

УДК 539.3

ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХОПОРНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

ЧАСТЬ 2.

Реализация модели и результаты расчета

С. Б. Ковальчук, канд. техн. наук

stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua

ORCID: 0000-0003-4550-431X

А. В. Горик, д-р техн. наук

ORCID: 0000-0002-2804-5580

Полтавская государственная
аграрная академия
36003, Украина, г. Полтава,
ул. Сковороды, 1/3

Развитие технологий композитов способствует их широкому внедрению в практику проектирования современных конструкций различного назначения. Достоверное прогнозирование напряженно-деформированного состояния (НДС) композитных элементов является одним из условий создания надежных конструкций с оптимальными параметрами. Аналитические теории определения НДС многослойных стержней (брусьев, балок) значительно уступают в развитии теориям для композитных плит и оболочек, хотя стержневые элементы конструкций являются самыми распространенными. Целью данной работы является построение аналитической модели изгиба двухопорных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузки на основе полученного ранее решения теории упругости для многослойной консоли. Во второй части статьи приведены примеры реализации модели изгиба двухопорных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузки, построенной в первой части статьи. С использованием модели получены решения задач изгиба многослойных балок с различными способами закрепления их крайних сечений. Полученные соотношения апробированы на тестовых задачах определении прогибов однородных композитных двухопорных балок с различными комбинациями закреплений, а также при определении напряжений и перемещений четырехслойной балки с жестким и шарнирным закреплением торцов. Полученные результаты имеют незначительное расхождение с результатами моделирования методом конечных элементов (МКЭ) и расчета по итерационной модели изгиба композитных брусьев, даже для относительно коротких балок. Кроме того, показано, что пренебрежение сдвиговой податливостью материалов слоев приводит к большим погрешностям при определении прогибов, а в случае статически неопределимых балок – также реактивных усилий и напряжений. Примененный при построении модели подход можно расширить на случай балок с произвольным количеством сосредоточенных сил и промежуточных опор и для расчета многослойных балок с различными жесткостями расчетных участков.

Ключевые слова: многослойная балка, ортотропный слой, сосредоточенная нагрузка, прогиб, напряжения, перемещения.

Введение

Механике деформирования композитных многослойных плит и оболочек, посвящено большое количество фундаментальных научных работ [1–8]. Деформирование композитных стержней (брусьев, балок) исследовано значительно меньше, хотя такие элементы составляют значительную часть большинства конструкций.

При решении задач изгиба композитных балок распространено применение уточненных моделей, в частности, построенных итерационным методом [9–11]. Такие модели достаточно универсальны, однако весьма громоздки и сложны для практического применения на высоких шагах уточнения. В то же время точные решения для многослойных балок, например [12, 13], ограничены в возможности учета различных видов нагрузки и опор, однако на их основе можно получить сравнительно простые, но достаточно точные прикладные решения типовых задач.

В первой части статьи [14] с использованием общего решения теории упругости для многослойной консоли с нагрузкой на торце [12] построена аналитическая модель плоского изгиба двухопорной многослойной балки под действием сосредоточенной нагрузки. Целью данной части работы является демонстрация применения построенной модели для наиболее распространенных схем закрепления двухопорных балок с сосредоточенной нагрузкой, а также апробация полученных соотношений при решении тестовых задач.

Основная часть

Модель плоского изгиба двухопорной многослойной балки под действием сосредоточенной нагрузки, построенную в первой части статьи [14], составляют: соотношения для компонент основного НДС участков балки (2)–(4), система уравнений для определения начальных параметров балки (10), а также зависимости между начальными параметрами первого и второго участка (11). Соотношения для компонент НДС содержат 6 статических (значения внутренних силовых факторов $N_{x1}^{(i)}, Q_{z1}^{(i)}, M_{y1}^{(i)}, i = 1, 2$) и 6 кинематических (значения перемещений $u_{11}^{(i)}, u_{12}^{(i)}, w_{11}^{(i)}, i = 1, 2$) начальных параметров, которые зависят от типа закрепления концов балки. В каждом конкретном случае закрепления 6 из 12 параметров могут быть заданы непосредственно, а оставшиеся 6 – определены путем решения системы алгебраических уравнений (10) [14].

Рассмотрим основные этапы реализации модели при определении основного НДС балок с шарнирным, жестким и комбинированным закреплением концов.

Балка с шарнирно закрепленными концами. Примем, что левая шарнирная опора балки неподвижная, а правая – не ограничивает продольное перемещение закрепленной точки (рис. 1).

Для такого способа закрепления концов балки можно непосредственно указать следующие статические и кинематические условия для начального и конечного сечений:

$$M_{y1}^{(1)} = -N_{x1}^{(1)} z_1, \quad u_{11}^{(1)} = 0, \quad w_{11}^{(1)} = 0, \quad M_{y2}^{(2)} = 0, \quad N_{x2}^{(2)} = 0, \quad w_{21}^{(2)} = 0. \quad (1)$$

В первом выражении (1) учтено, что смещение шарнира левой опоры относительно центра жесткости торца вызовет появление начального изгибающего момента.

Подставив (1) в (10) [14], получим систему уравнений для определения неизвестных начальных и конечных параметров

$$\begin{aligned} 0 &= N_{x1}^{(1)} - F_x; \quad Q_{z2}^{(2)} = Q_{z1}^{(1)} + F_z; \quad 0 = lQ_{z1}^{(1)} - N_{x1}^{(1)} z_1 + l_2 F_z + M; \\ u_{21}^{(2)} &= \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_1 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} - \frac{z_1 l}{bB_2} N_{x1}^{(1)} z_1 - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_1 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_1 l_2 M}{bB_2}; \\ u_{22}^{(2)} &= \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_2 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} - \frac{z_2 l}{bB_2} N_{x1}^{(1)} z_1 + u_{12}^{(1)} - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_2 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_2 l_2 M}{bB_2}; \\ 0 &= -\frac{hl^3 + 6D_2 l}{6hbB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{l^2}{2bB_2} N_{x1}^{(1)} z_1 - \frac{l}{h} u_{12}^{(1)} - \frac{hl_2^3 + 6D_2 l_2}{6hbB_2} F_z - \frac{l_2^2 M}{2bB_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решив (2) относительно неизвестных статических и кинематических параметров, имеем

$$\begin{aligned} N_{x1}^{(1)} &= F_x, \quad Q_{z1}^{(1)} = \frac{F_x z_1 - l_2 F_z - M}{l}, \quad Q_{z2}^{(2)} = \frac{F_x z_1 + l_1 F_z - M}{l}, \\ u_{21}^{(2)} &= \left(\frac{l_1}{B_0} - \frac{z_1^2 l}{2B_2} \right) \frac{F_x}{b} - \frac{z_1 l_1 l_2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_1 (l_2 - l_1) M}{2bB_2}, \\ u_{22}^{(2)} &= \left(\frac{l_1}{B_0} + z_1 \frac{(3z_2 + h)l^2 - 3D_2}{3lB_2} \right) \frac{F_x}{b} - l_1 l_2 \frac{z_2 (l_1 + l) + z_1 (l + l_2)}{6lB_2} \frac{F_z}{b} + \\ &\quad + \frac{z_1 (3l_2^2 - l^2) - z_2 (3l_1^2 - l^2) + 6D_2}{6blB_2} M, \\ u_{12}^{(1)} &= \frac{z_1 (hl^2 - 3D_2)}{3lB_2} \frac{F_x}{b} + \frac{hl_1 l_2 (l + l_2) F_z}{6blB_2} + \frac{h(l^2 - 3l_2^2) + 6D_2}{6lB_2} \frac{M}{b}. \end{aligned} \quad (3)$$

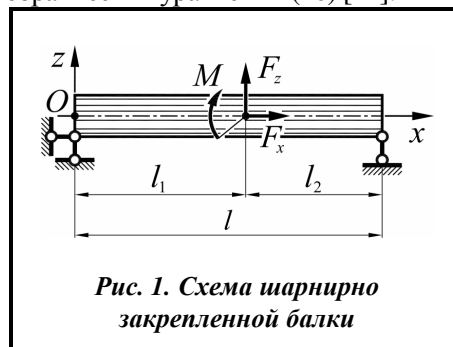


Рис. 1. Схема шарнирно закрепленной балки

Начальные параметры для второго расчетного участка можно определить подстановкой (1) и (3) в (11) [14].

Следует отметить, что в данном случае задача статически определимая и статические параметры могут быть определены из условий равновесия балки. Это позволяет выполнить косвенную проверку правильности выполненных преобразований.

Подстановкой полученных начальных параметров в соотношения (2)–(4) [14] можно получить выражения для определения всех компонент НДС на расчетных участках рассматриваемой балки.

Для примера определим прогиб нижнего волокна в сечении приложения нагрузки. Подставив (1) и (3) в последнее соотношение (9) [14], получим

$$w_{21}^{(1)} = \frac{l_1 l_2}{3bI B_2} \left(-\frac{z_1(l+l_2)}{2} F_x + \left(\frac{3D_2}{h} - l_1 l_2 \right) F_z + (l_2 - l_1) M \right). \quad (4)$$

В случае однородной ортотропной балки с прямоугольным поперечным сечением выражение (4) примет такой вид:

$$w_{21}^{(1)} = -\frac{l_1 l_2 (l+l_2)}{I b h^2 E_x} F_x + \frac{l_1 l_2 l}{b h^3 E_x} \left(\frac{4l_1 l_2}{l^2} + \left(\frac{E_x}{G_{xz}} - \nu_{xz} \right) \frac{h^2}{l^2} \right) F_z - \frac{4l_1 l_2 (l_2 - l_1)}{I b h^3 E_x} M. \quad (5)$$

Когда на балку действует только нормальная составляющая $F_z = -F$ в среднем сечении ($l_1 = l_2 = l/2$) на основе (5), получим соотношение

$$w_{21}^{(1)} = \frac{Fl^3}{48bB_2} \left(1 - \frac{12D_2}{hl^2} \right). \quad (6)$$

Равенство (6) подобно известному выражению для стрелы прогиба изотропной балки, но в отличие от него содержит составляющую $12D_2/(hl^2)$, которая определяет податливость материалов деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Для однородной ортотропной балки с прямоугольным поперечным сечением выражение (6) примет такой вид:

$$w_{21}^{(1)} = -\frac{Fl^3}{4E_x b h^3} \left(1 + \frac{E_x - \nu_{xz} G_{xz}}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right). \quad (7)$$

Балка с жестким закреплением торцов. Жесткое неподвижное закрепление левого торца

балки (рис. 2) смоделируем аналогично закреплению консоли в работах [12], [13], приняв равными нулю перемещения крайних точек сечения

$$u_{12}^{(1)} = 0, \quad u_{11}^{(1)} = 0, \quad w_{11}^{(1)} = 0. \quad (8)$$

В подвижном жестком закреплении правого торца балки продольные перемещения не равны нулю, однако равны их значения в крайних нижних и верхних волокнах. Тогда вместе с условием отсутствия продольной силы и поперечных перемещений запишем такие значения для конечных параметров:

$$N_{x2}^{(2)} = 0, \quad u_{12}^{(2)} = u_{22}^{(2)}, \quad w_{21}^{(2)} = 0. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) определяющая система уравнений (10) [14] примет вид

$$0 = N_{x1}^{(1)} - F_x, \quad Q_{z2}^{(2)} = Q_{z1}^{(1)} + F_z, \quad M_{y2}^{(2)} = l Q_{z1}^{(1)} + M_{y1}^{(1)} + l_2 F_z + M,$$

$$u_{22}^{(2)} = \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_1 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_1 l}{bB_2} M_{y1}^{(1)} - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_1 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_1 l_2 M}{bB_2},$$

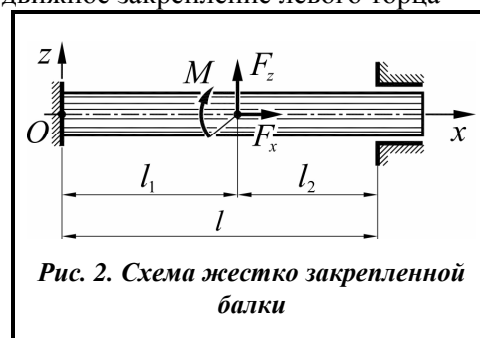


Рис. 2. Схема жестко закрепленной балки

$$u_{22}^{(2)} = \frac{l}{bB_0} N_{x1}^{(1)} + \frac{z_2 l^2}{2bB_2} Q_{z1}^{(1)} + \frac{z_2 l}{bB_2} M_{y1}^{(1)} - \frac{l_2 F_x}{bB_0} + \frac{z_2 l_2^2 F_z}{2bB_2} + \frac{z_2 l_2 M}{bB_2}, \quad (10)$$

$$0 = -\frac{hl^3 + 6D_2 l}{6hbB_2} Q_{z1}^{(1)} - \frac{l^2}{2bB_2} M_{y1}^{(1)} - \frac{hl_2^3 + 6D_2 l_2}{6hbB_2} F_z - \frac{l_2^2 M}{2bB_2}.$$

Решением системы (10) являются 6 неизвестных параметров

$$N_{x1}^{(1)} = F_x, \quad Q_{z1}^{(1)} = -l_2 \frac{(12D_2 - hl_2(l_2 + 3l_1))F_z - 6hl_1 M}{l(12D_2 - hl^2)},$$

$$M_{y1}^{(1)} = l_2 \frac{(6D_2 l_1 - hl_2 l(2l_2 + l_1))F_z - (12D_2 + hl(2l_1 - l_2))M}{l(12D_2 - hl^2)},$$

$$M_{y2}^{(2)} = l_1 \frac{(6D_2 - hl_1 l)l_2 F_z + (12D_2 + (3l_2 - l)hl)M}{l(12D_2 - hl^2)}, \quad (11)$$

$$Q_{z2}^{(2)} = l_1 \frac{(12D_2 - hl_1(3l_2 + l_1))F_z + 6hl_2 M}{l(12D_2 - hl^2)}, \quad u_{22}^{(2)} = \frac{l_1 F_x}{B_0 b}.$$

Аналогично предыдущему примеру получим соотношение для прогиба нижнего волокна балки в нагруженном сечении. Подставив (8) и (11) в последнее соотношение (9) [14], после преобразований имеем

$$w_{21}^{(1)} = \frac{(2(l_1 l_2)^2 h^2 + 6(12D_2 - h(l^2 + l_1 l_2))D_2)l_1 l_2 F_z + 3h^2(l_1 - l_2)(l_1 l_2)^2 M}{6B_2 b h l (12D_2 - hl^2)}. \quad (12)$$

Для случая, когда на балку действует только нормальная составляющая $F_z = -F$ в среднем сечении ($l_1 = l_2 = l/2$), соотношение (12) преобразуется к виду

$$w_{21}^{(1)} = \frac{Fl^3}{192bB_2} \left(1 - \frac{48D_2}{hl^2} \right). \quad (13)$$

Как и в предыдущем примере, соотношение (13) подобно известному выражению для стрелы прогиба изотропной балки и также содержит уточняющую составляющую.

Для однородной балки с прямоугольным сечением на основе (13) имеем

$$w_{21}^{(1)} = -\frac{Fl^3}{16bh^3 E_x} \left(1 + 4 \frac{E_x - \nu_{xz} G_{xz}}{G_{xz}} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right). \quad (14)$$

Сравнивая (7) и (14), можно отметить, что в случае жесткого закрепления торцов балки, при прочих одинаковых параметрах, влияние податливости материала деформациям поперечного сдвига и обжатия на прогибы будет в 4 раза выше.

Балка с жестким и шарнирным закреплением торцов.

Рассмотрим случай, когда левый торец балки жестко закреплен, а правый закреплен шарнирной подвижной опорой (рис. 3).

Таким закреплениям торцов будут соответствовать следующие значения начальных и конечных параметров:

$$u_{21}^{(1)} = 0, \quad u_{11}^{(1)} = 0, \quad w_{11}^{(1)} = 0, \quad (15)$$

$$N_{x2}^{(2)} = 0, \quad M_{y2}^{(2)} = 0, \quad w_{21}^{(2)} = 0.$$



Рис. 3. Схема комбинированного закрепления балки

Подставив (15) в систему (10) [14] и решив полученные уравнения, определим неизвестные параметры

$$\begin{aligned}
N_{x1}^{(1)} &= F_x, \quad Q_{z1}^{(1)} = -\frac{(6D_2 + h(l_2^2 - 3l^2))l_2 F_z + 3h(l_2^2 - l^2)M}{2l(3D_2 - hl^2)}, \\
M_{y1}^{(1)} &= -\frac{hl_2(l^2 - l_2^2)F_z + (h(l^2 - 3l_2^2) + 6D_2)M}{2(3D_2 - hl^2)}, \\
Q_{z2}^{(2)} &= \frac{3hl_1(l_2 + l)M + (6D_2 - hl_1(3l_2 + 2l_1))l_1 F_z}{2l(3D_2 - hl^2)}, \\
u_{22}^{(2)} &= \frac{(12D_2 - 4hl^2)l_1 F_x}{4bB_0(3D_2 - hl^2)} + l_1 \frac{(hl_1l - 6D_2)z_2 l_2 F_z - ((3l_2 - l)hl + 12D_2)z_2 M}{4bB_2(3D_2 - hl^2)}, \\
u_{21}^{(2)} &= \frac{(12D_2 - 4hl^2)l_1 F_x}{4bB_0(3D_2 - hl^2)} + l_1 \frac{(hl_1l - 6D_2)z_1 l_2 F_z - ((3l_2 - l)hl + 12D_2)z_1 M}{4bB_2(3D_2 - hl^2)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Соотношение для прогиба нижнего волокна балки в нагруженном сечении получим в виде

$$w_{21}^{(1)} = \frac{(3l + l_2)h^2 l_1^2 l_2^2 + 12(3D_2 - h(l^2 + l_1 l_2))l_2 D_2}{12B_2 b h l (3D_2 - hl^2)} l_1 F_z + \frac{h(l_1^2 - 2l_2^2) - 6D_2}{4B_2 b l (3D_2 - hl^2)} l_1^2 l_2 M. \tag{17}$$

Для случая, когда на балку действует только нормальная составляющая $F_z = -F$ в среднем сечении ($l_1 = l_2 = l/2$), (17) преобразуется как

$$w_{21}^{(1)} = \frac{Fl^3}{48bB_2} \left(1 - \frac{12D_2}{hl^2} + \frac{9hl^2}{16(3D_2 - hl^2)} \right). \tag{18}$$

Для однородной балки, используя (18), имеем

$$w_{21}^{(1)} = -\frac{Fl^3}{4bh^3 E_x} \left(1 + \left(\frac{E_x}{G_{xz}} - \nu_{xz} \right) \left(\frac{h}{l} \right)^2 - \frac{9}{16} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{E_x}{G_{xz}} - \nu_{xz} \right) \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right)^{-1} \right). \tag{19}$$

Аналогично могут быть получены решения других задач изгиба двухопорных многослойных балок с более сложным описанием опорных закреплений, которое учитывают, например, их податливость, осадку либо неточности монтажа.

Как пример реализации полученных соотношений рассмотрим результаты их применения при определении компонент НДС однородной и четырехслойной балок прямоугольного поперечного сечения $h \times b = 100 \times 15$ мм.

Апробация модели

Однородная балка. В этом случае рассмотрены балки из углепластика ($E_x = 142,8$ ГПа, $G_{xz} = 5,49$ ГПа, $\nu_{xz} = 0,32$), нагруженные силой $F_z = -17500$ Н в среднем сечении ($l_1 = l_2 = l/2$) при различных способах закреплений.

Для указанных исходных данных по соотношениям (7), (14) и (19) был выполнен расчет прогиба нижнего волокна балки в нагруженном сечении. Результаты расчета балок различной длины сведены в таблице.

Для сравнения в таблице приведены результаты моделирования МКЭ с использованием элементов типа Plate, результаты расчета с применением гипотезы плоских сечений ($G_{xz} = \infty$, $\nu_{xz} = 0$), а также результаты расчета по итерационной модели первого приближения [10].

Данные таблицы показывают небольшое расхождение между результатами расчета с использованием полученных соотношений, МКЭ и итерационной модели, которое уменьшается с увеличением отношения l/h . При этом использование гипотезы плоских сечений приводит к значительным погрешностям определения прогибов – от 22 до 80%, в зависимости от типа закреплений торцов.

Результаты расчета стрелы прогиба нижнего волокна балки, мм

Длина балки	Полученное решение	Моделирование МКЭ	Гипотеза плоских сечений	Итерационная модель
Шарнирно закрепленная балка (рис. 1)				
$l=5h$	-0,5177	-0,5399	-0,2553	-0,5516
$l=10h$	-2,5672	-2,6183	-2,0425	-2,6576
Жестко закрепленная балка (рис. 2)				
$l=5h$	-0,3262	-0,3216	-0,0638	-0,3377
$l=10h$	-1,0354	-1,0757	-0,5106	-1,1033
Балка с комбинированным закреплением (рис. 3)				
$l=5h$	-0,4034	-0,4085	-0,1117	-0,3964
$l=10h$	-1,4877	-1,5414	-0,8936	-1,4973

Четырехслойная балка. Принято, что четырехслойная балка длиной $l=10h$ имеет комбинированное закрепление торцов (рис. 3) и нагружена силой $F_z = -17500$ Н в сечении $x=l_1=4h$. Строение и размеры поперечного сечения балки приведены на рис. 4.

Для материалов слоев приняты следующие значения упругих характеристик:

- P_1 (алюминиевый сплав) – $E_x^{[1]} = 70$ ГПа, $G_{xz}^{[1]} = 26,9$ ГПа, $\nu_{xz}^{[1]} = 0,34$;
- P_2 (древесина) – $E_x^{[2]} = 12,1$ ГПа, $G_{xz}^{[2]} = 1,21$ ГПа, $\nu_{xz}^{[2]} = 0,49$;
- P_3 (стеклопластик) – $E_x^{[3]} = 36,8$ ГПа, $G_{xz}^{[3]} = 4,5$ ГПа, $\nu_{xz}^{[3]} = 0,351$;
- P_4 (углепластик) – $E_x^{[3]} = 142,8$ ГПа, $G_{xz}^{[3]} = 5,49$ ГПа, $\nu_{xz}^{[3]} = 0,32$.

Положение центра жесткости и характеристики жесткости сечения получены с использованием соотношений, приведенных в [14]

$$z_{B_1} = 58,41 \text{ мм}, B_2 = -5298,64 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}, D_2 = -3472,31 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

С использованием соотношений (2)–(4), (11) из [14] и полученных выше соотношений (15) и (16) имеем выражения для компонент НДС расчетных участков балки, которые объединялись в общие выражения для всей балки согласно (6) [14].

Распределения напряжений в сечении $x=h$ для многослойной балки приведены на рис. 5, где также показано распределение продольного модуля упругости. Штриховой линией нанесены графики для напряжений, полученных с применением гипотезы плоских сечений ($G_{xz} = \infty, \nu_{xz} = 0$).

Максимальные значения напряжений σ_x в нижнем и верхнем слоях отличаются от полученных при расчете МКЭ соответственно на 6 и 0,8%. Использование гипотезы плоских сечений приводит к увеличению значений напряжений на 18 и 26%.

Это можно объяснить увеличением расчетного значения опорного реактивного момента в жестком закреплении при использовании гипотезы плоских сечений. Полученные соотношения дают значение изгибающего момента $M_{y1} = 3043$ Н·м, а применение гипотезы плоских сечений приводит к его увеличению на 10,4% до $M_{y1} = 3360$ Н·м.

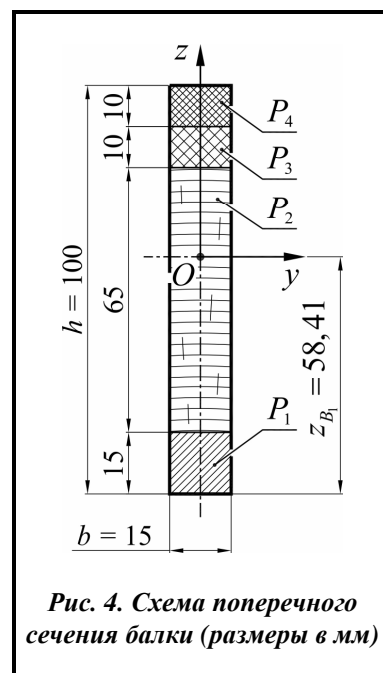


Рис. 4. Схема поперечного сечения балки (размеры в мм)

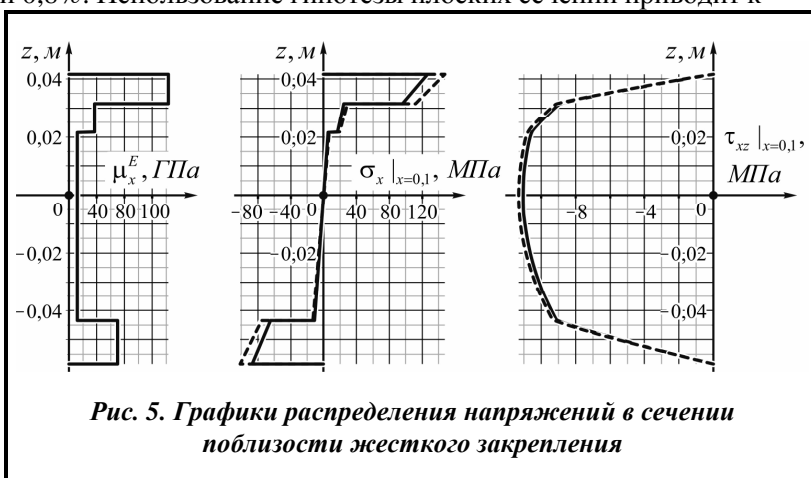


Рис. 5. Графики распределения напряжений в сечении поблизости жесткого закрепления

Отдельные распределения перемещений приведены на рис. 6, где штриховой линией показаны перемещения, полученные с применением гипотезы плоских сечений.

График для продольных перемещений (рис. 6, а) показывает искривление поперечных сечений под действием поперечной силы, что невозможно предсказать с использованием гипотезы плоских сечений. Сравнение полученной величины продольных перемещений в крайних волокнах балки с результатами моделирования МКЭ

показывает небольшую разницу (до 7%). Однако вблизи жесткого закрепления и нагруженного сечения разница с результатами расчета МКЭ возрастает.

Прогиб нижнего волокна балки (рис. 6, б) в нагруженном сечении согласно полученным соотношениям составил 3,61 мм, что больше значения, полученного при моделировании МКЭ ($w|_{x=l_1, z=z_1} = 3,55$ мм) всего на 1,7%. В то же время применение гипотезы плоских сечений приводит к уменьшению прогиба на 57%, до $w|_{x=l_1, z=z_1} = 1,52$ мм.

С использованием полученных аналитических соотношений для перемещений построена форма балки после деформации с увеличением перемещений в 40 раз (рис. 7). Для сравнения на рис. 7, б приведена форма балки после деформации, построенная по соотношениям для перемещений, которые получены с использованием гипотезы плоских сечений.

Излом деформированных волокон балки в нагруженном сечении на рис. 7, а и смещение максимума прогиба балки является следствием упрощения кинематических условий совместного деформирования расчетных участков, а также жесткого закрепления. Следует отметить, что такое распределение перемещений, в целом, оказывается значительно ближе к результатам расчета МКЭ и итерационной модели, чем полученное с использованием гипотезы плоских сечений (рис. 7, б). Уточнить картину распределения перемещений можно усовершенствованием соответствующих кинематических условий. Однако это, очевидно, приведет к усложнению окончательных соотношений.

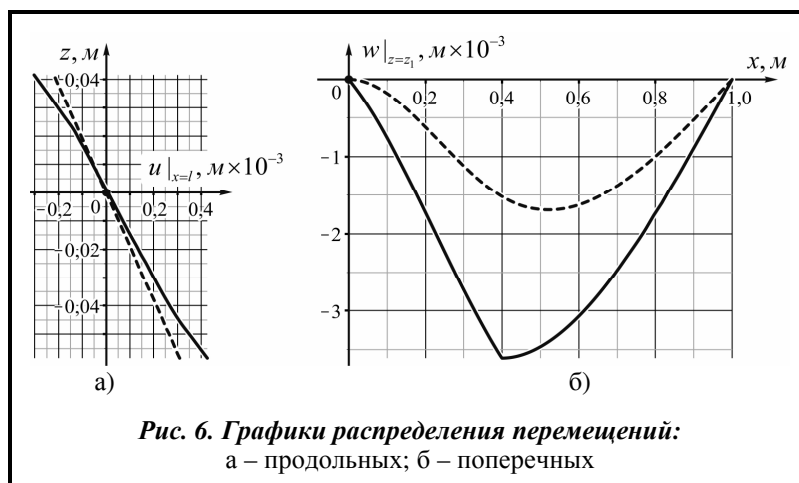


Рис. 6. Графики распределения перемещений:
а – продольных; б – поперечных



Рис. 7. Форма балки после деформации
(перемещения увеличены в 40 раз):
а – согласно построенной модели;
б – с учетом гипотезы плоских сечений

Выводы

Таким образом, на основе построенной модели плоского изгиба двухопорных многослойных балок под действием сосредоточенной нагрузкой получены частные решения для основного НДС балок с различными комбинациями закреплений их крайних сечений.

Полученные соотношения апробированы при решении тестовых задач изгиба однородной ортотропной и четырехслойной балок с различными типами закрепления торцов. Сравнение полученных результатов для отдельных компонент НДС с результатами моделирования МКЭ и расчета по итерационной модели показывает хорошую сходимость за исключением зон вблизи нагруженных и закрепленных сечений. При этом использование гипотезы плоских сечений приводит к значительным

погрешностям определения перемещений, а для статически неопределимых задач – также внутренних силовых факторов и напряжений.

Продемонстрированные подходы к решению задач изгиба без особого труда можно использовать при построении решений более сложных прикладных задач изгиба многослойных балок с различными комбинациями нагружения и закрепления.

Литература

1. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. *Обзор. Механика композит. материалов*. 1998. № 3. С. 333–348.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 374 с.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. *Итоги науки и техники*. М.: Наука, 1972. Т. 5. 271 с.
6. Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Ванин Г. А., Бабич И. Ю. Механика элементов конструкций: В 3 т. Т. 2: Механика композитных материалов и элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1983. 484 с.
7. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
8. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1987. 200 с.
9. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. *Механика композит. материалов*. 2003. Т. 39. № 1. С. 2–24. <https://doi.org/10.1023/A:1022979003150>
10. Горик О. В., Пискунов В. Г., Чередников В. М. Механіка деформування композитних брусів. Полтава; Київ: АСМІ, 2008. 402 с.
11. Goryk A. V. Modeling transverse compression of cylindrical bodies in bending. *Intern. Appl. Mech.* 2001. Vol. 37. Iss. 9. P. 1210–1221. <https://doi.org/10.1023/A:1013294701860>
12. Goryk A. V., Koval'chuk S. B. Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end. *Mech. Composite Materials*. 2018. Vol. 54. Iss. 2. P. 179–190.
13. Goryk A. V., Koval'chuk S.B. Solution of a transverse plane bending problem of a laminated cantilever beam under the action of a normal uniform load. *Strength of Materials*. 2018. Vol. 50. Iss. 3. P. 406–418. <https://doi.org/10.1007/s11223-018-9984-7>
14. Kovalchuk S. B., Gorik A. V. Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction. *J. Mech. Eng.* 2018. Vol. 21. No. 4. P. 30–36.

Поступила в редакцию 26.09.2018