

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003>

УДК 517.5

Е.С. Афанасьева¹, В.И. Рязанов¹, Р.Р. Салимов²

¹ Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск

² Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

К теории классов Соболева с критическим показателем

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Я. Гутлянским

Установлено, что любой гомеоморфизм f класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}$ с внешней дилатацией $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ является так называемым нижним Q -гомеоморфизмом с $Q = K_O(x, f)$, а также кольцевым Q_* -гомеоморфизмом с $Q_* = K_O^{n-1}(x, f)$. Это позволяет исследовать локальное и граничное поведение отображений класса $W_{loc}^{1,n-1}$.

Ключевые слова: классы Соболева, критический показатель, внешняя и внутренняя дилатации, нижние и кольцевые Q -гомеоморфизмы.

1. Предварительные замечания. Пусть D — область в R^n , $n \geq 2$, и пусть $f: D \rightarrow R^n$ — непрерывное отображение. Если f имеет все первые частные производные в точке $x \in D$, то $f'(x)$ — якобиева матрица f , $\|f'(x)\|$ — её операторная норма, $\|f'(x)\| := \sup_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J_f(x) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f . Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством $K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Внутренней дилатацией* отображения f в точке x называется величина $K_I(x, f) = \frac{|J_f(x)|}{l(f'(x))^n}$, где $l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Следуя [1, разд. 9.2], далее k -мерной поверхностью S в R^n называется произвольное непрерывное отображение $S: \omega \rightarrow R^n$, где ω — открытое множество в R^k и $k = 1, \dots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in R^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S . Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу (см., например, [2, с. 160]) и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см., например, теорему II(7.6) в [3]).

Для борелевской функции $\rho: R^n \rightarrow [0, \infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int_S \rho dA := \int_{R^n} \rho(y) N(S, y) dH^k(y).$$

Пусть Γ — семейство k -мерных поверхностей S . Борелева функция $\rho: R^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k dA \geq 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. *Модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{R^n} \rho^n(x) dm(x).$$

В дальнейшем через $\Delta(E, F; G)$ обозначаем совокупность всех кривых $\gamma: [0, 1] \rightarrow R^n$, соединяющих произвольные множества E и F в множестве $G \subset R^n$, т. е. $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (0, 1)$.

2. О кольцевых и нижних Q -гомеоморфизмах. Пусть D и D' — области в R^n , $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q: R^n \rightarrow (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in \overline{D}$* , если соотношение $M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D))) \leq \int_{A \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x)$ выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D , которые принадлежат разным компонентам дополнения в R^n колец $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in R^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. Также говорим, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ есть *кольцевой Q -гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in D$.

Понятие кольцевого Q -гомеоморфизма впервые было введено в работе [4] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай в работе [5] (см. также [1, 6]).

Говорят (см. [1, разд. 9.2]), что измеримая по Лебегу функция $\rho: R^n \rightarrow [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства Γ $(n-1)$ -мерных поверхностей S в R^n , пишут $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$, если $\int_S \rho^{n-1} dA \geq 1$ для почти всех $S \in \Gamma$, т. е. за исключением подсемейства Γ нулевого модуля.

Гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ называется *нижним Q -гомеоморфизмом в точке x_0* , если

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) \text{ для каждого кольца } A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

$\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε — семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D , $S(x_0, r) = \{x \in R^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ является *нижним Q -гомеоморфизмом в области D* , если f является нижним Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \bar{D}$.

Понятие нижнего Q -гомеоморфизма введено в работе [7] и теория таких отображений нашла интересные приложения в изучении краевых задач для уравнений Бельтрами, а также локального и граничного поведения классов Орлича—Соболева (см., например, [8—10]).

Следующее утверждение устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q -гомеоморфизмами в R^n (см. следствие 5 в [9]).

Предложение 1. Пусть D и D' — области в R^n , $n \geq 2$, и функция $Q : R^n \rightarrow (0, \infty)$ интегрируема в степени $n-1$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{D}$. Если $f : D \rightarrow D'$ — нижний Q -гомеоморфизм в точке x_0 , то f является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.

Замечание 1. В определениях нижних и кольцевых Q -гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D или продолжить нулем вне D . По замечанию 8 в [9], заключение предложения 1 остается в силе, если функция Q интегрируема в степени $n-1$ лишь на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0 .

3. О некоторых свойствах отображений класса Соболева $W_{loc}^{1, n-1}$. По теореме 1.1 из недавней работы [11] имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть D — область в R^n , $n \geq 2$, и $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение класса $W_{loc}^{1, n-1}$ с локально интегрируемой внутренней дилатацией. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду.

При $n \geq 3$ этот результат был новым даже для гомеоморфизмов. При $n = 2$ по известной теореме Геринга—Лехто (1959) любое непрерывное открытое отображение, имеющее п. в. частные производные, дифференцируемо п. в. Заметим, что последний результат для гомеоморфизмов был доказан еще Меньшовым (1931) и его доказательство без изменений проходит и для непрерывных открытых отображений. По теореме Вяйсяля (1961) заключение сохраняет силу для непрерывных открытых отображений класса $W_{loc}^{1, p}$ при любых $p > n-1$ и $n \geq 3$. В то же время известен пример Серрина (1961) непрерывных функций f класса $W_{loc}^{1, n} \subset W_{loc}^{1, n-1}$, которые нигде не дифференцируемы.

Следствие 1. Если открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow R^n$ класса $W_{loc}^{1, n-1}(D)$ имеет внешнюю дилатацию локально интегрируемую в степени $n-1$, то f дифференцируемо почти всюду.

Далее, по теореме 1.3 работы [12] имеем следующий важный результат.

Предложение 3. Пусть $f : C \rightarrow R^n$, $n \geq 2$, — гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1, n-1}(C)$ в единичном кубе $C := (0, 1)^n$. Тогда f обладает N -свойством Лузина относительно $n-1$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях P , параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости P_0 , т. е. для любого множества $E \subset P$, если $H^{n-1}(E) = 0$, то $H^{n-1}(f(E)) = 0$.

Этот результат был распространен на произвольные непрерывные открытые дискретные отображения $f : D \rightarrow R^n$ класса $W_{loc}^{1, n-1}$ (см. предложение 3.3 в [11]). Более того, любое непрерывное отображение $f : D \rightarrow R^m$, $m \geq 1$, класса $W_{loc}^{1, p}$ при $p > n-1$ обладает указан-

ным свойством (см., например, теорему 3 в [9]). Однако это неверно даже для гомеоморфизмов $f: D \rightarrow R^n$ в классах $W_{loc}^{1,p}$ ни при каком $p < n-1$. Действительно, известны примеры С.П. Пономарева гомеоморфизмов $g: R^n \rightarrow R^n$, принадлежащих классу $W_{loc}^{1,p}(R^n)$ для произвольного $p < n$, и не обладающих N -свойством Лузина (см. [13]). Если теперь $g(x)$ — такой пример в R^{n-1} , то $f(x, y) := (g(x), y)$, $x \in R^{n-1}$, $y \in R$, не удовлетворяет N -свойству Лузина на всех гиперплоскостях $y = \text{const}$.

Лемма 1. Пусть D и D' — области в R^n , $n \geq 2$, $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}(D)$ с $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Тогда $\|f'\| \in L_{loc}^{n-1}(D)$.

4. Основная лемма.

Лемма 2. Пусть D — область в R^n , $n \geq 2$, $f: D \rightarrow R^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}(D)$ с $K_O(\cdot, f) \in L_{loc}^{n-1}(D)$ и пусть C — куб в R^n с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, такой что $\bar{C} \subset D$. Тогда сужение отображения f на C абсолютно непрерывно относительно $n-1$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях P , параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости P_0 . Кроме того, на почти всех таких гиперплоскостях P выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset P$.

Заметим тот очевидный факт, что хаусдорфовы меры квазиинвариантны при квазиизометриях, а классы Соболева $W_{loc}^{1,p}$ инвариантны (см., например, секцию 1.1.7 в [14]). По свойству Линделефа в R^n (см., например, секцию I.5.XI в [15]) множество $D \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in R^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $D \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0 , и каждый такой сегмент может быть отображен на единичный куб в R^n посредством квазиизометрии, переводящих куски сфер в куски гиперплоскостей.

Таким образом, на основе предложений 2 и 3, а также применяя лемму 2, приходим к следующим выводам.

Следствие 2. Пусть D — область в R^n , $n \geq 2$, $f: D \rightarrow R^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}(D)$. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду и обладает N -свойством Лузина относительно $n-1$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех сферах S с центром в произвольной точке $x_0 \in R^n$. Более того, если дополнительно $K_O(\cdot, f) \in L_{loc}^{n-1}(D)$, то отображение f на почти всех таких сферах S локально абсолютно непрерывно и, кроме того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset S$.

5. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть D и D' — области в R^n , $n \geq 2$, $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}(D)$ с $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Тогда f является нижним Q -гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \bar{D}$ с $Q = K_O(x, f)$.

Комбинируя предложение 2 и теорему 1, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 3. Пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W_{loc}^{1,n-1}(D)$ с $K_O(\cdot, f) \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Тогда f является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом с $Q_* = K_O^{n-1}(x, f)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer, 2009. 367 p.
2. Rado T., Reichelderfer P.V. Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer, 1955. 442 p.
3. Сакс С. Теория интеграла. Москва: Изд-во иностр. лит., 1949, 494 с.

4. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 2005. **96**. P. 117–150.
5. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов. *Сиб. матем. журн.* 2007. **48**, № 6. С. 1361–1376.
6. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: A geometric approach. *Developments of Mathematics*. Vol. 26. New York etc.: Springer, 2012. 302 p.
7. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q -гомеоморфизмов. *Укр. мат. вестн.* 2008. **5**, № 2. С. 159–184.
8. Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами. *Алгебра и анализ.* 2013. **25**, № 4. С. 101–124.
9. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича–Соболева. *Алгебра и анализ.* 2013. **25**, № 6. С. 50–102.
10. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева: Под общей ред. Рязанова В.И. Киев: Наук. думка, 2013. 304 с.
11. Tengvall V. Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.* 2014. **51**, № 1–2. P. 381–399.
12. Csörnyei M., Hencl S., Maly J. Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *J. Reine Angew. Math.* 2010. № 644. P. 221–235.
13. Пономарёв С.П. Об N -свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1 . *Сиб. матем. журн.* 1987. **28**, № 2. С. 140–148.
14. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 416 с.
15. Куратовский К. Топология. Т. 1. Москва: Мир, 1966. 594 с.

Поступило в редакцию 26.03.2019

REFERENCES

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory*. New York: Springer.
2. Rado, T. & Reichelderfer, P. V. (1955). *Continuous transformations in analysis*. Berlin: Springer.
3. Saks, S. (1949). *Integral theory*. Moscow: Izd-vo Inostr. lit. (in Russian).
4. Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96, pp. 117-150.
5. Ryazanov, V. I. & Sevostyanov, E. A. (2007). Equicontinuous classes of ring homeomorphisms. *Sib. matem. zhurn.*, 48, No. 6, pp. 1361-1376.
6. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). The Beltrami equation: A geometric approach. *Developments of Mathematics*, Vol. 26. New York etc.: Springer.
7. Kovtonyuk, D. A. & Ryazanov, V. I. (2008). On the theory of lower Q -homeomorphisms. *Ukr. mat. vestnik*, 5, No. 2, pp. 159-184 (in Russian).
8. Kovtonyuk, D. A., Petkov, I. V., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2013). Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Algebra i analiz*, 25, No. 4, pp. 101-124 (in Russian).
9. Kovtonyuk, D. A., Ryazanov, V. I., Salimov, R. R. & Sevostyanov, E. A. (2013). On the theory of Orlich-Sobolev classes. *Algebra i analiz*, 25, No. 6, pp. 50-102 (in Russian).
10. Kovtonyuk, D. A., Salimov, R. R. & Sevostyanov, E. A. (2013). On the theory of mappings of classes Sobolev and Orlich-Sobolev. *Kyiv: Naukova Dumka* (in Russian).
11. Tengvall, V. (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.*, 51, No. 1-2, pp. 381-399.
12. Csörnyei, M., Hencl, S. & Maly, J. (2010). Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *J. Reine Angew. Math.*, No. 644, pp. 221-235.
13. Ponomarev, S. P. (1987). On N -properties of classes W_p^1 homeomorphisms. *Sib. matem. zhurn.*, 28, No. 2, pp. 140-148 (in Russian).
14. Mazya, V. G. (1985). *Spaces S.L. Sobolev*. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta (in Russian).
15. Kuratovskij, K. (1966). *Topology*. Vol. 1. Moscow: Mir (in Russian).

Received 26.03.2019

О.С. Афанасьєва¹, В.І. Рязанов¹, Р.Р. Салимов²

¹ Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

² Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

ДО ТЕОРІЇ КЛАСІВ СОБОЛЄВА З КРИТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ

Встановлено, що будь-який гомеоморфізм f класу Соболєва $W_{loc}^{1, n-1}$ із зовнішньою дилатацією $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ є так званим нижнім Q -гомеоморфізмом із $Q = K_O(x, f)$ та кільцевим Q_* -гомеоморфізмом із $Q_* = K_O^{n-1}(x, f)$. Це дає можливість дослідити локальну та граничну поведінку відображень класу $W_{loc}^{1, n-1}$.

Ключові слова: класи Соболєва, критичний показник, зовнішня та внутрішня дилатації, нижні та кільцеві Q -гомеоморфізми.

O.S. Afanas'eva¹, V.I. Ryazanov¹, R.R. Salimov²

¹ Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

TOWARD THE THEORY OF THE SOBOLEV CLASSES WITH CRITICAL EXPONENT

It is established that an arbitrary homeomorphism f in the Sobolev class $W_{loc}^{1, n-1}$ with the outer dilatation $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ is the so-called lower Q -homeomorphism with $Q = K_O(x, f)$ and the ring Q_* -homeomorphism with $Q_* = K_O^{n-1}(x, f)$. These results make it possible to research the local and boundary behaviors of the mappings $W_{loc}^{1, n-1}$.

Keywords: Sobolev's classes, critical exponent, outer and inner dilatations, lower and ring Q -homeomorphisms.