

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.034>

УДК 539.3

**Я.Я. Рушицький**, член-кореспондент НАН України

Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, Київ

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

## Про наблизений аналіз еволюції плоскої поздовжньої гіперпружної хвилі

*Описано та прокоментовано десять варіантів (відомих і нових) наблизеного аналізу еволюції плоскої поздовжньої хвилі, яка поширюється в нелінійно гіперпружному середовищі. Показано, що кожен варіант дає відповідь на певний аспект в студії еволюції хвилі. Акцентовано увагу на подібності і відмінності в отриманих результатах.*

**Ключові слова:** поздовжня гіперпружна хвиля, спотворення початкового профіля хвилі, варіанти наблизеного аналізу еволюції хвилі.

Плоскі хвилі (у тому числі пружні) вивчені найбільш повно [1–3]. Аналіз таких хвиль в рамках лінійного підходу можна вважати закінченим. Однак нелінійний аналіз ще в стані розвитку і розвивається в різних напрямках. Фрагмент досліджень в одному з таких напрямків описано в даному повідомленні.

Модель лінійного пружного деформування не описує еволюцію поздовжньої хвилі [1, 2]. Тому для аналізу еволюції застосовується одна з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності – модель Мурнагана [1]. В рамках цієї моделі поширення плоскої поздовжньо поляризованої хвилі (*P*-хвилі) за умови, що лише ця хвиля початково збуджується і рухається в напрямку осі абсцис, описується наблизено квадратично нелінійним хвильовим рівнянням [1]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (1)$$

де  $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$ ;  $\rho$  – густина;  $u_k$  – зміщення;  $\lambda, \mu, A, B, C$  – пружні сталі моделі Мурнагана;  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – швидкість *P*-хвилі в лінійній моделі. Далі викладено порівняльний аналіз багатьох (існуючих і нових) варіантів описання еволюції початкового профілю хвилі. Слід одразу зазначити, що кожен варіант дає відповідь на певний аспект в студії еволюції хвилі.

**Варіант 1** (класичний гармонічний профіль, метод послідовних наблизень, перші два наблизення). Початковий гармонічний профіль хвилі визначається формулою  $u_1(x_1, t = 0) =$

© Я.Я. Рушицький, 2019

$= u_{10} \cos k_L x_1$  ( $u_{10}$  — початкова амплітуда хвилі;  $k_L$  — хвильове число). Вважається, що відповідна хвиля має вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) \quad (\omega \text{ — частота хвилі}). \quad (2)$$

Стосовно рівняння (1) за методом послідовних наближень перше наближення відповідає розв'язку відповідного лінійного хвильового рівняння і збігається з (2). Друге наближення знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного хвильового рівняння  $u_{1,tt}^{(2)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(1)} u_{1,1}^{(1)}$  і характеризується другою гармонікою

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t).$$

Отже, наближений розв'язок, що відповідає варіанту 1, складається з суми двох гармонік

$$\begin{aligned} u_1^{V1}(x_1, t) &= u_1(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язок (3) підтверджує теоретично генерацію другої гармоніки. Цей хвильовий ефект формується у три етапи. Спочатку хвиля слабо відрізняється від лінійної гармонічної хвилі. Далі зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи часу її поширення, перша гармоніка сумується з другою, амплітуда якої повільно зростає, і вони утворюють модульовану хвилю. Крок за кроком вплив другої гармоніки зростає і вона стає домінантною.

Таким чином, варіант 1 описує еволюцію хвилі як поступовий перехід від профіля у вигляді першої гармоніки до профілю у вигляді другої гармоніки. Характерну залежність амплітуди хвилі від часу та відстані поширення хвилі показано на рис. 1.

Розглянемо далі ще варіанти 2 та 3 і порівняємо три перші варіанти з тієї причини, що вони можуть бути дуже близькими за описом еволюції хвилі.

**Варіант 2** (класичний гармонічний профіль, метод обмеження на градієнт зміщення, перші два наближення). Метод обмеження на градієнт зміщення застосовується до нелінійного рівняння (1), яке трансформується до вигляду лінійного рівняння зі змінною швидкістю поширення хвилі

$$u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0, \quad v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}, \quad \alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]. \quad (4)$$

Далі початковий профіль хвилі вважається довільною функцією, яка може описувати гармонічну і поодинокую хвилі  $u(x_1, t=0) = F(ax_1)$ , де  $a$  — довільний параметр, що характеризує довжину хвилі. Тоді вводиться фазова змінна  $\sigma = a(x_1 - vt)$  і припускається, що поодинокую хвилю поширюється у вигляді

$$u(x_1, t) = F(\sigma). \quad (5)$$

Корінь у представленні швидкості записується у вигляді ряду при обмеженні  $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$ . Це обмеження дає право наближено представити швидкість двома членами ряду і записати

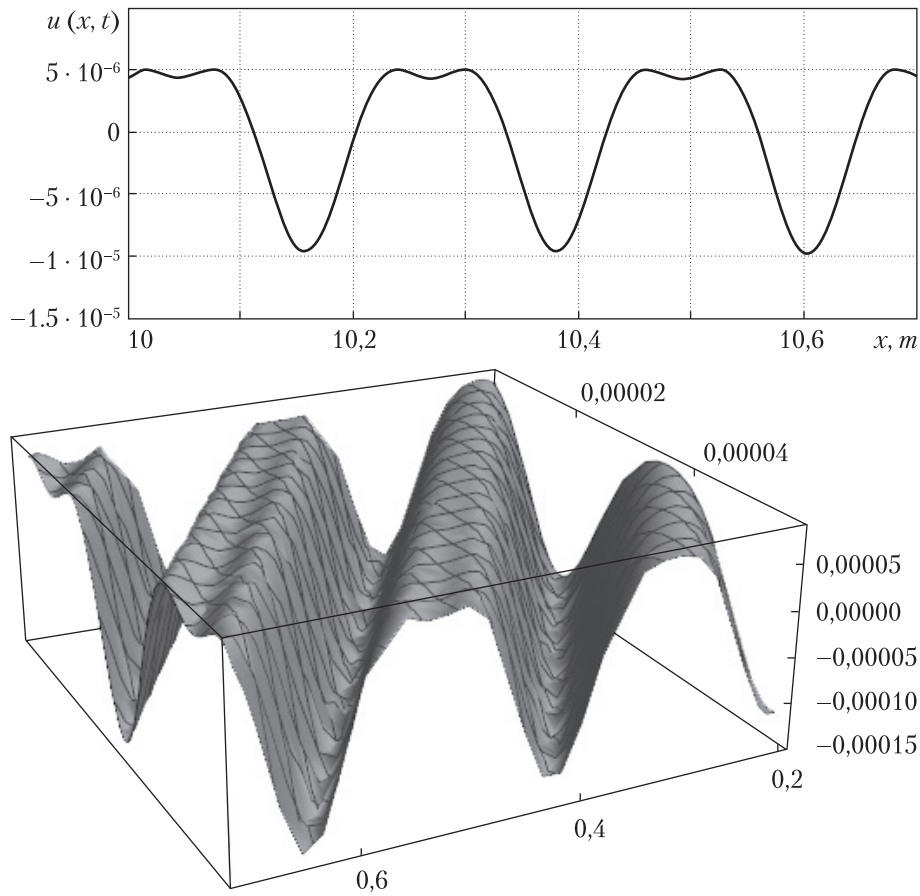


Рис. 1

розв'язок у вигляді  $u_1(x_1, t) \cong F[a(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t)]$ . Фазу можна наближено представити  $\sigma \approx [a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t]$ . Як випливає з останньої формули, фаза складена з двох частин – класичної фази з постійною фазовою швидкістю  $\sigma = a(x_1 - v_L t)$  і можливо малого додаткового параметра  $\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t$ . Тоді розв'язок можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром  $\delta$  в околі класичного постійного значення фази  $\sigma$  і зберегти перші два доданки, враховуючи умову

$$|\delta| = |(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t| \ll 1. \quad (6)$$

Оскільки малість  $|a u_{1,1}|$  вже припущена, то це фактично умова на  $a v_L t$ .

Після певних перетворень наближеному розв'язку можна надати вигляд

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) a [\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2. \quad (7)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (7) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій  $F$  описує один і той же нелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданку з часом поширення хвилі.

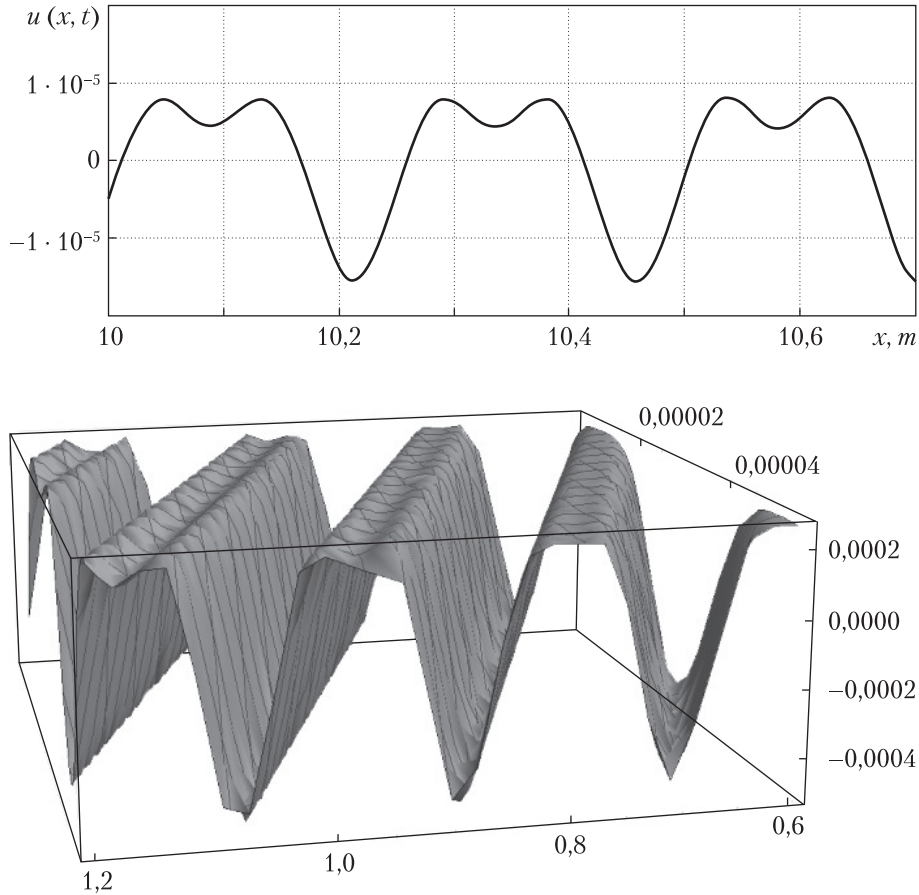


Рис. 2

Нехай початковий профіль хвилі є гармонічним у просторі і описується функцією  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$ . Тоді формула (7) набуває конкретного вигляду

$$u_1(x_1, t) = a^0 e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha(k_L)^2 (a^0)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}. \quad (8)$$

Характерну залежність амплітуди хвилі (8) від часу та відстані поширення хвилі показано на рис. 2.

**Варіант 3** (класичний гармонічний профіль, метод повільно змінних амплітуд). Основним припущенням методу, як і методу послідовних наближень, є припущення, що слабко нелінійне хвильове рівняння є близьким до лінійного рівняння. Термін “повільно змінна амплітуда” означає, що амплітуда хвилі змінюється мало (не змінюється) на відстані, рівній одній довжині хвилі. Нелінійний розв’язок рівняння (1) шукають у вигляді [1, 3]

$$u_1(x, t) = \text{Re}\{A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)}\} = a_1(x) \cos[k_1 x - \omega t + \phi_1(x)],$$

$$\text{або } u_1(x, t) = A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)}. \quad (9)$$

Далі вважається, що задача полягає у вивченні взаємодії трьох хвиль і розв’язок нелінійного рівняння (1) має вигляд суми хвиль зі змінною амплітудою

$$u_1(x, t) = \sum_{m=1}^3 A_{1m}(x) e^{i\sigma_m}, \quad \sigma_m = k_{1m}x - \omega_m t. \quad (10)$$

При певних обмеженнях отримуються так звані вкорочені рівняння

$$\sum_{m=1}^3 k_{1m}(A_{1m})_{,1} e^{i\sigma_m} = -\frac{N_1}{2(\lambda + 2\mu)} \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 k_{1n} k_{1p}^2 A_{1n} A_{1p} e^{i(\sigma_n + \sigma_p)}. \quad (11)$$

Далі вводяться умови частотного синхронізму  $\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3$ . У цьому випадку вкорочені рівняння розпадаються на три еволюційні рівняння

$$F(A_{11})_{,1} = \sigma_1 \bar{A}_{12} A_{13} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}, \quad F(A_{12})_{,1} = \sigma_2 \bar{A}_{11} A_{13} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x},$$

$$F(A_{13})_{,1} = \sigma_3 \bar{A}_{11} A_{12} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}. \quad (12)$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{1\delta} k_{13} (k_{1\delta} + k_{13})}{2(\lambda + 2\mu) k_{1\alpha}}; \quad \sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{11} k_{12}}{2(\lambda + 2\mu)}; \quad (\alpha + \delta = 3).$$

Наступним кроком вводять умову синхронізації хвильових чисел  $k_{11} \pm k_{12} = k_{13}$ , яка уможливорює аналіз різних задач про взаємодію хвиль. Найпростішою є задача про генерацію другої гармоніки поздовжньої хвилі. Тут припускається, що третя хвиля початково не збуджується, тобто,  $A_3(0) = 0$ . Також вважається, що перша і друга хвилі ідентичні (рівні за амплітудою  $A_1 = \text{const}$ , хвильовим числом і частотою). Тоді розв'язувати треба лише третє рівняння системи (12). Відповідний розв'язок має вигляд

$$A_3(x_1) = -\frac{N_1 (k_{L1})^2}{2(\lambda + 2\mu)} (A_1)_1. \quad (13)$$

Таким чином, при прийнятих спрощеннях третя хвиля має на виході з середовища частоту  $2\omega_1$  і хвильове число  $2k_{L1}$ , тобто, вона є другою гармонікою для першої хвилі. Але при цьому амплітуда третьої хвилі зростає прямо пропорційно шляху  $x_1$ , який пройшла хвиля. Також вона залежить від квадрату амплітуди  $(A_1)^2$  і квадрату хвильового числа  $k_{L1}^2$  першої хвилі. Така задача часто використовується як приклад у нелінійній оптиці як така, що адекватно описує експерименти про генерацію другої гармоніки. Класичний дослід з оптичною хвилею є таким: червоне світло рубінового лазера перетворюється на фіолетове при поширенні в кристалі амонія дігідрогенфосфату.

Отже, у цьому варіанті отримується такий факт, що через певний час після початку руху хвилі у вигляді першої гармоніки додатково до першої гармоніки приєднується друга гармоніка з амплітудою, що виникає через механізм самогенерації хвилі і зростає з часом поширення хвилі. Тому спільним для варіантів 1–3 є поява у розв'язку другої гармоніки, яка поступово накладається на першу і через якийсь час стає домінуючою. Відмінність цих варіантів полягає в різній швидкості еволюції з причини різних обмежень на малість параметрів хвилі.

**Варіант 4** (дзвіноподібний профіль, метод послідовних наближень, перші два наближення). Дзвіноподібним називають профіль у вигляді функції Гаусса і тому хвиля з таким про-

філем має згідно з представленням (6) вигляд

$$u_1(x, t) = u_{10} e^{-\sigma^2/2}. \quad (14)$$

За методом, перше наближення є розв'язком лінійного рівняння і має вигляд (14). Друге наближення можна шукати як розв'язок неоднорідного рівняння

$$u_{1,t}^{(2)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(1)} u_{1,1}^{(1)}, \quad (15)$$

$$\text{або } u_{1,t}^{(2)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho) (u_{10})^2 a^3 \sigma (1 - \sigma^2) e^{-\sigma^2}. \quad (16)$$

Спроба знайти розв'язок рівняння (16) у вигляді  $u_1^{(2)} = A(\sigma) e^{-\sigma^2}$  показує, що цей розв'язок є розв'язком відповідного однорідного рівняння (хвилею Д'Алямбера). Тоді розв'язок слід ускладнити у такий спосіб:

$$u_1^{(2)} = t A(\sigma) e^{-\sigma^2}. \quad (17)$$

При підстановці (17) в ліву частину рівняння (16) і заміні  $A(\sigma) = B(\sigma) e^{-\sigma^2/2}$  отримуємо диференціальне рівняння щодо функції  $B(\sigma)$

$$[B''(\sigma) + 3(\sigma^2 - 1)B(\sigma)] = (u_{10})^2 \alpha a \sigma (1 - \sigma^2) e^{\sigma^2/2}, \quad \alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)].$$

Однорідне рівняння  $B''(\sigma) + 3(\sigma^2 - 1)B(\sigma) = 0$  відповідає рівнянню (11) (2.173) [5] при  $a = 0, b = 3, c = \sqrt{3}$  і може бути зведене до рівняння Уіттекера.

Таким чином, друге наближення матиме складний математичний запис, який ще слід знайти і відповідно проаналізувати чисельно еволюцію хвилі в рамках двох перших наближень.

**Варіант 5** (дзвіноподібний профіль, метод обмеження на градієнт зміщення, перші два наближення). Метод описано у варіанті 2, профіль — у варіанті 4. Тому досить записати кінцеву формулу для перших двох наближень [4]

$$u_1(x, t) = A^0 e^{-\sigma^2/2} u_1 - (1/2) t \alpha c_L a^2 \sigma^2 (A^0)^2 e^{-\sigma^2}. \quad (18)$$

Перш за все, хвиля еволюціонує і профіль спотворюється симетрично через появу “другої гармоніки”, амплітуда якої нелінійно зростає з часом поширення хвилі. Математична простота отримання другої гармоніки пов'язана з можливістю використання лише першої похідної функції Гаусса.

Характерну залежність амплітуди хвилі від часу і відстані поширення хвилі показано на рис. 3. На верхньому графіку початковий профіль накладено на спотворений. Нижній графік є тривимірним, на якому видно еволюцію як у часі, так і в просторі.

Порівняння зі зміною профіля гармонічної хвилі показує, що дзвіноподібна хвиля змінює свій профіль дещо по-іншому. “Друга гармоніка” завжди дає від'ємну добавку. Отже, схили “дзвону” стають крутішими. Верхня частина “дзвону” западається і утворюються два “дзвони”. Оскільки хвиля пружна і втрат енергії не може бути, то зміна профілю узгоджується з законом про збереження енергії хвилі при її поширенні.

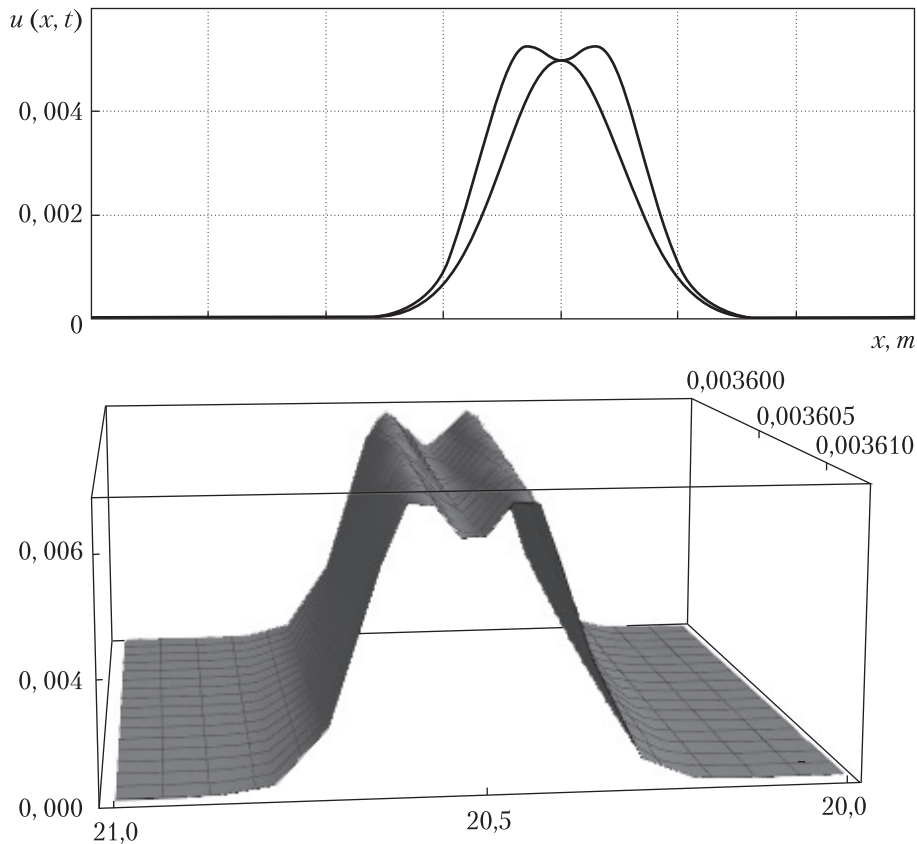


Рис. 3

**Варіант 6** (профіль  $u$  вигляді функції Уіттекера, метод обмеження на градієнт зміщення, перші два наближення). Функція Уіттекера  $W_{k,m}(z)$  означена для всіх значень  $k, m$  і для всіх невід'ємних дійсних  $z$ . Вона може бути представлена через вироджену гіпергеометричну функцію  $\Phi(a, c, z)$

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Phi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right).$$

Метод описано у варіанті 2, початковий профіль хвилі має наступний вигляд:

$$F(x) = a_0 W_{1/4;1/4}(x). \quad (19)$$

Тоді формула (7) набуває конкретної форми

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha c_L a^2 (a_0)^2 [W_{1/4;1/4}(\sigma)]^2 = \\ &= a_0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha c_L a^2 (a_0)^2 \left[ \left( \frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) a W_{1/4;1/4}(\sigma) \right]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

З вигляду розв'язку (20) випливає, що він описує зміну початкового профілю одичної хвилі через присутність нелінійної складової і прямої залежності нелінійної складової від часу і, більш конкретно, описує “розпливання” початкового профілю.

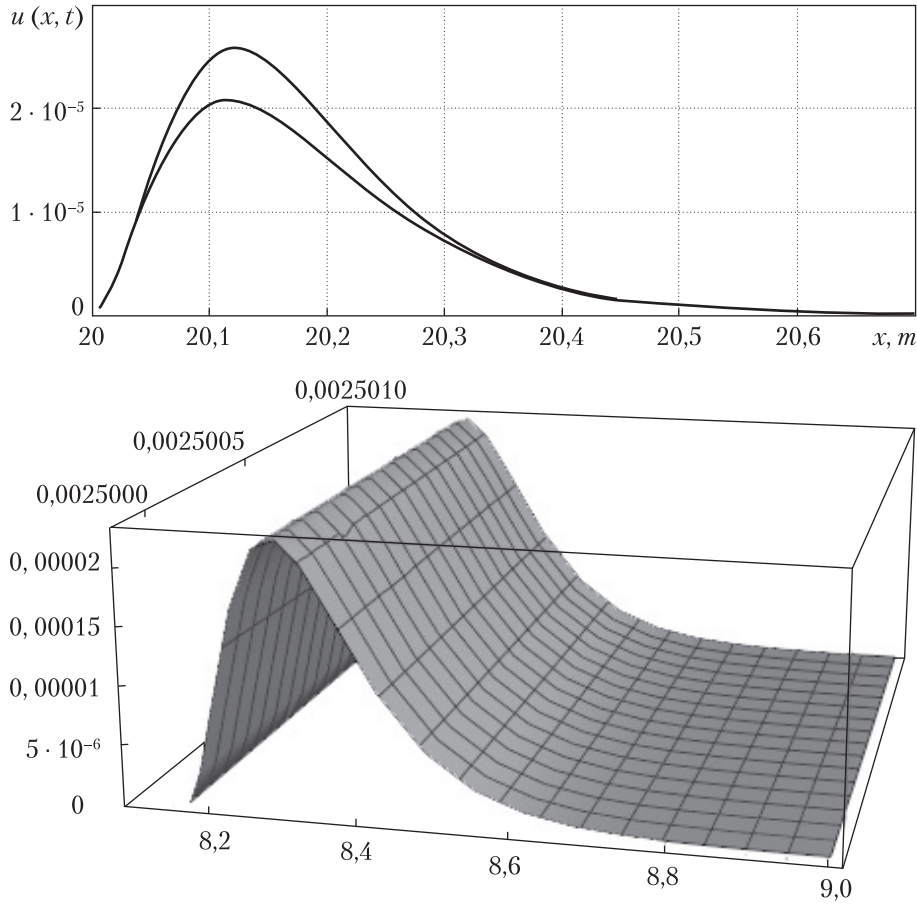


Рис. 4

Отримана формула (20) може бути використана для числового моделювання еволюції хвилі. Характерну залежність амплітуди хвилі від часу і відстані поширення хвилі показано на рис. 4. На верхньому рисунку початковий профіль (верхня крива) накладено на спотворений. Нижній рисунок є тривимірним, на якому видно еволюцію як у часі, так і в просторі.

Отже, поодинокі хвилі з несиметричним профілем у вигляді функції Уїттекера еволюціонують у трьох напрямках: зменшується початкова амплітуда, ліва та права частини горба поступово стають крутішими, сам профіль поступово стає більш симетричним, що нагадує двіноподібний профіль. Підшва хвилі у всіх випадках залишається незмінною.

**Варіант 7** (класичний гармонічний профіль, метод послідовних наближень, перші три наближення). Профіль і метод описані в варіанті 1. Далі зручно представити розв'язок в рамках двох перших наближень у вигляді [1]

$$u_1^{(1+2)}(x, t) = u_{10} \cos \sigma + u_{10} M x_1 \cos 2\sigma,$$

$$M = \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{10} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{10} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{10} \frac{\omega^2}{v_L^4}.$$



Згідно з методом, третє наближення знаходиться як розв'язок рівняння

$$u_{1,t}^{(3)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(3)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(2)} u_{1,1}^{(2)}. \quad (21)$$

Цей розв'язок є таким [1]:

$$u_1^{(3)} = u_{10} (M_L)^3 (x_1)^3 \left\{ \left[ -\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \right] \sin 4\sigma + \left[ -\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right] \cos 4\sigma \right\}. \quad (22)$$

Отже, третє наближення вводить у розв'язок четверту гармоніку. Відповідно четверте наближення буде вводити восьму гармоніку (на кожному кроці гармоніки подвоюються [1]).

Розв'язок у рамках перших трьох наближень має вигляд

$$u_2^{(1+2+3)}(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = u_{10} \cos \sigma + u_{10} M_L x_1 \cos 2\sigma + u_{10} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[ -\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left( -\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \quad (23)$$

Основний хвильовий ефект полягає у тому, що початково профіль хвилі слабо відрізняється від першої гармоніки, хоча друга і четверта гармоніки вже впливають на форму профілю. Зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, зростає вплив другої гармоніки і вона стає домінуючою, однак далі домінуючою стає четверта гармоніка. Це змінює розуміння другої гармоніки як основної, що відповідає теоретичним результатам варіантів 1–3 і експериментам на оптичних хвилях. Можна припустити, що експеримент на більш довгій дистанції покаже в певних випадках домінування четвертої гармоніки.

**Варіант 8** (поодинокий профіль  $F(x_1)$ , метод обмеження на градієнт зміщення, перші три наближення). Метод описано у варіанті 2. Припускається, що початковий профіль поширюється у вигляді

$$u(x_1, t) = F(\sigma), \quad (24)$$

де  $v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$  – змінна швидкість нелінійної хвилі. Далі корінь  $\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$  розкладається в ряд за малим параметром  $\alpha u_{1,1}$  зі збереженням не двох перших членів, а трьох

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)\alpha^2 (u_{1,1})^2. \quad (25)$$

Наближене представлення (25) може бути потрактоване як збереження перших трьох апроксимацій в аналізі нелінійного хвильового рівняння (1). Оскільки швидкість хвилі тепер записується у вигляді  $v = v_L [1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)\alpha^2 (u_{1,1})^2]$ , то наближений розв'язок можна представити у формі, яка узагальнює відповідне представлення з варіанта 2

$$u_1(x_1, t) \cong F\{a(x_1 - v_L t) - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} [1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1}]\}. \quad (26)$$

Припущення щодо малості величини  $\delta^* = -(1/2)t\alpha v_L u_{1,1} [1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1}]$  дозволяє розкласти функцію (26) у ряд Тейлора за малим параметром  $\delta^*$  в околі класичного постійно-

го значення  $\sigma = a(x_1 - v_L t)$  і зберегти лише перші два члени

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &\approx F(\sigma) - F'_1(\sigma) a^2 \left\{ (1/2) t \alpha v_L F'_1(\sigma) \left[ 1 - (1/4) \alpha a v_L F'_1(\sigma) \right] \right\} = \\ &= F(\sigma) - (1/2) \alpha a^2 v_L t [F'_1(\sigma)]^2 \left[ 1 - (1/4) \alpha a v_L F'_1(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким чином, розв'язок в рамках трьох апроксимацій (27) включає додатковий множник  $[1 - (1/4) \alpha a v_L F'_1(\sigma)]$  у порівняння з (7), що вносить антисиметричні зміни в форму початкового профілю в характерну для (7) симетричну форму дисторсії профілю хвилі. Величину антисиметричної дисторсії можна виявити провівши чисельні розрахунки, для чого потрібні значення фізичних постійних інженерних матеріалів, які можна знайти в ряді наукових публікацій (зокрема, в [6]).

Слід зазначити, що представлення (27) містить у третьому наближенні кубічну нелінійність, що у випадку гармонічного профілю означає наявність третьої гармоніки на відміну від ефекту з варіанта 7, де після другої гармоніки генерується четверта.

**Варіант 9** (профіль у вигляді функції Гауса, метод обмеження на градієнт зміщень, перші три наближення). Профіль описано у варіанті 6, метод — у варіанті 2. Підстановка виразу  $F'_1(\sigma) = (A^0 e^{-\sigma^2/2})_{,1} = -a\sigma A^0 e^{-\sigma^2/2}$  в формулу (27) дає розв'язок у вигляді трьох доданків

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2) t \alpha c_L a^2 \sigma^2 (A^0)^2 e^{-\sigma^2} \left[ 1 + (1/4) \alpha a v_L A^0 \sigma e^{-\sigma^2/2} \right] = \\ &= A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2) t \alpha c_L a^2 \sigma^2 (A^0)^2 e^{-\sigma^2} + (1/8) t \alpha^2 a^3 (v_L)^2 (A^0)^3 \sigma^3 e^{-3\sigma^2/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Якщо умовно вважати вираз  $e^{-\sigma^2/2}$  першою гармонікою, то розв'язок (28) включає перші три гармоніки. Еволюція профілю хвилі описується тепер більш складно і вона прискорюється у порівнянні з підходом з варіанта 5.

**Варіант 10** (профіль у вигляді функції Уиттекера, метод обмеження на градієнт зміщень, перші три наближення). Профіль описано у варіанті 6, метод — у варіанті 2. Формалізм отримання розв'язку такий самий, як і у варіанті 9. Підстановка виразу  $F'_1(\sigma) = (a_0 W_{1/4;1/4}(\sigma))_{,1} = a_0 a \left( \frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) a W_{1/4;1/4}(\sigma)$  в формулу (27) дає розв'язок у вигляді трьох доданків

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 W_{1/4;1/4}(x) - (1/2) t \alpha c_L (a^2) (a_0)^2 [W'_{1/4;1/4}(x)]^2 = \\ &= a_0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - \frac{1}{3} t \alpha c_L a^4 (a_0)^2 \left[ \left( \frac{1}{2\sigma} - 1 \right) W_{1/4;1/4}(\sigma) \right]^2 - \\ &- \frac{1}{16} t \alpha^5 (c_L)_2 (a_0)^3 \left[ \left( \frac{1}{2\sigma} - 1 \right) W_{1/4;1/4}(\sigma) \right]^3. \end{aligned} \quad (29)$$

Якщо умовно вважати вираз  $W_{1/4;1/4}(\sigma)$  першою гармонікою, то розв'язок (29) включає перші три гармоніки. Еволюція профілю хвилі описується тепер складніше і вона прискорюється у порівнянні з підходом з варіанту 6.

Таким чином, всі три застосовані методи (послідовних наближень, повільно змінних амплітуд, обмеження на градієнт зміщення) добре пристосовані до аналізу еволюції хвилі з гармонічним профілем. Спотворення більш складних профілів у вигляді функцій Гаусса і Уїттекера аналізуються успішно методом обмеження на градієнт зміщення. Представлення хвилі в рамках двох і трьох перших наближень і відповідно еволюція хвилі істотно відрізняються в рамках методів послідовних наближень і обмеження на градієнт зміщення. При цьому метод послідовних наближень описує генерацію першої, другої, четвертої, восьмої і т.д. гармонік, тоді як метод обмеження на градієнт зміщення описує всі гармоніки послідовно — першу, другу, третю і т.д. Наслідком цього маємо різні сценарії еволюції хвилі.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Rushchitsky J.J. *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Series: Foundations of engineering mechanics. Heidelberg: Springer, 2014. 454 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8>
2. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. *Oscillations and Waves in Linear Systems*. New York: Kluwer Academic Publishers, 1989. 586 p.
3. Rushchitsky J.J. *Theory of waves in materials*. Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2012. 270 p.
4. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. App. Mech.* 2017. **53**, № 1. P. 104–110. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0794-6>
5. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1977. 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7>
6. Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V. Physical constants for one type of nonlinearly elastic fibrous micro- and nanocomposites with hard and soft non-linearities. *Int. Appl. Mech.* 2005. **41**, № 12. P. 1368–1377. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0044-9>

Надійшло до редакції 01.05.2019

#### REFERENCES

1. Rushchitsky, J. J. (2014). *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Series: Foundations of engineering mechanics. Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8>
2. Rabinovich, M. I. & Trubetskov, D. I. (1989). *Oscillations and Waves in Linear Systems*. New York: Kluwer Academic Publishers.
3. Rushchitsky, J. J. (2012). *Theory of waves in materials*. Copenhagen: Ventus Publishing ApS.
4. Yurchuk, V. N. & Rushchitsky, J. J. (2017). Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles. *Int. App. Mech.*, 53, No. 1, pp. 104-110. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0794-6>
5. Kamke, E. (1977). *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. <https://doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7>
6. Rushchitsky, J. J., Cattani, C. & Sinchilo, S. V. (2005). Physical constants for one type of nonlinearly elastic fibrous micro- and nanocomposites with hard and soft non-linearities. *Int. Appl. Mech.*, 41, No. 12, pp. 1368-1377. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0044-9>

Received 01.05.2019

Я.Я. Руцицкий

Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко, Киев

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ ЭВОЛЮЦИИ  
ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ГИПЕРУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Описаны и прокомментированы десять вариантов (известных и новых) приближенного анализа эволюции плоской продольной волны, распространяющейся в нелинейно гиперупругой среде. Показано, что каждый вариант дает ответ на некоторый аспект в изучении эволюции волны. Акцентировано внимание на подобии и отличии в полученных результатах.

**Ключевые слова:** продольная гиперупругая волна, искажение начального профиля волны, варианты приближенного анализа эволюции волны.

J.J. Rushchitsky

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

ON THE APPROXIMATE ANALYSIS OF THE EVOLUTION  
OF A PLANE LONGITUDINAL HYPERELASTIC WAVE

Three approaches (methods) are used to analyze the evolution of a plane longitudinal wave that propagates in a nonlinear hyperelastic medium — method of successive approximations, method of slowly varying amplitudes, and method of restriction on the displacement gradient. The evolution is understood as changing the initial wave profile during the propagation of a wave in the nonlinear elastic medium. Ten variants (known and new) of an approximate analysis of the evolution of a plane longitudinal wave propagating in an hyperelastic medium are described and commented. It is shown that each variant gives answer on some aspect in studying the wave evolution. An attention is drawn to the similarity and the difference in the results of analysis.

**Keywords:** longitudinal hyperelastic wave, distortion of a wave initial profile, variants of approximate analysis of the wave evolution.