ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.07.003
УДК 517.587

В.Л. Макаров, академік НАН України

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: makarov@imath.kiev.ua

Поліноми Мейкснера та їх властивості

Досліджено ряд властивостей спеціального випадку поліномів Мейкснера, заданих своєю твірною функцією. Ці поліноми виникають при застосуванні методу перетворення Келі до розв'язування першої крайової задачі для абстрактного диференціального рівняння другого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом.

Ключові слова: *поліноми Мейкснера, твірна функція, метод перетворення Келі, рекурентні рівняння, функція Гріна.*

У 1934 році Дж. Мейкснер у роботі [1] за допомогою твірної функції

$$w(x,t) = e^{xu(t)} f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n, \qquad (1)$$
$$f(0) = 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

ввів систему поліномів $P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ які з того часу носять ім'я автора [2]. Стосовно функцій $u(t), f(t)$ в [1], крім того, було зроблено припущення, що вони зображуються формальними степеневими рядами за степенями t. Частинними випадками (1) є твірні функції для поліномів Ерміта, Лагерра, Ейлера та Бернуллі. Як зазначено у роботі [1], системи ортогональних поліномів, що визначаються твірними функціями вигляду (1), містять тільки поліноми Ерміта, поліноми Лагерра та їх узагальнення, конфлюентні гіпергеометричні поліноми, а також загальні поліноміальні системи, що породжуються простими лінійними однорідними диференціальними рівняннями.

Поліноми, які досліджуються у даній роботі, пов'язані з задачею

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - Au(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = u_1,$$

де A — самоспряжений додатно визначений оператор, що діє у гільбертовому просторі H, u_1 — елемент цього простору. Використовуючи метод перетворення Келі, розв'язок наведеної задачі можна зобразити у вигляді [3]

$$\begin{aligned}&\sinh^{-1}(\sqrt{A})\sinh(\sqrt{A}x)u_1=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(x)f_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{(2k+1)!}f_k,\\&f_k=[(I+A)^{-1}A]^k u_1,\quad k=0,1,\ldots.\end{aligned}\tag{2}$$

Тут $P_{2k+1}(x),\quad k=0,1,\ldots,$ — поліноми Мейкснера з твірною функцією (1), у якої

$$f(t)=\frac{t}{\sinh u(t)},\quad u(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$(I+A)^{-1}A$— перетворення Келі оператора A, I — тотожний оператор. Ці поліноми відіграють таку ж роль, що й поліноми Лагерра в зображенні операторної експоненти, побудованому за допомогою методу перетворення Келі [3—5].

Для побудови наближеного методу без насичення точності на основі формули (2) та його обґрунтування потрібно знати властивості поліномів із (2). Вивченню цих властивостей і присвячено дану роботу.

Справедливою є

Лема 1. *Для нормованих поліномів Мейкснера має місце зображення*

$$P_{2k+1}(x)/(2k+1)!=v_k(x)=x(1-x^2)\sum_{t=0}^{k-1}b_{2k+1,\,t}\,x^{2t}=x(1-x^2)\widehat{P}_{2k+1}(x),\quad k=1,2,\ldots.$$

Доведення здійснюється за допомогою методу математичної індукції з використанням формул

$$\begin{aligned}&v_{k+1}(x)=v_k(x)-\int_0^1 G(x,\xi)v_k(\xi)d\xi,\\&\int_0^1 G(x,\xi)\xi^{2t+1}(1-\xi^2)d\xi=\frac{x(1-x^2)}{(2t+2)_4}\left[-x^{2t+2}(4t^2+10t+6)+(8t+14)\sum_{s=0}^{t}x^{2s}\right].\end{aligned}\tag{3}$$

Справджується таке твердження.

Лема 2. *Нормовані поліноми Мейкснера* $v_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, *можна подати у вигляді*

$$v_k(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\sqrt{2}a_p^{(k)}\sin p\pi x,\quad x\in[0,1]\ ,\tag{4}$$

де $a_p^{(k)}=\sqrt{2}\int_0^1 v_k(x)\sin p\pi x\,dx=\frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3}\left(1-\frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1}$, *і для них мають місце оцінки*

$$|v_k(x)| \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall x \in [0,1], \tag{5}$$

$$\left| \frac{v_k(x)}{\min(x, 1-x)} \right| \leqslant C\, k^{(-1/2)}. \tag{6}$$

Доведення. Продовжимо $v_k(x)$ непарним чином на проміжок $[-1, 0]$, а потім — періодично на всю числову вісь. Для доведення формули (4) застосуємо метод математичної індукції. Для $k=1$ формула (4) є правильною, оскільки

$$v_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(1)} \sin p\pi x\,, \; x \in [0,1],$$

$$a_p^{(1)} = \sqrt{2} \int_0^1 v_1(x) \sin p\pi x\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{6} \int_0^1 x(1-x^2) \sin p\pi x\, dx = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3}.$$

Припустимо, що формула (4) справджується для деякого $k \in \mathbb{N}$, доведемо її справедливість для наступного значення $k+1$. З урахування формули (3) маємо

$$v_{k+1}(x) = v_k(x) - \int_0^1 G_0(x, \xi) v_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin p\pi x - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \int_0^1 G_0(x,\xi) \sin p\pi\xi\, d\xi =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin p\pi x - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \left[(1-x) \int_0^x \xi \sin p\pi\xi\, d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) \sin p\pi\xi\, d\xi \right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin p\pi x - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \frac{1}{(p\pi)^2} \sin p\pi x = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right) \sin p\pi x\,,$$

звідки одержуємо

$$a_p^{(k+1)} = a_p^{(k)} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right) = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right) = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right)^{k},$$

що й доводить правильність (4). Далі оцінимо за модулем обидві частини формули (4). Отже, матимемо

$$|v_k(x)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p\pi)^3} \left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2} \right)^{k-1} \leqslant 2 \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{y^3} \left(1 - \frac{1}{y^2} \right)^{k-1} dy = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{\pi^2} \right)^k}{k} < \frac{1}{k},$$

звідки випливає оцінка (5). У результаті одержимо співвідношення

$$\left|\frac{v_k(x)}{\min(x,1-x)}\right| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(p\pi)^2}\left(1-\frac{1}{p^2\pi^2}\right)^{k-1} \leqslant C\int_{\pi^2}^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}dx =$$

$$= C\int_{0}^{1/\pi^2} t^{(-1/2)}(1-t)^{k-1}dt \leqslant CB\left(\frac{1}{2},k\right) = C\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} \leqslant Ck^{(-1/2)}, \qquad (7)$$

що доводять оцінку (6) зі сталою C, яка не залежить від k. У (7) ми використали нерівність Гаутші (Gautschi) [6]

$$k^{1-s} < \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(s+k)} < (k+1)^{1-s}, \quad 0 < s < 1,$$

де $B(\alpha,\beta)$ – бета-функція, $\Gamma(k)$ — гамма-функція. Лему повністю доведено.

Наведемо декілька перших поліномів $P_n(x)$. Зокрема,

$$P_1(x) = x, \quad P_3(x) = -x(1-x^2), \quad P_5(x) = x(1-x^2)(-x^2-53/3),$$
$$P_7(x) = x(1-x^2)(-x^4-78x^2-1963/3), \ldots .$$

Аналітичні обчислення, проведені за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple, свідчать, що всі коефіцієнти $b_{2k+1,\,t}$ модифікованих поліномів Мейкснера $\widehat{P}_{2k+1}(x)$, $k=0,\ldots,24$, є від'ємними, а починаючи з $k=25$ коефіцієнти при молодших членах стають додатними. Так, зокрема, для вільних членів маємо

$$b_{51,\,0} = 0{,}1157538231851017\ldots\cdot 10^{-2}, \quad b_{53,\,0} = 0{,}2189767687876768\ldots\cdot 10^{-2}, \ldots .$$

Разом з тим виконується таке твердження.

Лема 3. *Суми коефіцієнтів модифікованих поліномів Мейкснера* $\widehat{P}_{2k+1}(x)$, $k \geqslant 1$, *є від'ємними числами.*

Доведення. З (4) випливає, що

$$v_k'(1) = -2\widehat{P}_{2k+1}(1) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(p\pi)^2}\left(1-\frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1}.$$

Ряд у правій частині цього виразу є збіжним [7], має тільки від'ємні доданки, отже, його сума буде дорівнювати від'ємному числу, яке буде залежати від k та прямувати до нуля, якщо $k\to\infty$. Таким чином,

$$\sum_{t=0}^{k-1} b_{2k+1,\,t} < 0 .$$

Наведемо декілька явних формул для коефіцієнтів при старших членах цих поліномів. Із формул (3) випливає, що

$$\sum_{t=0}^{k-1} b_{2k+1,t}x^{2t} = \sum_{t=0}^{k-2} b_{2k-1,t}x^{2t} + \sum_{t=0}^{k-2} \frac{b_{2k-1,t}}{(2t+2)_4}\left[x^{2t+2}(4t^2+10t+6)-(8t+14)\sum_{s=0}^{t} x^{2s}\right]=$$

$$= \sum_{t=0}^{k-2} b_{2k-1,t}x^{2t} + \sum_{t=0}^{k-2} \frac{b_{2k-1,\,t}(4t^2+10t+6)}{(2t+2)_4}x^{2t+2} - \sum_{t=0}^{k-2}\sum_{s=t}^{k-2} \frac{b_{2k-1,\,s}(8s+14)}{(2s+2)_4}x^{2t}.$$

Звідси одержуємо

$$b_{2k+1,\,t} = \frac{b_{2k-1,\,t-1}}{(2t+2)\,(2t+3)} + \left[b_{2k-1,\,t} - \sum_{s=t}^{k-2} \frac{b_{2k-1,\,s}(8s+14)}{(2s+2)_4}\right],$$

$$t = k-2, k-3, \ldots, k-p, \quad k = p, p+1, \ldots,$$

$$b_{2k+1,\,0} = \frac{53}{60}b_{2k-1,\,0} - \sum_{s=1}^{k-2} \frac{b_{2k-1,\,s}(8s+14)}{(2s+2)_4}, \tag{8}$$

$$b_{2k+1,\,t} = b_{2k-1,\,t} + \left[\frac{b_{2k-1,\,t-1}}{(2t+2)\,(2t+3)} - \sum_{s=t}^{k-2} \frac{b_{2k-1,\,s}(8s+14)}{(2s+2)_4}\right], \quad t = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

$$k = 2, 3, \ldots.$$

Розв’язуючи рекурентні рівняння першого порядку (8), (9), отримуємо

$$b_{2n+7,\,n+2} = -\frac{1}{(2n+7)!}, \quad n = -2, -1, \ldots,$$

$$b_{2n+7,\,n+1} = -\frac{(12n^2+76n+117)(2n+4)}{3!(2n+7)!}, \quad n = -1, 0, \ldots, \tag{10}$$

$$b_{2n+7,\,n} = -\frac{(720n^5+8400n^4+37528n^3+79512n^2+79109n+29445)2\,(2n+4)}{3\cdot 5!(2n+7)!},$$

$$n = 0, 1, \ldots.$$

З наведених формул (10) випливає, що коефіцієнти при трьох старших членах модифікованих поліномів Мейкснера $\widehat{P}_{2k+7}(x)$ для всіх $n \geqslant 0$ є від’ємними.

Таким чином, система поліномів Мейкснера не утворює ортогональну систему. Це повністю узгоджується з відповідним твердженням статті [1].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Meixner J. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. *J. London Math. Soc.* 1934. **s1-9**, Iss. 1. P. 6—13.
2. Сеге Г. Ортогональные полиномы. Москва: Физматлит, 1962. 500 с.

3. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. Тр. Ин-та математики НАН Украины, Т. 52. Киев, 2004. 499 с.
4. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L. Explicit and approximate solutions of second order differential equations in Hilbert and Banach spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1999. **20**. P. 695—717.
5. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L. The Cayley transform and the solution of an initial problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1994. **15**. P. 583—598.
6. Li X., Chen C.-P. Inequalities for the gamma function. *J. Ineq. Pure Appl. Math.* 2007. **8**, Iss. 1. Art. 28. 3 pp.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. Москва: ГИТТЛ, 1957. 464 с.

Надійшло до редакції 28.03.2019

REFERENCES

1. Meixner, J. (1934). Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. J. London Math. Soc., **s1-9**, Iss. 1, pp. 6-13.
2. Szeg'o, G. (1962). Orthogonal polynomials. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
3. Gavrilyuk, I.P. & Makarov, V.L. (2004). Strongly positive operators and numerical algorithms without accuracy saturation. Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. (Vol. 52). Kyiv (in Russian).
4. Gavrilyuk, I.P. & Makarov, V.L. (1999). Explicit and approximate solutions of second order differential equations in Hilbert and Banach spaces. Numer. Funct. Anal. Optim., 20, pp. 695-717.
5. Gavrilyuk, I.P. & Makarov, V.L. (1994). The Cayley transform and the solution of an initial problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space. Numer. Funct. Anal. Optim., 15, pp. 583-598.
6. Li, X. & Chen, C.-P. (2007). Inequalities for the gamma function. J. Ineq. Pure and Appl. Math., 8, Iss. 1, Art. 28, 3 pp.
7. Fikhtengol'ts, G.M. (1957). The fundamentals of mathematical analysis. (Vol. 2). Moscow: GITTL (in Russian).

Received 28.03.2019

В.Л. Макаров
Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: makarov@imath.kiev.ua

ПОЛИНОМЫ МЕЙКСНЕРА И ИХ СВОЙСТВА

Исследован ряд свойств специального случая полиномов Мейкснера, заданных своей производящей функцией. Эти полиномы возникают при применении метода преобразования Кэли для решения первой краевой задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторним коэффициентом.

Ключевые слова: *полиномы Мейкснера, производящая функция, метод преобразования Кэли, рекуррентные уравнения, функция Грина.*

V.L. Makarov
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: makarov@imath.kiev.ua

MEIXNER POLYNOMIALS AND THEIR PROPERTIES

A number of properties of a special case of Meixner polynomials given by their generating function are investigated. These polynomials arise when applying the Cayley transformation method to solving the first boundary-value problem for an abstract differential equation of the second order with an unbounded operator coefficient.

Keywords: *Meixner polynomials, generating function, Cayley transformation method, recurrent equations, Green function.*