

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БІЛЯ ТРІЩИНИ, ЩО ВІДХОДИТЬ ВІД ВКЛЮЧЕННЯ ПІД ВПЛИВОМ ХВИЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

А. С. Мішарін
as.mishandr@gmail.com

В. Г. Попов, д-р фіз.-
мат. наук
dr.vg.popov@gmail.com

Національний
університет
«Одеська морська
академія»,
65029, Україна, м. Одеса,
вул. Дідріхсона, 8

Сучасні елементи будівельних конструкцій і деталі машин досить часто містять конструктивні елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Армуючі елементи композитних матеріалів теж можуть являти собою тонкі жорсткі включення. Але як показують дослідження, тонкі жорсткі включення спричиняють значну концентрацію напружень у навколишньому середовищі, яка може призвести до утворення тріщин на його продовженні. Задачі з визначення напруженого стану в околі складних дефектів розв'язувались, як правило, у статичній постановці і для випадку прямолінійних дефектів. Це пов'язано з труднощами, які виникають під час їх розв'язання поширеним методом граничних інтегральних рівнянь, що полягає у зведенні подібних задач до сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Такі рівняння вимагають створення спеціальних методів їхнього числового розв'язання. Останнім часом все більше з'являється робіт, де для сингулярних інтегралів з нерухомими особливостями використовуються спеціальні квадратурні формули, наприклад, для тріщин або включень у вигляді ламаних або розгалужених дефектів. В цих роботах запропоновано колокаційний метод, який враховує справжню особливість розв'язку, а для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями використано спеціальні квадратурні формули. Задачі з визначення напруженого стану навколо дефектів, що являють собою тонке включення, від краю якого під деяким кутом відходить тріщина, майже не розв'язувались. Метою цієї роботи є дослідження напруженого стану біля тріщини, що відходить від включення під впливом хвилі поздовжнього зсуву. Сформульована задача приведена до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями відносно невідомих стрибків напружень і переміщень на поверхні дефекту. Для розв'язання цієї системи використовується аналогічний колокаційний метод. Показано залежності зміни безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від безрозмірного значення хвильового числа у випадку поширення хвилі під різними кутами. Для числових експериментів бралися різні значення кута між включенням і тріщиною. У всіх випадках знайдено значення безрозмірного хвильового числа, за якого значення КІН для тріщини досягають максимуму. У разі зростання кута між включенням і тріщиною значення КІН для включення, до певних значень частоти коливань, зменшуються. Для випадку, коли дефекти лежать на одній прямій, значення КІН для включення найменші. І навпаки, коли кут між дефектами зростає, значення КІН для тріщини також зростають. В цілому, внаслідок складності хвильового поля, створеного відбиттям хвиль від дефекту, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація дефекту.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності напружень, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, гармонічні коливання, нерухома особливість, включення, тріщина.

Вступ

У сфері будівельних технологій і машинобудуванні конструкції і деталі машин досить часто містять елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Але як показують дослідження [1], тонкі жорсткі включення спричиняють значну концентрацію напружень у навколишньому середовищі, яка може призвести до утворення тріщин на його продовженні. Задачі з визначення напруженого стану в околі складних дефектів розв'язувались, як правило, у статичній постановці і для випадку прямолінійних дефектів в роботах [2 – 5]. Це пов'язано з труднощами, які виникають під час їх розв'язання поширеним методом граничних інтегральних рівнянь, що полягає у зведенні подібних задач до сингулярних інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Подібні задачі в статичній постановці розв'язувались, але справжня особливість розв'язків або ігнорувалась, або до інтегралів з нерухомими особливостями застосовувались формули Гаусса-Якобі, як наслідок досить повільна збіжність числових розв'язків: Останнім часом з'являється все більше робіт, в яких для сингулярних інтегралів з нерухомими особливостями використовуються спеціальні квадратурні формули, наприклад, для тріщин або включень у вигляді ламаних або розгалужених дефектів [6 – 8]. В

цих роботах запропоновано колокаційний метод, який враховує справжню особливість розв'язку, а для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями використані спеціальні квадратурні формули. Задачі з визначення напруженого стану навколо дефектів, що являють собою тонке включення, від краю якого під деяким кутом відходить тріщина, майже не розв'язувались. Метою цієї роботи є дослідження напруженого стану біля тріщини, що відходить від включення у разі впливу хвилі поздовжнього зсуву. Сформульована задача зведена до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями відносно невідомих стрибків напружень і переміщень на поверхні дефекту. Для розв'язання цієї системи використовується колокаційний метод, що є аналогічним застосованому у роботах [6 – 8].

Постановка задачі

Розглядається пружне ізотропне середовище, яке знаходиться у стані антиплоскої деформації. В середовищі є наскрізний дефект у вигляді абсолютно жорсткого включення, від кінця якого під довільним кутом відходить тріщина. Включення і тріщина в площині Oxy займають відрізки $2d_l$ і утворюють з віссю Ox кути α_l , $l=1,2$ (рис. 1).

З дефектами взаємодіє плоска хвиля поздовжнього зсуву, яка викликає в тілі такі переміщення вздовж осі Oz :

$$w_0(x, y) = A e^{i\kappa_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G},$$

де ω – частота коливань, ρ і G – густина і модуль зсуву тіла. Залежність від часу визначається множителем $e^{-i\omega t}$, який

тут і надалі пропускаємо. За таких умов єдина відмінна від 0 z – компонента вектора переміщень задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа в системі координат Oxy .

Для формулювання граничних умов на дефекті з тріщиною і включенням зв'яжемо локальну систему координат $O_l x_l y_l$, $l=1,2$, центр якої збігається з серединою відповідного дефекту (рис. 1). Зв'язок між системами координат задається формулами

$$\begin{cases} x = (d_l + (-1)^l x_l) \cos \alpha_l - (-1)^l y_l \sin \alpha_l, \\ y = (d_l + (-1)^l x_l) \sin \alpha_l + (-1)^l y_l \cos \alpha_l, \\ x_l = (-1)^l x \cos \alpha_l + (-1)^l y \sin \alpha_l - (-1)^l d_l, \\ y_l = (-1)^{l-1} x \sin \alpha_l + (-1)^l y \cos \alpha_l, \quad l=1,2. \end{cases} \quad (2)$$

Нехай $w_l(x_l, y_l)$, $l=1,2$ отримані з $w(x, y)$ в результаті переходу до локальних координат за формулами (2). Граничні умови на тріщині сформулюємо виходячи з того, що на її берегах відсутні напруження. З цього випливає рівність

$$\tau_{y_2 z}(x_2, 0) = 0, \quad x_2 \in [-d_2, d_2]. \quad (3)$$

На поверхні тріщини переміщення $w_2(x_2, y_2)$ мають розрив з невідомим стрибком, для якого вводиться позначення

$$w_2(x_2, +0) - w_2(x_2, -0) = \chi_2(x_2), \quad \chi_2(d_2) = 0, \quad x_2 \in [-d_2, d_2]. \quad (4)$$

На включенні за умови ідеального зчеплення повинна виконуватися рівність

$$w_1(x_1, 0) = a, \quad x_1 \in [-d_1, d_1], \quad (5)$$

де a – невідома амплітуда поздовжніх (вздовж осі Oz) коливань включення.

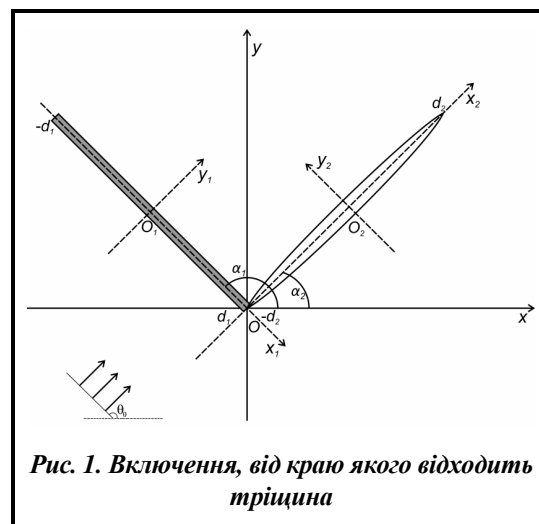


Рис. 1. Включення, від краю якого відходить тріщина

На поверхні включення напруження $\tau_{y_1z}(x_1, y_1)$ мають розрив з невідомим стрибком, для якого вводиться позначення

$$\tau_{y_1z}(x_1, +0) - \tau_{y_1z}(x_1, -0) = \chi_1(x_1), x_1 \in [-d_1, d_1]. \quad (6)$$

Невідома амплітуда коливань включення визначається з рівняння

$$-m\omega^2 a = \int_{-d_1}^{d_1} \chi_1(\eta) d\eta, m = 2d_1 \rho_v h.$$

За таких умов потрібно визначити напружений стан в околі дефекту.

Метод розв'язання

Для розв'язання цієї задачі для тріщини і включення у системі координат, зв'язаної з дефектами, будуються розривні розв'язки рівняння (1) зі стрибками (4), (6). Ці розв'язки знаходяться за формулами

$$w_1^d(x_1, y_1) = \int_{-d_1}^{d_1} \frac{\chi_1(\eta)}{G} r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta, \quad w_2^d(x_2, y_2) = \int_{-d_2}^{d_2} \chi_2(\eta) \frac{\partial}{\partial y_2} r_2(\eta - x_2, y_2) d\eta, \quad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right), l = 1, 2, \quad H_0^{(1)}(x) - \text{функція Ганкеля.}$$

Після цього переміщення дифракційного поля в системі Oxy подаються у вигляді

$$w(x, y) = w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y),$$

де $w_l^g(x, y), l = 1, 2$ отримуються за формулами (7) після перетворення координат (2). Щоб остаточно визначити переміщення і напруження у напівпросторі, необхідно знайти невідомі стрибки переміщень і напружень. Для цього слід використати умови (3), (5).

Після sprawdження граничних умов на дефектах отримуємо систему сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків. Ця система після відокремлення сингулярних складових ядер і переходу до проміжку $[-1, 1]$ має вигляд

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_1(\tau, \zeta) \right] d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) g_2(1 + \tau, 1 - \zeta) d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_2(\tau, \zeta) d\tau = f_1(\zeta), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_3(\tau, \zeta) \right] d\tau + \frac{\kappa_0^2 \gamma_2^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) [\ln|\tau - \zeta| + R_4(\tau, \zeta)] d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [g_1(1 - \tau, 1 + \zeta) + R_5(\tau, \zeta)] d\tau = f_2(\zeta), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [\ln|1 + \tau| + R_6(\tau)] d\tau + \frac{\gamma_2^2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_7(\tau) d\tau = f_3, \end{cases} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \chi_1(\eta)/G, \quad \varphi_2(\tau) = \chi_2(\eta)/d_2, \quad \varphi_2'(\tau) = \chi_2'(\eta), \\ g_l(x, y) &= x/p_l(x, y), \quad p_l(x, y) = \gamma_l^2 y^2 - 2\gamma_l yx \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + x^2, \quad l = 1, 2, \\ f_1(\zeta) &= -A_0 i \kappa_0 \cos(\alpha_1 - \theta_0) e^{i\kappa_0 \gamma_1 (1 - \zeta) \cos(\alpha_1 - \theta_0)}, \\ f_2(\zeta) &= A_0 i \kappa_0 \sin(\alpha_2 - \theta_0) e^{i\kappa_0 \gamma_2 (1 + \zeta) \cos(\alpha_1 - \theta_0)}, \\ f_3 &= -A_0 e^{i\kappa_0 \gamma_1 \cos(\alpha_1 - \theta_0)}, \quad A_0 = A/d, \quad d = \max(d_1, d_2). \end{aligned}$$

Як можна бачити, функції $g_l(x, y)$ мають особливості за $\tau = \pm 1, \zeta = \mp 1$.

Наближений розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь

Наявність у сингулярної частини системи (8) нерухомих особливостей при $\tau = 1, \zeta = -1$ і $\tau = -1, \zeta = 1$ впливає на поведінку її розв'язків у околі точок $\zeta = \pm 1$. Асимптотика розв'язків в околі цих точок визначається за методикою, викладеною у [9]. В результаті встановлено, що невідомі функції необхідно розшукувати у вигляді

$$\varphi_1(\tau) = (1 + \tau)^{-1/2} (1 - \tau)^{-\delta} \psi_1(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = (1 + \tau)^{-\delta} (1 - \tau)^{-1/2} \psi_2(\tau), \quad (9)$$

де показник особливості визначається рівністю

$$\delta = \frac{2\beta - 3\pi}{2(\beta - 2\pi)}, \quad \beta = |\alpha_1 - \alpha_2|, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Щоб функції з такими особливостями були розв'язком системи (8), має виконуватися рівність

$$\psi_1(1) = (\gamma_1/\gamma_2)^{-\delta} \psi_2(-1),$$

а функції $\psi_l(\tau)$, $l = 1, 2$, вважаються такими, що задовольняють умову Гельдера на проміжку $[-1, 1]$. Подальше розв'язання ґрунтується на апроксимації цих функцій інтерполяційними багаточленами

$$\psi_l(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{P_{ln}(\tau)}{(\tau - \tau_{lm}) [P_{ln}(\tau_{lm})]^l}, \quad (10)$$

$\psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm})$, $l = 1, 2$, $P_{ln}(\tau) = P_n^{-\delta, -1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$ – багаточлени Якобі, а τ_{lm} – їхні корені.

Для інтегралів з ядром Коші застосуємо такі квадратурні формули [10]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_l^{(l-1)}(\tau)}{\tau - \zeta_{lk}} d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{A_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_{lk}}, \quad (11)$$

$l = 1, 2, k = 1, 2, \dots, n-1$, де ζ_{lk} – нулі функцій Якобі другого роду $J_n^{-\delta, -1/2}(\tau)$ і $J_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$, а A_{lm} – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса-Якобі [11].

Далі аналогічні формули необхідно отримати для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_l = \int_{-1}^1 \varphi_l^{(l-1)}(\tau) g_l(1 + (-1)^l \tau, 1 - (-1)^l \zeta) d\tau, \quad l = 1, 2. \quad (12)$$

Якщо $1 - \zeta > \varepsilon, 1 + \zeta > \varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$ – деяке наближене число, то функції $g_l(\tau, \zeta)$ є нескінченно-гладкими і до інтегралів (12) можна застосувати квадратурні формули Гаусса-Якобі. Головну складність становить обчислення цих інтегралів при $1 \pm \zeta \rightarrow 0$. Для цього використовуються подання (9), (10) і виконуються такі перетворення з підінтегральними функціями:

$$\begin{aligned} \frac{g_l(\tau, \zeta)}{\tau - \tau_{lm}} &= \frac{g_l(1 + (-1)^l \tau_{lm}, 1 - (-1)^l \zeta)}{\tau - \tau_{lm}} - \\ &- (-1)^l \frac{g_l(1 + (-1)^l \tau, 1 - (-1)^l \zeta) (1 + (-1)^l \tau_{lm})}{p_l(1 + (-1)^l \tau_{lm}, 1 - (-1)^l \zeta)} + \\ &+ \frac{(-1)^l \gamma_l^2 (1 - (-1)^l \zeta)^2}{p_l(1 + (-1)^l \tau_{lm}, 1 - (-1)^l \zeta) p_l(1 + (-1)^l \tau, 1 - (-1)^l \zeta)}, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Інтеграли від функцій, що входять до подання (13), знаходяться методом, що базується на застосуванні теореми про згортку для інтегрального перетворення Мелліна. Остаточні формули для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями за $\zeta = \zeta_{lk}$ мають вигляд

$$E_l = (-1)^l \sum_{m=1}^n \psi_{lm} S_{mk}^l, \quad l = 1, 2, \quad (14)$$

де

$$S_{mk}^l = \sum_{p=1}^3 B_p^l(\tau_{lm}, \zeta_{jk}) h_p^l(r_l^k), \varepsilon > r_l > 0, r_l = \gamma_l(1 + (-1)^l \zeta_{lk}) / (2\gamma_{3-l}),$$

$$B_1^l(x, y) = \frac{A_l^m (\gamma_l / \gamma_{3-l})^2 (1 + (-1)^l x) \cos \beta}{p_l(x, y)}, h_1^l(y) \equiv 1,$$

$$B_p^l(x, y) = \frac{[(1 + (-1)^l x)^{3-p} (\gamma_l / \gamma_{3-l})^2 y^2 + ((-1)^l p_l(x, y))^{3-p}] \cos \beta}{p_l(x, y) [P_m(x)]^l},$$

$$h_p^l(y) = -\frac{2^{-\delta-0.5} \gamma_{3-l}^2 \Gamma(n+0.5)}{\gamma_l^2 \sin \beta} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi \delta)} \sum_{s=0}^{\infty} c_{sp}^l y^{s-\delta} - \sum_{s=0}^{\infty} d_{sp}^l y^s \right),$$

$$c_{sp}^l = \frac{\Gamma(-\delta + s + n + 1) \sin(\beta(-\delta + s + p - 2))}{s! \Gamma(s - \delta + 1) \Gamma(n - s + 0.5)},$$

$$d_{sp}^l = \frac{(-1)^{s+1} \Gamma(-\delta + s + p - 2) \sin(\beta(s + 1))}{(s + p - 2)! \Gamma(-\delta - s + n + 0.5)}, \quad l = 1, 2, p = 2, 3.$$

Таким чином, за $1 + \zeta_{1k} \rightarrow 0$ і $1 - \zeta_{2k} \rightarrow 0$ інтеграли (12) подаються швидко збіжними степеневими рядами.

Для інтеграла з логарифмічною функцією в результаті інтегрування частинами та використання подання похідною (9) отримуємо таку квадратурну формулу:

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \ln|\tau - \zeta_{2k}| dx = \sum_{m=1}^n A_{2m} \Psi_{2m} B_{km} \quad (15)$$

$$B_{km} = -(1 + \zeta_{2k})(\ln|1 + \zeta_{2k}| - 1) - (\tau_{2m} - \zeta_{2k})(\ln|\tau_{2m} + \zeta_{2k}| - 1).$$

Для обчислення інтеграла, що містить безпосередньо невідому функцію $\varphi_2(\tau)$, необхідно знайти її наближене значення за допомогою рівності

$$\varphi_2(\tau) = -\int_{\tau}^1 \varphi_2'(x) dx.$$

Далі використовується подання для похідної (9), а також тотожність Дарбу-Крістофеля. Внаслідок цього після інтегрування отримано вираз

$$\varphi_2(\tau) = -(1 - \tau)^{1/2} \sum_{m=1}^n A_{2m} S_{km}(\tau), \quad (16)$$

$$S_{km} = 2^{1-\delta} F\left(\delta, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) / \sigma_0^2 + (1 + \tau)^{1-\delta} \sum_{j=1}^{n-1} P_j^{-1/2, -\delta}(\tau_{2m}) P_{j-1}^{1/2, 1-\delta}(\tau) / 2j\sigma_j^2.$$

Подання (16) є основою для таких квадратурних формул з невідомою функцією $\varphi_2(\tau)$:

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(x) R(\tau, \zeta_{lk}) dx = \sum_{m=1}^n A_{2m} \Psi_{2m} U_{mi}^2(\tau_{0i}) R(\tau_{2m}, \zeta_{lk}), \quad (17)$$

$$U_{mi}^2(\tau_{0i}) = -\sum_{i=1}^n A_{0i} S_{km}(\tau_{0i}), A_{0i} = \frac{2\sqrt{2}}{(1 - \tau_{0i}^2) ((P_n^{1/2, 0}(\tau_{0i}))')^2}, \quad l = 1, 2,$$

де $P_n^{1/2, 0}(\tau)$ - багаточлени Якобі, а τ_{0i} - їхні корені.

Застосування квадратурних формул (11), (14), (15), (17), а також формул Гаусса-Якобі приводить до заміни системи інтегро-диференціальних рівнянь (8) системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій ψ_l , $l = 1, 2$ у вузлах інтерполяції.

Для механіки руйнувань найбільший інтерес являють собою коефіцієнти інтенсивності напружень

$$K_1 = \lim_{\eta \rightarrow d_1+0} \sqrt{d_1 + \eta} \cdot \chi_1(\eta), K_2 = \lim_{x_2 \rightarrow d_1+0} \sqrt{x_2 - d_2} \cdot \tau_{y_2 z}^d(x_2, 0).$$

Через розв'язок системи наближені значення КІН визначаються за формулами

$$K_1 = -G\sqrt{d_1} 2^{-\delta} \psi_1(-1), K_2 = -G\sqrt{d_2} 2^{-1-\delta} \psi_2(1).$$

Аналіз числових результатів і висновки

Розглянуто дефекти однакової довжини $d_l = d, l=1,2$, що виходять з початку координат і розташовані симетрично відносно осі Oy . Падаюча хвиля поширюється вздовж додатного напрямку осі Ox . На рис. 2 показані залежності зміни безрозмірних значень КІН ($k_l = K_l / G\sqrt{d_l}, l=1,2$) від безрозмірного значення хвильового числа κ_0 у випадку поширення хвилі під кутом $\theta_0 = 90^\circ$, а на рис. 3 – під $\theta_0 = 270^\circ$. Кут між дефектами брався послідовно $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ і 175° , що відповідає кривим на рисунках під номерами 1, 2, 3, 4, 5.

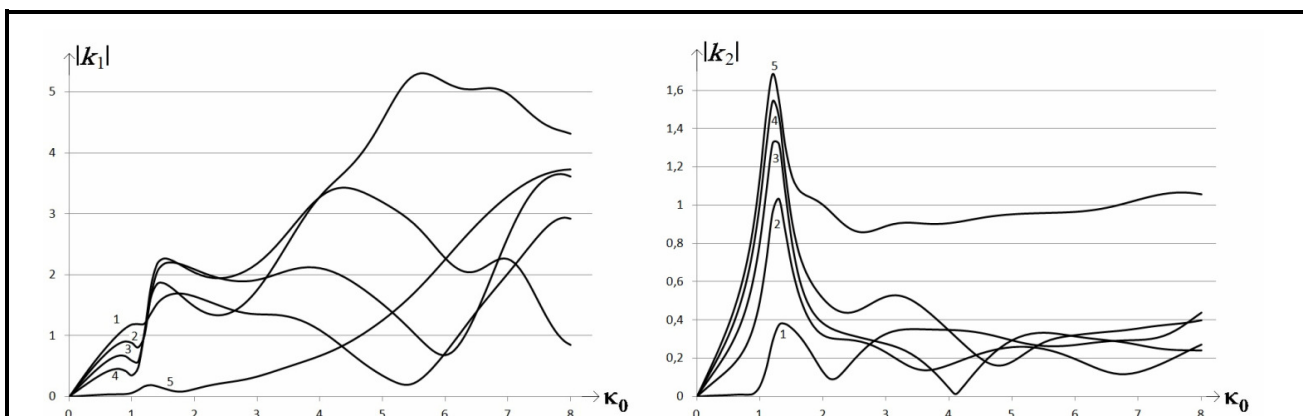


Рис.2. Залежність КІН для включення і тріщини від хвильового числа під впливом поздовжнього зсуву (кут $\theta_0=90^\circ$)

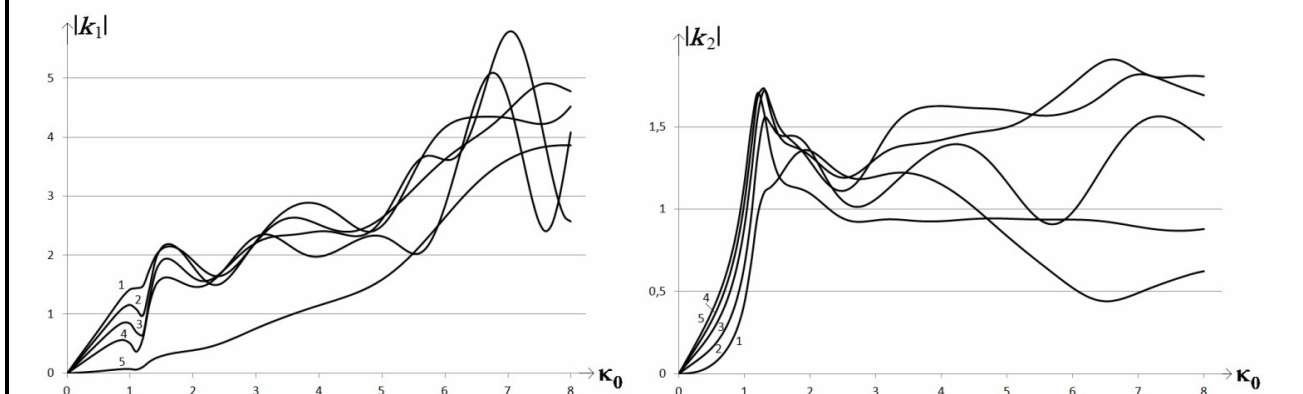


Рис.3. Залежність КІН для включення і тріщини від хвильового числа під впливом хвилі поздовжнього зсуву (кут $\theta_0=270^\circ$)

У всіх випадках знайдено значення безрозмірного хвильового числа, за якого значення КІН для тріщини досягають максимуму. У разі зростання кута β між включенням і тріщиною значення КІН для включення, до певних значень частоти коливань, зменшуються. Для випадку, коли дефекти лежать на одній прямій, значення КІН для включення найменші. Видно, що за невеликих частот ($\kappa_0 \leq 2$), зі збільшенням кута β , зростають і значення КІН для тріщини, а найбільші значення спостерігаються, коли кут прямує до 180° . В цілому, внаслідок складності хвильового поля, створеного відбиттям хвиль від дефектів, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація дефекту.

Література

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослід.-видав. центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Сташук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288с.
3. Бережницький Л. Т., Сташук Н. Г. Коэффициенты интенсивности напряжений около трещины на продолжении линейного жесткого включения. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1981. №11. С. 30–46.
4. Бережницький Л. Т., Сташук Н. Г., Громьяк Р. С. К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения. *Проблемы прочности.* 1989. № 2. С. 68–71.
5. Акопян В. Н., Амирджян А. А. Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной. *Изв. НАН Армении. Механика.* 2015. Т. 68 №1. С.25–36.
6. Попов В. Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях по вздовжнього зсуву. *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фізико-мат. науки.* 2013. Вип. 3. С. 205–208.
7. Попов В. Г. Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі позовжнього зсуву. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2015. 58. №1. С. 112–120.
8. Литвин О. В. Взаємодія гармонічної хвилі позовжнього зсуву з v-подібним включенням. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. 60. №1. С. 96–106.
9. Попов В. Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде. *Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости.* – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1986. С. 121–127.
10. Андреев А. Р. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами. *Изв. РАН Механика твердого тела.* 2005. №1. С. 126–146.
11. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

Надійшла до редакції 11.09.2018