна записати як

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} E(z) \\ H(z) \end{pmatrix} = -j\omega \begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \\ (\varepsilon_0 \varepsilon(z) - j\sigma(z)/\omega) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(z) \\ H(z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$  – діелектрична та магнітна проникності вільного простору;  $\omega$  – частота коливань, що визначає хвильовий коефіцієнт вакууму  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ . Асимптотичний розв'язок рівняння (1) може бути записаний через правосторонній  $R(k_0)$  і лівосторонній  $L(k_0)$  коефіцієнти відбиття, а також коефіцієнт пропускання  $T(k_0)$ :  $E_r(z, k_0) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} L(k_0) \exp(-jk_0 z) + \exp(jk_0 z)$ ,  $E_l(z, k_0) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} R(k_0) \exp(jk_0 z) + \exp(-jk_0 z)$ ,  $E_r(z, k_0) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} T(k_0) \exp(jk_0 z)$  і  $E_l(z, k_0) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} T(k_0) \exp(-jk_0 z)$ .

Коефіцієнти відбиття та пропускання можна безпосередньо отримати з результатів експерименту, тому ці коефіцієнти прийнято вважати вихідними даними для зворотної задачі розсіювання.

Першим перетворенням, яке використовують для приведення рівнянь електромагнітного поля до системи рівнянь типу Захарова–Шабата, є заміна змінної Ліувіля  $x(z) = \int_{-\infty}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz'$ . Асимптотична поведінка розв'язків системи рівнянь

(1) збігається з асимптотичною поведінкою розв'язків отриманої системи:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix} + jk_0 \begin{pmatrix} 0 & \rho_0/\sqrt{\varepsilon(x)} \\ \sqrt{\varepsilon(x)}/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma/\sqrt{\varepsilon(x)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  є характеристичним імпедансом для вільного простору. Підстановка двох нових змінних  $V_1 = \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)} H(x) - \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0^3} E(x)$  і  $V_2 = \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)} H(x) + \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0^3} E(x)$  в рівняння (2) дає змогу переписати його у формі узагальненого рівняння Захарова–Шабата:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} - jk_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jq_3 & q^+ \\ q^- & -jq_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $q_3 = -j \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)}$  і  $q^\pm = -\frac{1}{4} \frac{d \ln(\varepsilon(x))}{dx} \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)}$  є потенціалами цього рівняння.

Форма (3) системи рівнянь Захарова–Шабата не є зручною для здійснення його інверсії і, згідно з результатами, поданими в роботі [10], повинна бути перетворена до такого вигляду:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} - jk_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}^+ \\ \tilde{q}^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де  $F_1 = V_1 \exp\left(-j \int_{-\infty}^x q_3 dx'\right)$  і  $F_2 = V_2 \exp\left(j \int_{-\infty}^x q_3 dx'\right)$  є змінними цього рівняння, тоді як потенціали можна подати в новій формі:

$$\tilde{q}^{\pm} = \left( -\frac{1}{4} \frac{d \ln(\varepsilon(x))}{dx} \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)\rho_0}{\varepsilon(x)} \right) \exp\left( \pm \rho_0 \int_{-\infty}^x \frac{\sigma(x')}{\varepsilon(x')} dx' \right). \quad (5)$$

Асимптотичну поведінку розв'язку системи рівнянь Захарова–Шабата (4) можна поставити у відповідність до асимптотичного розв'язку системи рівнянь (1) Максвелла  $F_1(z, k_0)/F_2(z, k_0) = -R(k_0) \exp(2jk_0 z)$ . Це дає можливість вико-

ристати значення асимптотичних розв'язків для формулювання зворотної задачі розсіювання відносно невідомих потенціалів  $\tilde{q}^{\pm}$ , які визначено виразом (5). Розв'язок такої зворотної задачі методом інтегральних рівнянь описано в [10].

За відомими функціями коефіцієнтів відбиття  $R(k_0)$ ,  $L(k_0)$  і пропускання  $T(k_0)$ , які є результатами експерименту, обчислюють приведені параметри розсіювання  $r^+(k_0) = R(k_0)$  та  $r^-(k_0) = (r^-(k_0))^* = L(k_0)/(R(k_0)L(k_0) - (T(k_0))^2)$ , що характеризують розв'язки асиметричної системи рівнянь Захарова–Шабата (5).

Основним етапом процедури розв'язку зворотної задачі розсіювання є знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь типу Гельфанда–Левітана–Марченко [10–13]:

$$\begin{cases} K_2^{\pm}(x, y) = \int_{-y}^x G^{\mp}(y+t) K_1^{\mp}(x, t) dt, \\ K_1^{\pm}(x, y) = G^{\mp}(y+t) + \int_{-y}^x G^{\mp}(y+t) K_2^{\mp}(x, t) dt, \end{cases} \quad (6)$$

де  $G^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^{\pm}(k_0) \exp(jk_0 x) dk_0$  є відомими функціями. Ці функції отрима-

но шляхом застосування перетворення Фур'є до приведених даних розсіювання. У цьому випадку використано припущення про те, що сформульована задача (4) немає так званих зв'язаних станів [8] (або розв'язків рівняння в комплексній площині  $k_0$ , що є інтегрованими в квадраті).

Шукані потенціали  $\tilde{q}^{\pm}$  можна знайти з розв'язку системи інтегральних рівнянь (6), використовуючи тотожність  $\tilde{q}^{\pm}(x) = -2K_1^{\pm}(x, x)$ . Метою вихідної зворотної задачі розсіювання для рівняння (1) є визначення функцій діелектричної проникності  $\varepsilon(x)$  та провідності  $\sigma(x)$ . Для досягнення цієї мети прийнято, що пара функцій  $\tilde{q}^{\pm}$  є відомими (визначеними за результатами розв'язку зворотної задачі відносно потенціалів). Тоді вираз (5) можна трактувати як систему рівнянь з невідомими функціями  $\varepsilon(x)$  та  $\sigma(x)$ . Для спрощення розв'язку використано допоміжну функцію  $L(x)$ , що задовольняє рівнянню Ріккати:

$$dL/dx + L^2 \tilde{q}^- - \tilde{q}^+ = 0. \quad (7)$$

Як результат, шукані функції діелектричної проникності  $\varepsilon(x)$  та провідності  $\sigma(x)$  можна обчислити згідно з виразами:

$$\varepsilon(x) = \exp \left( -2 \int_{-\infty}^x [L^{-1} \tilde{q}^+ + L \tilde{q}^-] dx' \right) \text{ та} \quad (8)$$

$$\sigma(x) = -\frac{\varepsilon(x)}{\rho_0} \frac{d}{dx} \ln(L). \quad (9)$$

Для відомої функції діелектричної проникності  $\varepsilon(x)$  знаходження розв'язку задачі визначення відповідності між величинами  $z$  та  $x$  не становить жодних труднощів, так як його можна реалізувати шляхом числового інтегрування відповідно до вищезазначеного перетворення Ліувіля.

**Числовий метод розв'язку системи рівнянь (6) типу Гельфанда–Левітана–Марченко.** Як показано вище, зворотна задача дифракції зводиться до розв'язку системи інтегральних рівнянь (6). Отже, від точності, яку досягнуто на етапі розв'язку цієї системи рівнянь, буде, в основному, залежати точність отриманого розв'язку зворотної задачі дифракції відносно функцій  $\varepsilon(x)$  та  $\sigma(x)$ . Незважаючи на те, що теорему існування розв'язку для системи інтегральних рівнянь (6) доведено в [12], числова схема повинна гарантувати отримання розв'язку, який якомога краще апроксимує оригінальний розв'язок зворотної задачі дифракції.

Подальше обговорення розкриватиме основні ідеї, які покладено в основу запропонованого числового методу розв'язку системи рівнянь Гельфанда–Левітана–Марченко. Для спрощення обчислень введено нову систему характеристичних координат. Звідси ядро рівняння (10) можна подати в новій формі  $K_{1,2}(x, y) = B_{1,2}(x + y, x - y) = B_{1,2}(v, w)$ , тоді як невідомий потенціал (5) визначено згідно з виразом  $q(x) = -2K_1(x, x) = -2B_1(2x, 0)$ . Зміна меж інтегрування дає змогу переписати рівняння у такому вигляді:

$$\begin{cases} B_2(v, w) = \int_0^v G^+(t) B_1(w + t, v - t) dt, \\ B_1(v, w) = G^-(v) + \int_0^v G^-(t) B_2(w + t, v - t) dt. \end{cases} \quad (10)$$

Цю систему рівнянь можна безпосередньо подати в дискретному вигляді. Для цього інтеграли замінено сумою дискретних значень підінтегральних функцій:

$$\begin{cases} b_{l,m}^2 = \Delta \sum_{n=1}^l g_n^+ b_{m+n,l-n}^1, \\ b_{l,m}^1 = g_l^- + \Delta \sum_{n=1}^l g_n^- b_{m+n,l-n}^2, \end{cases} \quad (11)$$

де  $l$  та  $m$  є цілими числами;  $\Delta$  є кроком дискретизації;  $b_{l,m}^1 = B_1(\Delta l, \Delta m)$ ,  $b_{l,m}^2 = B_2(\Delta l, \Delta m)$  та  $g_n^\pm = G^\pm(\Delta n)$  є позначеннями дискретних значень ядер  $B_{1,2}$  та функції  $G^\pm$ . Ця система (11) є ніщо інше як система лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна переписати у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \Delta \mathbf{C}^+ \\ \Delta \mathbf{C}^- & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де  $\mathbf{I}$  є одиничною матрицею, а  $\mathbf{0}$  є нульовим вектором. Дискретні величини обох ядер  $B_{1,2}$  та функції  $G^\pm$  є елементами матриці і векторів в системі рівнянь (12), відповідно до того, як це подано на рис. 1.

Числовий розв'язок зворотної задачі дифракції для системи типу Захарова–Шабата вимагає визначення тільки невідомого вектору  $\beta$ . Це можна здійснити множенням оберненої матриці на вектор відомих коефіцієнтів  $\mathbf{f}$ :  $\beta = -(\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^+)^{-1} \mathbf{f}$ . Запропонований числовий метод полягає в новому підході до обчислення оберненої матриці  $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^+)$ .

З рис. 1 видно, що матриця  $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \Delta^2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^+)$  є блочною матрицею. Кожний блок матриці  $\mathbf{X}_d$  має контрадіагональну симетричну форму. Варто зазначити, що кожен наступний блок  $\mathbf{X}_{d+1}$  охоплює попередній  $\mathbf{X}_d$ :

$$\mathbf{X}_{d+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_d & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2^T & h \end{bmatrix}, \quad (13)$$

де  $\mathbf{g}_1$  та  $\mathbf{g}_2^T$  є векторами, а  $h$  є скаляром, який можна визначити згідно з відомими величинами  $g_n^\pm$ . Це вказує на те, що обчислення всієї оберненої матриці  $\mathbf{X}^{-1}$  можна реалізувати рекурентно для кожного наступного блоку меншої розмірності. Повна інформація про обернений блок  $\mathbf{X}_d^{-1}$  дає можливість визначити наступний за індексом обернений блок матриці  $\mathbf{X}_{d+1}^{-1}$ :

$$\mathbf{X}_{d+1}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_d^{-1} + s(\mathbf{X}_d^{-1} \mathbf{g}_1)(\mathbf{g}_2^T \mathbf{X}_d^{-1})) & -s(\mathbf{X}_d^{-1} \mathbf{g}_1) \\ -s(\mathbf{g}_2^T \mathbf{X}_d^{-1}) & s \end{bmatrix}, \quad (14)$$

де  $s = (h - \mathbf{g}_2^T \mathbf{X}_d^{-1} \mathbf{g}_1)^{-1}$  є скалярною величиною. Можна показати, що обчислювальна складність операції обернення блоку ( $\mathbf{X}_d^{-1} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ ) є порядку  $(d+4)$  разів множення вектора ( $\mathbb{R}^{1 \times (d+1)}$ ) на вектор ( $\mathbb{R}^{(d+1) \times 1}$ ). Звідси рекурентне обчислення послідовності обернених блоків  $\mathbf{X}_d$ ,  $d = 2, 3, 4 \dots$  можна здійснювати, починаючи з другого блоку  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , обернення якого не вимагає складних обчислень.

$$\mathbf{C}^\pm = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^\pm & g_2^\pm & g_3^\pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} d=0 \\ \} d=1 \\ \} d=2 \\ \} d=3 \end{array} \right\} \alpha = \begin{bmatrix} b_{0,0}^2 \\ b_{0,1}^2 \\ b_{1,0}^2 \\ b_{0,2}^2 \\ b_{1,1}^2 \\ b_{2,0}^2 \\ b_{0,3}^2 \\ b_{1,2}^2 \\ b_{2,1}^2 \\ b_{3,0}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_{0,0}^1 \\ b_{0,1}^1 \\ b_{1,0}^1 \\ b_{0,2}^1 \\ b_{1,1}^1 \\ b_{2,0}^1 \\ b_{0,3}^1 \\ b_{1,2}^1 \\ b_{2,1}^1 \\ b_{3,0}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} g_0^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_2^- \\ g_0^- \\ g_1^- \\ g_2^- \\ g_3^- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Структура під матриць  $\mathbf{C}^\pm$  і векторів  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\mathbf{f}$  в системі рівнянь (12).

Результат обчислення оберненої матриці  $\mathbf{X}$  можна використати для знаходження вектора  $\mathbf{\beta} = -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f}$ , елементи якого містять всі необхідні величини для визначення дискретних відліків шуканого потенціалу  $q_n = q(\Delta n) = -2b_{2n,0}^1$ .

**Приклади розв'язку зворотної задачі.** Ефективність запропонованого методу можна визначити шляхом порівняння отриманого числового результату розв'язку зворотної задачі дифракції з аналітичним. Відомо, що існує можливість [15] аналітичного розв'язання зворотної задачі для симетричної системи типу Захарова–Шабата. Для цього коефіцієнт відбиття повинен бути раціональною функцією. Для прикладу, прийнято, що таку функцію можна подати у формі:

$$R(k_0) = \frac{1}{(k_0 - \lambda_1)(k_0 - \lambda_2)}, \quad (15)$$

де  $\lambda_1 = \sqrt{2}(1 - j)/2$  та  $\lambda_2 = -\sqrt{2}(1 + j)/2$  є полюсами коефіцієнта відбиття.

Симетричне рівняння ( $q^\pm = \bar{q}^- = \bar{q}^+$ ) типу Захарова–Шабата (4) є моделлю процесу розсіювання електромагнітних хвиль на безвтратному  $\sigma(z) = 0$  діелектрику. Звідси випливає, що коефіцієнти відбиття, які визначають вихідні дані для розв'язку системи рівнянь типу Гельфанда–Левітана–Марченко (6), співвідносяться як  $r^+(k_0) = r^-(k_0) = R(k_0)$ . Крім того, особливість симетрії системи рівнянь (4) дає змогу записати вираз для оцінки невідомої функції діелектричного профілю:

$$\hat{\varepsilon}(x) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^x q^\pm dx'\right). \quad (16)$$

З метою порівняння зворотної задачі дифракції для безвтратного середовища розв'язано запропонованим методом чисельно. Результати моделювання подано на рис. 2. Середньоквадратична похибка між аналітично отриманою функцією діелектричної проникності (суцільна лінія на рис. 2) та результатом отриманим запропонованим числовим методом (пунктирна лінія на рис. 2), становить  $3,93 \cdot 10^{-3}$ . Інший числовий метод [14], який базується на ітераційній апроксимації розв'язку зворотної задачі дифракції, також реалізовано з метою порівняння. Його результат (точкова лінія, як результат після 5 ітерацій) відрізняється від аналітично отриманого результату на величину, що охарактеризовано середньоквадратичною похибкою  $4,26 \cdot 10^{-3}$ .

Ефективність розвинутого числового методу підтверджено у більш складних випадках, що охоплюють розсіювання як на плоских середовищах з неперервною функцією діелектричної проникності, так і для плоских середовищ з втратами, де функція провідності середовища є неперервною.

Як приклад, розглянуто плоску діелектричну структуру без втрат з неперервною функцією діелектричної проникності вздовж координати  $z$ , що зображено на рис. 3а. Для такої структури розв'язано пряму задачу розсіювання чисельним

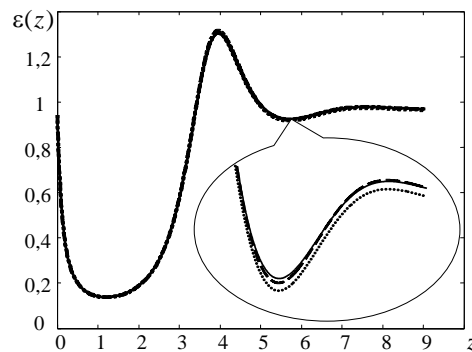


Рис. 2. Реконструкція діелектричного профілю для коефіцієнта відбиття (15): суцільна лінія – аналітично отриманий результат [15]; пунктирна лінія – результат, отриманий запропонованим методом; точкова лінія – числовий метод в [14].

методом, що дало можливість визначити частотну залежність коефіцієнта відбиття  $R(k_0)$ . У цьому числовому експерименті функцію  $R(k_0)$  прийнято вважати вихідними даними зворотної задачі розсіювання. Таку зворотну задачу розв'язано розвинутим методом за умови наявності у вихідних даних випадкової похибки з різною дисперсією. Енергетичне співвідношення оригінальних вихідних даних до величини похибки охарактеризовано параметром сигнал-шум, що обчислено в децибелах. Як видно з рис. 3б, де подано розв'язки зворотної задачі, у випадку відсутності похибки у вихідних даних, відновлена функція діелектричної проникності повністю відповідає оригіналу (рис. 3а). Саме наявність похибки у вихідних даних є причиною спотворень у реконструйованому профілі. Похибка призводить до того, що окремі елементи шуканої функції діелектричної проникності  $\varepsilon(z)$  неможливо ідентифікувати.

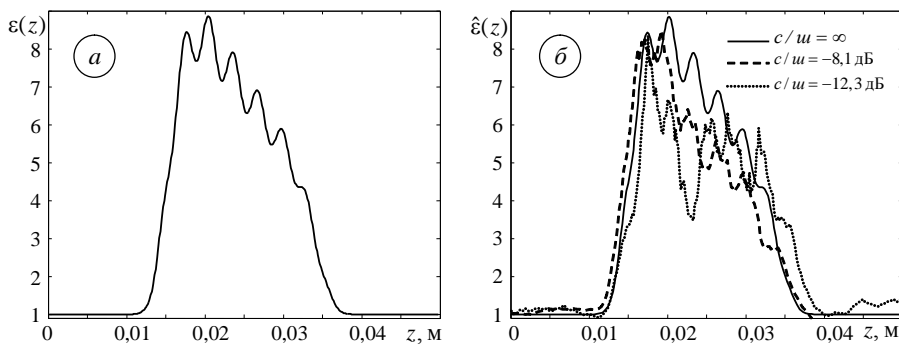


Рис. 3. Функція діелектричної проникності безвтратного середовища ( $\sigma=0$ ): а – та реконструйовані профілі діелектричної проникності; б – які отримано числовим методом розв'язку зворотної задачі дифракції для різних значень дисперсії похибки у вихідних даних.

Для прикладу на рис. 4 подано результати числового експерименту, метою якого є перевірка ефективності розвинутого методу розв'язку зворотної задачі у випадку чисто втратного середовища, де  $\varepsilon(z) = 1$ . З виразу (8) можна визначити, що має місце тотожність  $L = \sqrt{-\tilde{q}^+ / \tilde{q}^-}$ , яка дає змогу записати розв'язок зворотної задачі відносно функції провідності середовища:

$$\hat{\sigma}(x) = -\frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dx} \ln\left(-\tilde{q}^+ / \tilde{q}^-\right). \quad (17)$$

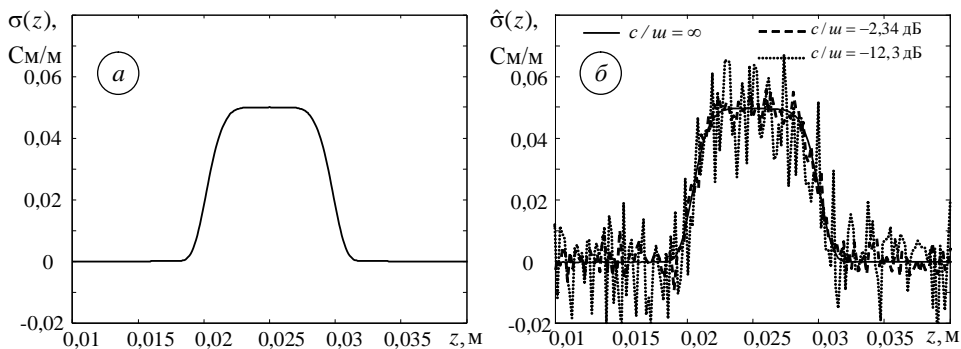


Рис. 4. Функція провідності  $\sigma(z)$ : а – плоского середовища з  $\varepsilon = 1$  та реконструйовані функції провідності; б – які отримано числовим методом розв'язку зворотної задачі дифракції для різних значень дисперсії похибки у вихідних даних.

Розв'язки задачі реконструкції профілю провідності свідчать про, на можливість точного розв'язання зворотної задачі тільки за умови відсутності похибки у вихідних даних (рис. 4б, суцільна лінія). Наявність похибки суттєво спотворює розв'язок, що свідчить про високу чутливість шуканого параметру  $\sigma(z)$  до збурень у вихідних даних. На відміну від чисто діелектричних структур, розв'язок зворотної задачі дифракції для втратного середовища вимагає знання як частотних характеристик відбиття  $R(k_0)$  і  $L(k_0)$ , так і частотної характеристики пропускання  $T(k_0)$ .

## ВИСНОВКИ

Усесторонній аналіз методів розв'язку одновимірних зворотних задач дифракції дав змогу виділити метод інтегральних рівнянь типу Гельфанда–Левітана–Марченко [1, 2] у модифікації Захарова–Шабата (6) як строгий та найбільш ефективний. Такий метод можна просто адаптувати до вирішення багатьох прикладних задач, включаючи реконструкцію матеріальних параметрів середовищ, побудову мікрохвильових та оптичних фільтрів, розв'язку нелінійних еволюційних рівнянь, і т.д. Визначивши особливості системи інтегральних рівнянь (6), розроблено новий числовий метод розв'язку зворотної задачі розсіювання для втратних середовищ. Запропонований підхід до обчислення оберненої матриці на основі рекурентної процедури дав можливість відмовитися від етапу безпосередньої апроксимації розв'язку зворотної задачі дифракції, що можна виділити як основну перевагу запропонованого методу. Завдяки цьому отримано високу точність розв'язку зворотної задачі, що підтверджено порівнянням з аналітичними розв'язками для простих моделей розсіювання. Крім того, запропонований метод дає можливість розв'язку зворотної задачі розсіювання для двопотенціального рівняння типу Захарова–Шабата, що також є перевагою запропонованого методу над альтернативними методами [13, 14].

1. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – К.: Наук. думка, 1977. – 332 с.
2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1951. – 15(4). – С. 309–360.
3. Newton R. G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods // Geophys. J. R. astr. Soc. – 1981. – 65. – P. 191–215.
4. Jaggard D. L., Frangos P. V. The electromagnetic inverse scattering problem for layered dispersionless dielectrics // IEEE Trans. A&P. – 1987. – 8(35). – P. 934–945.
5. Khruslov E. Ya., Shepelsky D. G. Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // Inverse problems. – 1994. – 1(10). – P. 1–37.
6. Jaulet M. Inverse scattering problem in absorbing media // J. Math. Phys. – 1976. – 7(17). – P. 1351–1360.
7. Krueger R. J. An Inverse Problem for a Dissipative Hyperbolic Equation with Discontinuous Coefficients // Quart. of Applied Math. – 1976. – 2(34). – P. 129–147.
8. Chadan K., Sabattier P. C. Inverse problem in Quantum Scattering Theory. – Springer-Verlag, New-York. – 1997. – 347 p.
9. Hryniv R., Albeverio S., Mykytyuk Ya. V. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials // Russian J. Math. Phys. – 2005. – 4 (12). – P. 406–423.
10. Jaulet M. The inverse scattering problem for LCRG transmission lines // J. Math. Phys. – 1982. – 12 (23). – P. 2286–2290.
11. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Вып. 61. – 1(7). – С. 118–134.
12. Inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems / M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur // Studies in Applied Math. – 1974. – LIII, № 4. – P. 249–315.
13. Frangos P. V., Jaggard D. L. A numerical solution to the Zakharov-Shabat inverse scattering problem // IEEE Trans. A&P. – 1991. – 1(39). – P. 74–79.
14. Xiao G., Yashiro K. An Efficient Algorithm for Solving Zakharov-Shabat Inverse scattering Problem // IEEE Trans. A&P. – 2002. – 6 (50). – P. 807–811.
15. Song G.-H., Shin S.-Y. Inverse scattering problem for the coupled-wave equations when the reflection coefficient is a rational function // Proceedings of the IEEE. – 1983. – 2 (71). – P. 266–268.