А.А.Мартынюк[1], Е.А.Бабенко[2]

О РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

[1] *Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: amartynyuk@voliacable.com*

[2] *Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, бульвар Шевченко, 81, 18000, Черкассы, Украина; e-mail: kutsokon78@gmail.com*

Abstract. A problem of robust stabilization of motion of the bilinear systems under the interval initial conditions is solved by application of the integral inequalities. As an example, a model of car motion under braking is considered.

Key words: bilinear system, interval initial conditions, integral inequalities, robust stabilization.

Введение.

Некоторые задачи механики (управление электромотором, работа манипулятора и др.) описываются билинейными системами дифференциальных уравнений (см. [7, 8, 10, 16, 18] и библиографию там). Билинейные системы были предметом ряда работ (см. [5, 14] и библиографию там), но при этом начальные условия рассматривались обычными. Проблема устойчивости и стабилизации движения при интервальных начальных условиях движения, которые могут быть сколь угодно большими, не сводится к задаче об устойчивости и стабилизации в классической постановке. В то же время начальные данные движения во многих инженерных задачах являются интервальными. Это обстоятельство стимулирует интерес к исследованию устойчивости и стабилизации движения при интервальных начальных условиях [6, 11].

Наряду с методом функций Ляпунова [9, 13] исследование интервальных билинейных систем при интервальных начальных данных движения допускает применение других методов общей теории уравнений.

В частности, в данной работе предлагается решение задачи стабилизации движения билинейной системы на основе метода интегральных неравенств.

1. Предварительные результаты.

Напомним некоторые определения из интервального анализа, следуя работам [3, 5].

Интервалом a называется множество вида: $a := [\underline{a}, \overline{a}] = \left\{ x \in R \;\middle|\; \underline{a} \le x \le \overline{a} \right\}$.

На множестве интервалов вводятся операции сложения, вычитания, умножения, деления. Полученная таким образом алгебраическая структура называется классической интервальной арифметикой.

Определение 1. Абсолютной величиной (модулем) интервала a называется величина $|a| = \max\left\{ |\underline{a}|, |\overline{a}| \right\}$.

Определение 2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые интервалы, тогда $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ называется интервальным вектор-столбцом, а $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – интервальным вектор-строкой.

Наряду с обозначением $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ используется также следующее: $[\underline{a}, \overline{a}]$, где $\underline{a}$ обозначает вектор-столбец (или вектор-строку), образованный левыми концами интервалов a_1, a_2, ..., a_n, $\overline{a}$ – вектор из правых концов.

Существует несколько способов введения нормы интервального вектора. Ниже будем пользоваться таким определением:

$$\|a\|_I := \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

где $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ – интервальный вектор. При этом предполагаем, что норма «обычных», точечных, векторов находится по формуле $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Можно показать, что для любого точечного вектора $x \in a$, где a – интервальный вектор, имеет место оценка $\|x\| \le \|a\|_I$.

Во многих случаях важно иметь эффективную оценку постоянной $\tilde{N}$ в неравенстве типа $\left\|e^{Ht}\right\| \le \tilde{N}e^{\sigma t}$ $\quad (t \in [0, \infty))$, где $\tilde{N} > 0$ и $\sigma < 0$. Учитывая результаты работ [1, 2], укажем один способ такой оценки. Пусть $\rho_j = \alpha_j + i\beta_j$ – собственные значения матрицы H и $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Тогда верна оценка

$$\left\|e^{Ht}\right\| \le \varphi(t)e^{\alpha_0 t}, \tag{1}$$

где $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2\|H\|)^k}{k!} t^k$ – полином по t степени $n-1$. Неравенство (1) перепишем в виде

$$\left\|e^{Ht}\right\| \le \xi(t)e^{(\alpha_0+\alpha)t};\ \xi(t) = \varphi(t)e^{-\alpha t}.$$

Пусть $\alpha_0 < 0$ и $\alpha > 0$ выбрано так, что $\alpha_0 + \alpha < 0$. Тогда функция $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и поэтому $\xi(t)$ имеет наибольшее значение на полуоси $[0, \infty)$, которое может быть вычислено по обычным правилам определения экстремума дифференцируемой функции. В следующей лемме показано, как это сделать.

Лемма 1. При выполнении сделанных выше предположений, справедлива оценка:

$$\left\|e^{Ht}\right\| \le F(s^*)e^{(\alpha_0+\alpha)t} \quad (t \in [0, \infty)), \tag{2}$$

где s^* – единственное решение уравнения

$$\psi_{n-2}(s) = \theta\psi_{n-1}(s) \tag{3}$$

на промежутке $[0, \infty)$, $\theta = \frac{\alpha}{2\|H\|}$, $\psi_{n-1}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!}$, $F(s) = \psi_{n-1}(s)e^{-\theta s}$.

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству леммы, исследуем корректность определения величины θ. Поскольку наибольшая из действительных частей собственных значений матрицы H, величина α_0 – отрицательная, то $\|H\| \ne 0$, поэтому θ определено корректно.

Для того, чтобы получить оценку (2), определим наибольшее значение функции $\xi(t)$ на промежутке $[0, \infty)$. Для упрощения вычислений в функции $\xi(t)$ выполним замену переменной t по формуле $t = \theta s/\alpha$, в результате чего получим

$$\xi(t) = \varphi(t)e^{-\alpha t} = \varphi(\theta s/\alpha)e^{-\theta s} = \psi_{n-1}(s)e^{-\theta s} = F(s).$$

Тогда $\max\limits_{[0,\infty)} \xi(t) = \max\limits_{[0,\infty)} F(s)$. Для того, чтобы получить наибольшее значение функции $F(s)$ на полуоси $[0, \infty)$, вычислим dF/ds:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d\psi_{n-1}(s)}{ds} e^{-\theta s} - \theta\psi_{n-1}(s)e^{-\theta s} = \left(\frac{d\psi_{n-1}(s)}{ds} - \theta\psi_{n-1}(s)\right)e^{-\theta s}.$$

Следовательно, стационарные точки функции $F(s)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d\psi_{n-1}(s)}{ds} = \theta\psi_{n-1}(s).$$

Преобразуем это уравнение. Поскольку $\psi_m(s)$ – многочлен Тейлора m-ой степени функции e^s, а для любых $m \in N$ и при всех $s \in R$ имеет место равенство

$$\frac{d\psi_m(s)}{ds} = \psi_{m-1}(s), \tag{4}$$

то уравнение приводится к виду (3). Исследуем множество решений уравнения (3) на промежутке $[0, +\infty)$. Для этого рассмотрим семейство $n-1$ функций $\overline{\psi}_k(s) = \theta\psi_k(s) - -\psi_{k-1}(s),\ k = 1, 2, \ldots, n-1$. Функции $\overline{\psi}_k(s)$ обладают следующим свойством: поскольку $\alpha < -\alpha_0$ и при этом для любой матрицы и любого типа нормы $2\|H\| > -\alpha_0$, то $\theta = \dfrac{\alpha}{2\|H\|} < 1$ при любых допустимых значениях α. А так как $\theta < 1$ и $\psi_m(0) = 1$ при любом $m \in N$, то для функций $\overline{\psi}_k(s)$ выполняются неравенства:

$$\overline{\psi}_k(0) = \theta - 1 < 0,\ \ k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5}$$

С другой стороны, из предельных равенств $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{\theta\psi_k(s)}{\psi_{k-1}(s)} = +\infty$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, следует, что существует число $\bar{s}_k > 0$ такое, что при всех $s > \bar{s}_k$:

$$\overline{\psi}_k(s) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) и непрерывности $\overline{\psi}_k(s)$ следует, что на промежутке $(0, \bar{s}_k)$ функция $\overline{\psi}_k(s)$ имеет хотя бы один ноль. Вне этого промежутка функция $\overline{\psi}_k(s)$ нулей не имеет. Обозначим $\bar{s} = \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-1}\}$. Если для некоторого k из множества $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ функция $\overline{\psi}_k(s)$ имеет единственный ноль на промежутке $(0, \bar{s})$, то функция $\overline{\psi}_{k+1}(s)$ на $(0, \bar{s})$ также имеет единственный ноль. Действительно, пусть $\overline{\psi}_k(s)$ имеет единственный ноль на $(0, \bar{s})$, тогда, поскольку

$$\frac{d\overline{\psi}_{k+1}(s)}{ds} = \theta\frac{d\psi_{k+1}(s)}{ds} - \frac{d\psi_k(s)}{ds} = \theta\psi_k(s) - \psi_{k-1}(s) = \overline{\psi}_k(s),$$

то $\overline{\psi}_{k+1}(s)$ имеет на промежутке $(0, \bar{s})$ единственную точку экстремума. Причем, до этой точки $\overline{\psi}_{k+1}(s)$ убывает, а после – возрастает до $+\infty$. Следовательно, $\overline{\psi}_{k+1}(s)$ действительно имеет на $(0, \bar{s})$ единственный ноль.

Положим $k = 1$. Функция $\overline{\psi}_1(s) = \theta\psi_1(s) - \psi_0(s) = \theta(1+s) - 1 = (\theta - 1) + \theta s$ имеет единственный ноль на $(0, \bar{s})$, тогда согласно доказанному выше, функции $\overline{\psi}_2(s), \overline{\psi}_3,$

…, $\overline{\psi}_{n-2}(s)$ и $\overline{\psi}_{n-1}(s)=\theta\psi_{n-1}(s)-\psi_{n-2}(s)$ также имеют единственный ноль на $(0,\,\overline{s})$, а значит, и на $[0,\,+\infty)$. Т.е., уравнение (3) имеет на полуоси $[0,\,+\infty)$ единственное решение s^*. Согласно достаточным условиям экстремума получаем, что $s=s^*$ – точка максимума функции $F(s)$ на промежутке $[0,\,+\infty)$. Таким образом, $\max\limits_{[0,\,\infty)}F(s)=F(s^*)$, поэтому $\left\|e^{Ht}\right\|\le F\left(s^*\right)e^{(\alpha_0+\alpha)t}$ при всех $t\in[0,\,+\infty)$, что и требовалось доказать.

2. Постановка задачи.

Далее сформулируем определение робастной экспоненциальной устойчивости при интервальных начальных условиях. Рассмотрим систему уравнений управляемого движения

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,\,x,\,u\right), \tag{7}$$

$$x(t_0)=x_0\in\left[\underline{x}_0,\,\overline{x}_0\right], \tag{8}$$

где $x\in R^n$, $u\in R^m$, $f:R_+\times R^n\times R^m\to R^n$, $f(t,0,u)=0$, при всех $t\in R_+$ и $u\in U_0\subset R^m$, при интервальных начальных условиях (8). Кроме того, предполагается, что $f^T(t,\,x,\,u)\times$ $\times f(t,\,x,\,u)\le\eta^2x^TH^THx$, где $\eta>0$ характеризует границу неопределенности и H – некоторая постоянная матрица.

Определение 3. Решение $x=0$ системы (7) при некотором управлении $u=u_0(t)\in U_0$ называется экспоненциально устойчивым при интервальных начальных условиях (8), если существуют положительные постоянные M, α такие, что для любого $t_0\in R_+$ и $x_0\in\left[\underline{x}_0,\,\overline{x}_0\right]$ выполняется оценка

$$\left\|x(t;\,t_0,\,x_0)\right\|\le M\left\|x_0\right\|_I e^{-\alpha(t-t_0)}\quad\text{при всех}\quad t\ge t_0\,.$$

Определение 4. Система (7) робастно экспоненциально стабилизируема при интервальных начальных условиях (8), если существует управление $u=u_0(t)\in U_0$, для которого решение $x=0$ системы (7) экспоненциально устойчиво при интервальных начальных условиях (8).

3. Робастная стабилизация билинейной системы.

Рассмотрим уравнения управляемого движения билинейной системы с неточными значениями параметров

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+\sum_{i=1}^{p}u_i(t)B_ix(t)+Du_0(t) \tag{9}$$

при интервальных начальных условиях (8).

Здесь $x\in R^n$, $A=A_0+\Delta A$, $B_i=B_{i0}+\Delta B_i$, $D=D_0+\Delta D$ – матрицы соответствующих размерностей, матрицы A_0, B_{i0}, D_0 – соответствуют номинальной системе и $\Delta\,A$, $\Delta\,B_i, \Delta\,D$ – неточности параметров системы и управления.

Заметим, что при фиксированных размерностях матриц $A=A_0+\Delta\,A$, $B_i=B_{i0}+\Delta\,B_i$, $D=D_0+\Delta\,D$ в системе (9) в выражениях управлений $u_i(t)$ и $u_0(t)$ матрицы K_i и K_0 имеют размерности, при которых правая часть уравнений (9) имеют размерность вектора состояния системы (9).

О системе (9) сделаем такие предположения:

H_1. Существуют положительные постоянные a, b_i, c, $i=1,\,2,\,\dots,\,p$, такие, что

$$\left\|\Delta A\right\|\le a;\quad\left\|\Delta B_i\right\|\le b_i;\quad\left\|\Delta D\right\|\le c\,;$$

H_2. Пара (A_0, D_0) – стабилизируемая, то есть существует матрица K такая, что при управлении $u_0(t) = -Kx(t)$ матрица $\tilde{A} = A_0 - D_0 K$ такова, что

$$\left\| e^{\tilde{A}t} \right\| \le M_0 e^{\omega t}, \text{ где } M_0 > 0 \text{ и } \omega < 0.$$

Перепишем систему (9) в виде

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 - D_0 K)x(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)(B_{i0} + \Delta B_i)x(t) + (\Delta A - \Delta DK)x(t) \tag{10}$$

и предположим, что локальные управления

$$u_i(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{11}$$

вместе с глобальным управлением

$$u_0(t) = -Kx(t) \tag{12}$$

осуществляют заданные свойства движения объекта, который описывается системой (9).

Укажем условия, при которых управления (11) и (12) стабилизируют движение системы (9) к робастно экспоненциально устойчивому.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что для системы (9) выполняются условия предположений H_1 – H_2 и, кроме того,

$$\omega + M_0\left(a + c\|K\|\right) + \|x_0\|_I M_0^2 \sum_{i=1}^{p} \|K_i\|\left(\|B_{i0}\| + b_i\right) < 0. \tag{13}$$

Тогда управления $u_0(t)$ и $u_i(t)$ стабилизируют движение системы (9) к робастно экспоненциально устойчивому.

Доказательство. Учитывая (11), из уравнения (10) определим, что

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x_0 - \int_0^t e^{\tilde{A}(t-s)} \sum_{i=1}^{p} K_i x(s)\left(B_{i0} + \Delta B_i\right)x(s)\,ds + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-s)}\left(\Delta A - \Delta DK\right)x(s)ds, \tag{14}$$

где $x_0 \in \left[\underline{x}_0, \overline{x}_0\right]$. При выполнении условия H_2 для системы

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \left(A_0 - D_0 K\right)\tilde{x} \tag{15}$$

существуют постоянные $M_0 > 0$ и $\omega < 0$ такие, что

$$\left\| e^{\tilde{A}t} \right\| \le M_0 e^{\omega t} \tag{16}$$

при всех $t > 0$. Учитывая условие H_1 и оценку (16), из соотношения (14) получаем неравенство

$$\psi(t) \le m_I + \int_0^t \left[f_1 \psi(s) + f_2(s)\psi^2(s) \right] ds, \tag{17}$$

где $\psi(t) = \|x(t)\| e^{-\omega t}$, $m_I = M_0 \|x_0\|_I$, $\|x_0\|_I = \max\left\{ \|x(t_0)\| : x(t_0) = x_0 \in \left[\underline{x}_0, \overline{x}_0\right] \right\}$, $f_1 =$ $= M_0(a + c\|K\|)$, $f_2 = M_0 \sum_{i=1}^{p} \|K_i\|(\|B_{i0}\| + b_i)\, e^{\omega s}$.

Применяя к неравенству (17) лемму Гроноулла – Беллмана, получаем оценку

$$\psi(t) \le m_I \exp\left\{ \int_0^t \left[f_1 + f_2(s)\psi(s) \right] ds \right\}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что

$$-\psi(t)\exp\left\{\int_0^t\left(-f_2(s)\psi(s)\right)ds\right\}\geq -m_I\exp\int_0^t f_1 ds. \tag{19}$$

Умножая обе стороны неравенства (19) на $f_2(t)>0$, при всех $t\geq 0$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-\int_0^t f_2(s)\psi(s)ds\right]\right\}\geq -m_I f_2(t)\exp\int_0^t f_1 ds.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до t, определим, что

$$\left(\psi(t)\right)^{-1} m_I\exp\int_0^t f_1 ds\geq 1-m_I\int_0^t f_2(s)\exp\left\{\int_0^s f_1 d\eta\right\}ds. \tag{20}$$

Для того, чтобы разрешить это неравенство относительно $\psi(t)$, выясним знак выражения в правой части неравенства. Для этого упростим его, вычислив входящие в него интегралы. В результате несложных преобразований получим:

$$1-m_I\int_0^t f_2\left(s\right)\exp\left\{\int_0^s f_1 d\eta\right\}ds=1-\frac{m_I M_0\sum_{i=1}^p\|K_i\|\left(\|B_{i0}\|+b_i\right)}{\omega+M_0\left(a+c\|K\|\right)}\left[e^{\left(\omega+M_0\left(a+c\|K\|\right)\right)t}-1\right]. \tag{21}$$

Введем обозначение: $\omega_1=\omega+M_0\left(a+c\|K\|\right)$. Поскольку, как следует из неравенства (13), $\omega_1<0$ и $e^{\omega_1 t}>0$ при любых $t\geq 0$ (причем последняя оценка является тем точнее, чем больше t), то получим такую оценку:

$$1-m_I\int_0^t f_2\left(s\right)\exp\left\{\int_0^s f_1 d\eta\right\}ds>1+\frac{m_I M_0\sum_{i=1}^p\|K_i\|\left(\|B_{i0}\|+b_i\right)}{\omega_1},$$

которая справедлива при любых $t\geq 0$. Последнее выражение является положительным, если воспользоваться условием (11) теоремы и учесть обозначение для постоянной m_I. Таким образом, правая часть неравенства (20) в силу условия теоремы является положительной при любых $t\geq 0$, поэтому (20) может быть решено относительно $\psi(t)$ так:

$$\psi(t)\leq\frac{m_I\exp\int_0^t f_1 ds}{1-m_I\int_0^t f_2\left(s\right)\exp\int_0^s f_1 d\eta ds}=\frac{m_I e^{M_0\left(a+c\|K\|\right)t}}{1-\frac{m_I M_0\sum_{i=1}^p\|K_i\|\left(\|B_{i0}\|+b_i\right)}{\omega_1}(e^{\omega_1 t}-1)}. \tag{22}$$

Воспользовавшись далее снова оценкой $e^{\omega_1 t}>0$, справедливой при всех $t\geq 0$, получим следующую оценку для $\psi(t)$

$$\psi(t)\leq M(m_I)\,e^{M_0\left(a+c\|K\|\right)t} \tag{23}$$

при всех $t\geq 0$, где $M\left(u\right)=\dfrac{u\omega_1}{\omega_1+uM_0\sum_{i=1}^p\|K_i\|\left(\|B_{i0}\|+b_i\right)}$.

Учитывая, что $\psi(t)=\|x(t)\|e^{-\omega t}$, из (23) получаем оценку для $\|x(t)\|$:

$$\|x(t)\|\leq M\left(M_0\|x_0\|_I\right)e^{\omega_1 t} \tag{24}$$

при всех $t\geq 0$.

Это доказывает утверждение теоремы 1.

4. Робастная стабилизация наблюдаемой системы.

Далее предположим, что в системе (9) $p = 1$ и будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + u(t)Bx(t) + Du_0(t); \qquad y(t) = Cx(t); \tag{25}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{26}$$

где $A = A_0 + \Delta A$, $B = B_0 + \Delta B$, $D = D_0 + \Delta D$ матрицы соответствующих размерностей. О системе (25) предположим следующее:

H_1. Пара (A_0, C) – наблюдаемая, т.е. существует матрица G такая, что нулевое решение системы

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = (A_0 - GC)\overline{x} \tag{27}$$

асимптотически устойчиво и, следовательно, существуют матрица K и постоянные $N_0 > 0$ и $\lambda < 0$, при которых верна оценка

$$\left\| e^{(A_0 - GC)t} \right\| \le N_0 e^{\lambda t} \quad \text{при всех} \quad t \ge 0\,. \tag{28}$$

H_2. Пара (A_0, D_0) – стабилизируемая, т.е. существуют постоянные $N_1 > 0$ и $\beta < 0$ такие, что $\left\| e^{(A_0 - D_0K)t} \right\| \le N_1 e^{\beta t}$ при всех $t \ge 0$.

Следуя общей теории наблюдения (см. [14]), предположим, что “наблюдатель” в системе (25) описывается системой уравнений

$$\frac{dz}{dt} = \Phi z(t) + u(t)B_0 z(t) + D_0 u(t) + Gy(t); \tag{29}$$

$$z(t_0) = z_0 \in \left[\underline{z}_0, \overline{z}_0\right], \tag{30}$$

где $\Phi = A_0 - GC$ – $n \times n$-постоянная матрица.

Введем расширенный вектор системы (25) и ошибки наблюдения $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ в виде

$$w(t) = (x(t), \varepsilon(t))^T; \; w(0) = w_0 \in [\underline{w}_0, \overline{w}_0]$$

и перепишем уравнение (25) вместе с уравнением ошибки в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{A}x(t) + (\Delta A - \Delta DK)x(t) - Kz(t)Bx(t) - DK\varepsilon(t); \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \Phi\varepsilon(t) - (\Delta A + \Delta DK)x(t) - Kz(t)\left(B_0\varepsilon(t) - \Delta Bx(t)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

где $\tilde{A} = A_0 - D_0K$, и $\Phi = A_0 - GC$. При этом учитывается, что управление – $u(t) = -Kz(t)$.

Систему (31), учитывая содержание вектора $w(t)$ и правой части, перепишем в виде

$$\frac{dw}{dt} = Hw(t) + Y(t) + Z(x(t)); \; w(0) = w_0 \in \left[\underline{w}_0, \overline{w}_0\right], \tag{32}$$

где $H = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -D_0K \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} -Kz(t)(B_0 + \Delta B)x(t) \\ -Kz(t)(B_0\varepsilon - \Delta Bx(t)) \end{pmatrix}$, $Z(x(t)) = \begin{pmatrix} (\Delta A - \Delta DK)x(t) \\ -(\Delta A + \Delta DK)x(t) \end{pmatrix}$.

Из уравнения (32) получим, что

$$w(t) = e^{Ht} w_0 + \int_0^t e^{H(t-s)} \left(Z\left(x(s)\right) + Y(s) \right) ds. \tag{33}$$

Согласно работе [2] верна оценка

$$\left\| e^{Ht} \right\| \le \tilde{N} e^{\sigma t}, \quad \sigma = \max\left(\lambda, \beta\right), \tag{34}$$

где $\tilde{N} = \mathrm{const} > 0$ и кроме того

$$\left\| Z\left(x(t)\right) \right\| \le 2\left(a + c\|K\|\right)\|w(t)\|; \quad \|Y(t)\| \le 4\|K\|\left(\|B_0\| + b\right)\|w(t)\|^2 \quad \text{при всех } \ t \ge 0\,. \tag{35}$$

Далее обозначим $\tilde{f}_1 = 2\tilde{N}\left(a + c\|K\|\right)$ и $\tilde{f}_2(s) = 4\tilde{N}\|K\|\left(\|B_0\| + b\right)e^{\sigma s}$ и получим из соотношения (33) оценку

$$\tilde{\psi}(t) \le \tilde{m}_I + \int_0^t \left(\tilde{f}_1 \tilde{\psi}(s) + \tilde{f}_2(s) \tilde{\psi}^2(s) \right) ds, \tag{36}$$

где $\tilde{\psi}(t) = \|w(t)\| e^{-\sigma t}$, $\tilde{m}_I = \tilde{N}\|w_0\|_I$, $\|w_0\|_I = \max\left\{ \left\| w\left(t_0\right) \right\| : w\left(t_0\right) = w_0 \in \left[\underline{w}_0, \overline{w_0} \right] \right\}$.

Применим к неравенству (36) технику оценивания из теоремы 1 получим неравенство

$$\tilde{\psi}(t) \le \frac{\tilde{m}_I \exp \int_0^t \tilde{f}_1 ds}{1 - \tilde{m}_I \int_0^t \tilde{f}_2(s) \exp \int_0^s \tilde{f}_1\left(\eta\right) d\eta ds}, \tag{37}$$

которое верно при всех $t \ge 0$, если только

$$\sigma + 2\tilde{N}\left(a + c\|K\|\right) + 4\|w_0\|_I \tilde{N}^2 \|K\|\left(\|B_0\| + b\right) < 0\,. \tag{38}$$

Имеет место следующее утверждение.

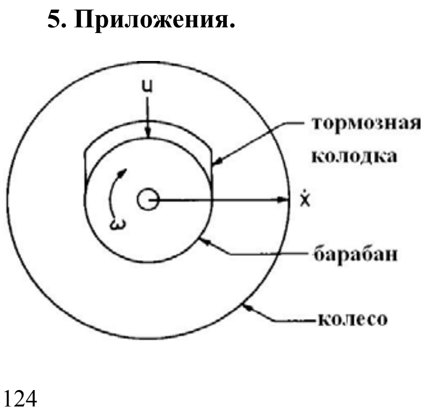
Теорема 2. Пусть для системы (25) выполняются предположения H_1 – H_2 и кроме того выполняется условие (38). Тогда система (25) робастно экспоненциально стабилизируема с оценкой

$$\|w(t)\| \le \tilde{M}\left(\tilde{N}\|w_0\|_I \right) e^{\tilde{\omega}_1 t}, \tag{39}$$

где $\tilde{\omega}_1 = \sigma + 2\tilde{N}\left(a + c\|K\|\right) < 0$, $\sigma = \max\left(\alpha, \beta\right)$ и $\tilde{M}\left(u\right) = \dfrac{u\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1 + 4u\tilde{N}\|K\|\left(\|B_0\| + b\right)}$.

Доказательство. При выполнении условий H_1 – H_2 получаем оценку (37), которая имеет место при всех $t \in \left[0, \infty\right)$, если выполняется условие (38). Из (37), учитывая обозначения $\tilde{\psi}$, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2(s)$, получим выражение постоянной $\tilde{M}$ в неравенстве (39), из которого при условии (38) следует утверждение Теоремы 2.

5. Приложения.



Рассмотрим динамику торможения автомобиля при следующих предположениях [14]. Рассмотрим колесо автомобиля (рисунок), которое вращается на оси с некоторой угловой скоростью ω и систему торможения автомобильного колеса. Система торможения состоит из барабана, неподвижного относительно колеса, и тормозной колодки, которая прислоняется к барабану с переменной плотностью, создавая тем самым силу трения f_1 разной интенсивности.

Предполагается:

1) $F_1 = c_1 u_1 \dot{x}$, где управление u_1 – нормальная сила, приложенная к колодке, $\dot{x}$ – поступательная скорость, c_1 – константа;

2) кулоновское трение отсутствует;

3) другие силы трения F_2 выражаются так: $F_2 = c_2 \dot{x}$ (c_2 – константа).

Учитывая силы инерции, трения и тяги двигателя, согласно второму закону Ньютона получим уравнение движения в таком виде:

$$m\frac{d}{dt}(\dot{x}) = -kc_1 u_1 \dot{x} - kc_2 \dot{x} + u,$$

где k – коэффициент пропорциональности, m – масса автомобиля, u – сила, обусловленная двигателем. Обозначив $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$, уравнение можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \left(-\dfrac{c_1 u_1}{m} - \dfrac{c_2}{m}\right) y_2 + \dfrac{u}{m}, \end{cases}$$

или в векторном виде:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + u_1 By + Du, \tag{40}$$

где приняты обозначения:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{kc_2}{m} \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{kc_1}{m} \end{pmatrix};\; D = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Предположим, что параметры m, c_2, c_1 заданы неточно и принимают значения из ограниченных промежутков $[m_0 - \Delta m, m_0 + \Delta m]$, $[c_{20} - \Delta c_2, c_{20} + \Delta c_2]$ и $[c_{10} - \Delta c_1,$ $c_{10} + \Delta c_1]$, соответственно. Тогда A, B и C можно представить в виде: $A = A_0 + \Delta A$, $B = B_0 + \Delta B$, $D = D_0 + \Delta D$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{kc_{20}}{m_0} \end{pmatrix};\; B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{kc_{10}}{m_0} \end{pmatrix};\; D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_0} \end{pmatrix},$$

а ΔA, ΔB, ΔC – прибавки, обусловленные неточностью параметров.

Определим условия, которым должны удовлетворять матрицы $K = [k_1, k_2]$ и $K_1 = [k_{11}, k_{12}]$, чтобы управления $u_1 = -K_1 y$ и $u = -Ky$ робастно экспоненциально стабилизировали колесо автомобиля. Для этого сначала выясним, какой должна быть матрица K, чтобы пара (A_0, D_0) была стабилизируемой, т.е. существовали числа $M_0 > 0$ и $\omega < 0$ такие, что:

$$\left\| e^{(A_0 - D_0 K)t} \right\| \le M_0 e^{\omega t}, \tag{42}$$

при всех $t \ge 0$. То есть, чтобы выполнялась гипотеза H_2.

Матрицу K выберем, потребовав выполнения условия $\max\limits_{i=1,2} \Re \lambda_i \left(A_0 - D_0 K\right) < 0$.

Это будет тогда, когда

$$\operatorname{tr}\left(A_0 - D_0 K\right) < 0 \quad \text{и} \quad \det\left(A_0 - D_0 K\right) > 0. \tag{43}$$

Поскольку $A_0 - D_0 K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1}{m_0} & \dfrac{-kc_{20} - k_2}{m_0} \end{pmatrix}$, то условия (43) примут вид

$$\begin{cases} k_2 > -kc_{20}, \\ k_1 > 0. \end{cases} \tag{44}$$

Обозначив $\alpha_0 = \max\limits_{i=1,2} \Re \lambda_i \left(A_0 - D_0 K \right)$ и воспользовавшись леммой 1, получим оценку (42), в которой M_0 и ω определяются по формулам

$$M_0 = \frac{2\left\| A_0 - D_0 K \right\|}{\alpha} e^{-1 + \frac{\alpha}{2\left\| A_0 - D_0 K \right\|}}; \quad \omega = \alpha_0 + \alpha, \tag{45}$$

где $\alpha > 0$ выбрано так, что $\alpha_0 + \alpha < 0$.

Чтобы получить условия робастной экспоненциальной устойчивости решения $y = 0$ системы (40), потребуем дополнительно выполнения неравенства (13) из условий теоремы 1:

$$\omega + M_0 \left(a + c\|K\| \right) + \|y_0\|_I \, M_0^2 \sum_{i=1}^{p} \|K_i\| \left(\|B_{i0}\| + b_i \right) < 0 .$$

В данном случае сумма в левой части неравенства содержит только одно слагаемое, поэтому неравенство примет вид:

$$\omega + M_0 \left(a + c\|K\| \right) + \|y_0\|_I \, M_0^2 \|K_1\| \left(\|B_0\| + b \right) < 0 , \tag{46}$$

где a, b и c – положительные числа такие, что $\|\Delta A\| \le a$, $\|\Delta B\| \le b$ и $\|\Delta D\| \le c$. Поскольку $\|B_0\| = \dfrac{kc_{10}}{m_0}$, $\|K\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $\|K_1\| = \sqrt{k_{11}^2 + k_{12}^2}$, то неравенство (46) представим так:

$$\omega + M_0 (a + c\sqrt{k_1^2 + k_2^2}) + \|y_0\|_I \, M_0^2 \sqrt{k_{11}^2 + k_{12}^2} \left(\frac{kc_{10}}{m_0} + b \right) < 0, \tag{47}$$

Таким образом, если в системе (40) управления u_1 и u имеют вид:

$$u_1 = -K_1 y; \;\; u = -Ky,$$

и при этом матрицы $K_1 = [k_{11}, k_{12}]$ и $K = [k_1, k_2]$ удовлетворяют условиям (44) и (47), в которых M_0 и ω находятся по формулам (45), где $\alpha > 0$ выбрано так, что $\alpha_0 + \alpha < 0$, а a, b и c – положительные числа такие, что $\|\Delta A\| \le a$, $\|\Delta B\| \le b$ и $\|\Delta D\| \le c$, то решение $y = 0$ системы (40) робастно экспоненциально устойчиво.

Это и есть достаточные условия робастной экспоненциальной стабилизации движения автомобиля.

6. Заключительные замечания.

В статье получены новые достаточные условия стабилизации движения неточной билинейной системы (9) при интервальных начальных условиях движения при помощи линейных управлений (11), (12) матрицы K_i и K_0 которых выбираются так, что пара (A_0, D_0) стабилизируема и выполняется неравенство (13). В основу этих условий положена оценка нормы решений системы (9) при интервальных начальных условиях (8).

Применение полученных условий стабилизации движения иллюстрируется на задаче о стабилизации движения автомобиля.

Заметим также, что интервальные начальные условия (8) в системе (9) порождают множество (пучок) решений. Развитие этого подхода ведет к необходимости применения обобщенной производной множества состояний системы и иной техники анализа движения. Это может быть предметом отдельного исследования билинейных систем.

РЕЗЮМЕ. Досліджено проблему робастної стабілізації руху білінійних систем при інтервальних початкових умовах шляхом застосування інтегральних нерівностей. Як приклад розглянуто модель руху автомобіля при гальмуванні.

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. *Тонков Е.Л.* Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во Моск. ин-та хим. и машиностроения, 1972. – 87 с.
3. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск:Изд-во XYZ, 2013. – 606 с.
4. *El. Alami N.* Analyse et Commande Optimale des Systemes Bilineaires Distribues // Applications aux Procedes Energetiques. PhD thesis, Univesitede Perpignan, France, 1986. – 126 p.
5. *Alefeld G., Mayer G.* Interval analysis: theory and applications // J. of Computational Applied Mathematics. – 2000. – **121**. – P. 421 – 464.
6. *Babenko Ye.A., Martynyuk A.A.* Stabilization of the Motion of a Nonlinear System with Interval Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 182 – 191.
7. *Benallou A., Mellichamp D., Seborg D.* Charaterization of equilibrium sets for bilinear systems with feedback control // Automatica. – 1983. – **19**. – P. 183 – 189.
8. *Espana M., Landau I.* Reduced order bilinear models for distillations columns // Automatica. – 1977. – **14**. – P. 345 – 355.
9. *Kardous Z., Benhadj Braiek N.* Stabilizing Sliding Mode Control for Homogeneous Bilinear Systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2014. – **14** (3). – P. 303 – 312.
10. *Longchamp R.* Stable feedback control of bilinear systems // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1980. – **25**. – P. 302 – 306.
11. *Martynyuk A.A., Babenko Ye.A.* Finite time stability of uncertain affine systems // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2016. – **7**, N 1. – P. 179 – 196.
12. *Martynyuk A.A.* Novel Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Equations // Applied Mathematics. – 2015. – **6**. – P. 182 – 194.
13. *Mohler R.* Nonlinear systems: Applications to Bilinear Control, vol. 2. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991. – 275 p.
14. *Mohler R.* Bilinear control processes: with applications to engineering, ecology, and medicine. – New York: Academic Press, 1973. – 305 p.
15. *Pachpatte B.G.* Inequalities for Differential and Integral Equations. – New York: Ames, 1997. – 611 p.
16. *Ryan E., Buckingham N.* On asymptotically stabilizing feedback control of bilinear systems // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1983. – **28**. – P. 863 – 864.
17. *Schumacher J.M.* A direct approach to compensator design for distributed parameter systems // SIAM J. Contr. and Optimization. – 1983. – **21**. – P. 823 – 836.
18. *Slemrod M.* Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity // SIAM J. Contr. Opt. – 1978. – **16**. – P. 131 – 141.

Поступила 01.07.2016 Утверждена в печать 14.03.2017