

Е.А.Сторожук<sup>1</sup>, И.С.Чернышенко<sup>1</sup>, И.Б.Руденко<sup>2</sup>

**НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,  
ОСЛАБЛЕННОЙ РЯДОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ**

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,*

*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: prikl@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup>*Университет государственной фискальной службы Украины,*

*ул. Университетская, 31, 08201, Ирпень, Украина, e-mail: juvr@ukr.net*

**Abstract.** A statement of the problems of statics is given for the elastoplastic spherical shells with a number of identical circular holes. A technique of numerical study is evaluated for this class of problems. This techniques is based on utilization of the method of additional stresses and the variational vector-difference method. For a shell loaded by the uniform internal pressure, an effect of plastic deformations and geometrical parameters on the distribution of stresses, strains and displacements is studied in the zone of their concentration.

**Key words:** spherical shell, a number of circular holes, plasticity, variational vector-difference method, static load.

**Введение.**

Тонкие оболочки с криволинейными отверстиями, срединные поверхности которых являются многосвязными областями, широко применяются в современной инженерной практике. Контуры отверстий могут быть свободными, подкрепленными тонкими стержнями (кольцами) или жесткими включениями [5, 6, 8, 9, 10, 15–18]. Большинство результатов по исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) вокруг отверстий в оболочках данного класса получено для линейно-упругой стадии их деформирования и приведено в обобщающих монографиях и статьях [2, 3, 7, 13, 14]. Отметим, что постановка и метод решения линейно-упругих задач для многосвязных оболочек впервые даны А.Н. Гузем [1].

Повышенный интерес вызывают нелинейные задачи концентрации напряжений в оболочках с двумя или большим количеством отверстий. Решению данного класса задач для тонких оболочек посвящено незначительное количество работ. Так, распределение перемещений, деформаций и напряжений в многосвязной сферической оболочке с несколькими отверстиями при учете нелинейных факторов изучено для двух круговых отверстий [5, 11] и циклически симметричной сферической оболочки, ослабленной круговыми отверстиями [20]. Исследование упругопластического состояния в области двух круговых отверстий на боковой поверхности гибкой цилиндрической оболочки выполнено в работе [19].

Ниже дана постановка физически нелинейных задач для изотропных сферических оболочек с рядом одинаковых круговых отверстий, приведены основные нелинейные уравнения, разработана методика численного решения данного класса задач и представлены конкретные числовые результаты исследования упругопластического состояния сферической оболочки, ослабленной рядом круговых отверстий и нагруженной равномерным внутренним давлением.

### 1. Постановка задачи. Основные нелинейные соотношения.

Рассмотрим тонкую сферическую оболочку радиуса  $R$  и толщины  $h$  с рядом одинаковых круговых отверстий радиуса  $r_0$ , центры которых расположены периодически, т.е. на одинаковых расстояниях друг от друга при одинаковых граничных условиях на каждом из контуров (рис. 1). Примем, что оболочка изготовлена из однородного изотропного материала и нагружена поверхностными  $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$  и краевыми  $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$  силами повышенной интенсивности, удовлетворяющими условиям периодичности.

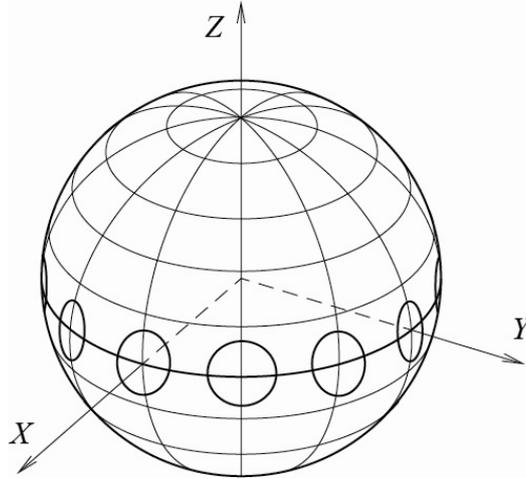


Рис. 1

Отнесем срединную поверхность оболочки к криволинейной ортогональной системе координат  $(\alpha, \beta)$ , а вдоль ее нормали  $\vec{n}$  направим координату  $\gamma$ . Уравнение срединной поверхности запишем в глобальной декартовой системе координат  $(X, Y, Z)$  в параметрической форме

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = X(\alpha, \beta)\vec{i} + Y(\alpha, \beta)\vec{j} + Z(\alpha, \beta)\vec{k}, \quad (1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точек срединной поверхности оболочки;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты системы координат  $(X, Y, Z)$ .

Отметим, что для оболочки с рядом отверстий область  $(\Sigma)$  изменения координат параметризации срединной поверхности  $(\alpha, \beta)$  является сложной, в которой не все контурные линии совпадают с координатными линиями. Для получения разностных уравнений разбиваем область  $(\Sigma)$  на  $K_\phi$  криволинейных четырехугольных фрагментов  $(\Sigma_k)$ , параметризация которых осуществляется с помощью составной функции координат  $\xi_1, \xi_2$  [20].

Основные соотношения, описывающие упругопластическое состояние сферической оболочки, представим в косоугольной системе координат  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Выражения для компонент тензора деформации запишем в векторной форме согласно теории тонких оболочек, в которой имеют место гипотезы Кирхгофа – Лява [11, 20]:

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_m} \cdot \vec{r}_n + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_n} \cdot \vec{r}_m \right); \quad \mu_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \xi_m} \cdot \vec{r}_n + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \xi_n} \cdot \vec{r}_m \right); \quad e_{mn} = \varepsilon_{mn} + \gamma \mu_{mn}, \quad (2)$$

где  $\vec{u} = u\vec{e}_\alpha + v\vec{e}_\beta + w\vec{n}$  – вектор перемещений;  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{n}$  – орты ортогональной системы координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ;  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  – вектора основного базиса системы координат  $(\xi_1, \xi_2)$ ;  $\vec{\varphi} = \varphi_\alpha \vec{e}_\alpha + \varphi_\beta \vec{e}_\beta$  – вектор углов поворота нормали  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\beta$ , которые определяются по формулам

$$\varphi_\alpha = -\frac{\partial \vec{u}}{A_\alpha \partial \alpha} \cdot \vec{n} \quad (\alpha \rightarrow \beta); \quad (3)$$

$A_\alpha, A_\beta$  – параметры Ламе. Здесь и ниже латинские индексы принимают значения 1, 2, если не обусловлены другие значения.

Принимаем, что интенсивность нагрузки такова, что в оболочке возникают пластические деформации ее материала.

Нелинейные физические соотношения представим на основе теории малых упругопластических деформаций в виде суммы линейной и нелинейной частей [20]:

$$\sigma^{mn} = \sigma_{(0)}^{mn} + \sigma_{(p)}^{mn}; \quad \sigma_{(0)}^{mn} = C^{mnkl} e_{kl}; \quad \sigma_{(p)}^{mn} = C_{(p)}^{mnkl} e_{kl};$$

$$C^{mnkl} = \frac{2G}{1-\nu} [ \nu a^{mn} a^{kl} + (1-\nu) a^{mk} a^{nl} ]; \quad (4)$$

$$C_{(p)}^{mnkl} = 2G \left\{ \left[ \frac{(1-\omega_i)\nu_i}{1-\nu_i} - \frac{\nu}{1-\nu} \right] a^{mn} a^{kl} - \omega_i a^{mk} a^{nl} \right\};$$

$$\omega_i = 1 - \frac{1}{3G} \frac{\sigma_i}{e_i}; \quad \nu_i = \frac{3\nu + \omega_i(1-2\nu)}{3 - \omega_i(1-2\nu)}, \quad (5)$$

где  $C^{mnkl}$  – тензор упругости для плоского напряженного состояния;  $G, \nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $\omega_i, \nu_i$  – функция пластичности и переменный коэффициент поперечной деформации;  $\sigma_i, e_i$  – интенсивности напряжений и деформаций;  $a^{mn}$  – контравариантные компоненты основного метрического тензора; величины с индексами «0» и «p» снизу соответствуют линейной и нелинейной частям компонент тензора напряжений.

Для внутренних усилий и моментов с учетом равенств (4) имеем выражения:

$$T^{mn} = T_{(0)}^{mn} + T_{(p)}^{mn}; \quad M^{mn} = M_{(0)}^{mn} + M_{(p)}^{mn}; \quad (6)$$

$$T_{(0)}^{mn} = B^{mnkl} \varepsilon_{kl}; \quad M_{(0)}^{mn} = D^{mnkl} \mu_{kl}; \quad T_{(p)}^{mn} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(p)}^{mn} d\gamma; \quad M_{(p)}^{mn} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(p)}^{mn} \gamma d\gamma.$$

Здесь  $B^{mnkl} = h C^{mnkl}$ ,  $D^{mnkl} = C^{mnkl} h^3 / 12$  – тензоры упругих постоянных для мембранных и изгибных усилий.

## 2. Методика решения двумерных упругопластических задач для сферической оболочки, ослабленной рядом отверстий.

Исходным для получения системы нелинейных уравнений, описывающих упругопластическое состояние сферической оболочки с рядом отверстий, является вариационное уравнение принципа возможных перемещений. Физически нелинейную задачу решаем методом дополнительных напряжений, принимая, что нелинейные составляющие внутренних усилий  $T_{(p)}^{mn}$  и моментов  $M_{(p)}^{mn}$  известны из предыдущего приближения и не варьируются. Реализуя геометрические гипотезы Кирхгофа – Лява ме-

тодом множителей Лагранжа, получим смешанный функционал линеаризированной задачи такого вида [11, 20]:

$$\begin{aligned} \Pi^{nh} = & \sum_{k=1}^{K_\phi} \left[ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_k} (B^{mnst} \varepsilon_{st} \varepsilon_{mn} + D^{mnst} \mu_{st} \mu_{mn}) d\Sigma + \right. \\ & \left. + \iint_{\Sigma_k} (T_{(p)}^{mn} \varepsilon_{mn} + M_{(p)}^{mn} \mu_{mn} + T^{m\gamma} \varepsilon_{m\gamma}) d\Sigma \right] - A_p, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $A_p$  – работа внешних сил;  $T^{m\gamma}$  – множители Лагранжа;  $\varepsilon_{m\gamma}$  – выражения вида

$$\varepsilon_{m\gamma} = \vec{\varphi} \cdot \vec{r}_m + \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_m}. \quad (8)$$

В смешанном функционале (7) нет производных выше первого порядка, разрешающими являются семь функций  $\{f\} = \{u, v, w, \varphi_\alpha, \varphi_\beta, T_{\alpha\gamma}, T_{\beta\gamma}\}^T$ , которые можно независимо варьировать, а множители Лагранжа имеют смысл перерезывающих усилий.

Отметим, что реализация геометрических гипотез Кирхгофа – Лява с помощью множителей Лагранжа относится к неклассическим подходам, к которым также принадлежит способ дискретной реализации гипотез Кирхгофа – Лява в методе конечных элементов [4, 12].

Линеаризированную задачу решаем с помощью вариационного векторно-разностного метода (ВВРМ), разработанного для расчета многосвязных оболочек с отверстиями [20]. В этом случае область  $(\Sigma_k)$  изменения локальных координат  $(\xi_1, \xi_2)$ , которая для каждого фрагмента является квадратом, покрываем основной  $(i, j)$  и вспомогательной  $(i+1/2, j+1/2)$  системами сеток с переменными шагами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вдоль координатных линий  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ; в выражении (7) для смешанного функционала переходим от дифференцирования к конечным разностям и от интегрирования – к суммированию по формуле прямоугольников.

Компоненты деформации оболочки (2) вычисляем приближенно по конечно-разностным формулам [11, 20]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j} &= \frac{\vec{u}_{i+1, j} - \vec{u}_{i, j}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}; & \varepsilon_{22} \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} &= \frac{\vec{u}_{i, j+1} - \vec{u}_{i, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}; \\ \varepsilon_{12} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\vec{u}_{i+1, j} - \vec{u}_{i, j}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j} + \frac{\vec{u}_{i+1, j+1} - \vec{u}_{i, j+1}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+1} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{\vec{u}_{i, j+1} - \vec{u}_{i, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{u}_{i+1, j+1} - \vec{u}_{i+1, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right); \\ \mu_{11} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j} &= \frac{\vec{\varphi}_{i+1, j} - \vec{\varphi}_{i, j}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}; & \mu_{22} \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} &= \frac{\vec{\varphi}_{i, j+1} - \vec{\varphi}_{i, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}; \\ \mu_{12} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\vec{\varphi}_{i+1, j} - \vec{\varphi}_{i, j}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j} + \frac{\vec{\varphi}_{i+1, j+1} - \vec{\varphi}_{i, j+1}}{\lambda_1} \cdot \vec{r}_2 \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+1} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{\vec{\varphi}_{i, j+1} - \vec{\varphi}_{i, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{\varphi}_{i+1, j+1} - \vec{\varphi}_{i+1, j}}{\lambda_2} \cdot \vec{r}_1 \Big|_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для соотношений (8), связывающих углы поворота с вектором перемещений, имеем аналогичные выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1\gamma} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\bar{\varphi}_{i,j} + \bar{\varphi}_{i+1,j}}{2} \cdot \bar{r}_1 \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\lambda_1} \cdot \bar{n} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}; \\ \varepsilon_{2\gamma} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\bar{\varphi}_{i,j} + \bar{\varphi}_{i,j+1}}{2} \cdot \bar{r}_2 \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{\lambda_2} \cdot \bar{n} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Интегралы в функционале (7) заменяются суммами по схеме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_k} (\dots) d\Sigma &= \sum_{i=1}^{I_k-1} \sum_{j=1}^{J_k} \left[ \frac{1}{2} (B^{1111} \varepsilon_{11}^2 + D^{1111} \mu_{11}^2) + T_{(p)}^{11} \varepsilon_{11} + M_{(p)}^{11} \mu_{11} + T^{1\gamma} \varepsilon_{1\gamma} \right] \omega \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \\ &+ \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^{J_k-1} \left[ \frac{1}{2} (B^{2222} \varepsilon_{22}^2 + D^{2222} \mu_{22}^2) + T_{(p)}^{22} \varepsilon_{22} + M_{(p)}^{22} \mu_{22} + T^{2\gamma} \varepsilon_{2\gamma} \right] \omega \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{I_k-1} \sum_{j=1}^{J_k-1} \left[ 2(B^{1212} \varepsilon_{12}^2 + B^{1112} \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + B^{1222} \varepsilon_{12} \varepsilon_{22} + D^{1212} \mu_{12}^2 + D^{1112} \mu_{11} \mu_{12} + \right. \\ &\left. + D^{1222} \mu_{12} \mu_{22} + T_{(p)}^{12} \varepsilon_{12} + M_{(p)}^{12} \mu_{12}) + B^{1122} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + D^{1122} \mu_{11} \mu_{22} - \bar{p} \cdot \bar{u} \right] \omega \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},\end{aligned}\quad (11)$$

где  $\omega(\xi_1, \xi_2)$  – часть элемента площади ( $\sqrt{a} \lambda_1 \lambda_2$ ) с центром в точке  $(\xi_1, \xi_2)$ , которая принадлежит фрагменту  $(\Sigma_k)$ ;  $a$  – дискриминант основного метрического тензора;  $\bar{p}$  – вектор поверхностных сил.

Из условий стационарности дискретного аналога смешанного функционала (7) получена система разрешающих уравнений, которая во внутреннем узле  $(i, j)$  фрагмента имеет вид:

$$\sum_{s=i-1}^{i+1} \sum_{t=j-1}^{j+1} \sum_{n=1}^7 b_{m,n}(s,t) f_n(s,t) = V_m(i,j) + \Omega_m(i,j) \quad (m=1, 2, \dots, 7), \quad (12)$$

где  $b_{m,n}(s,t)$  – переменные коэффициенты, зависящие от геометрических и физико-механических параметров оболочки, а также шагов основной сетки;  $f_n(s,t)$  – разрешающие функции;  $V_m(i,j)$  – обобщенные узловые нагрузки;  $\Omega_m(i,j)$  – нелинейные члены, учитывающие пластические деформации материала оболочки.

Решая в каждом приближении методом дополнительных напряжений систему разностных уравнений, описывающих упругопластическое состояние сферической оболочки с рядом отверстий, получаем значения перемещений, углов поворота и перерезывающих усилий в узлах основной сетки. Далее с использованием формул (9) вычисляем деформации оболочки в соответствующих точках. Напряжения за пределом упругости при известных деформациях определяем с помощью итерационного процесса, который дает возможность учитывать изменение коэффициента поперечной деформации и состоит из следующих шагов.

1. Из статической гипотезы Кирхгофа ( $\sigma^{33} = 0$ ) определяем поперечную деформацию

$$e_{33}^{(s)} = - \frac{\nu_i^{(s-1)}}{1 - \nu_i^{(s-1)}} a^{mn} e_{mm}^{(s)}. \quad (13)$$

Поскольку функция пластичности  $\omega_i$  и коэффициент поперечной деформации  $\nu_i$  неизвестны, то необходимо организовать итерационный процесс для их определения. В качестве нулевого приближения для реализации данного процесса принимаем  $\omega_i^{(0)} = 0$  и  $\nu_i^{(0)} = \nu$ .

2. Вычисляем интенсивность деформаций согласно формуле

$$e_i^{(s)} = \frac{1}{3} \sqrt{2(3a^{km} a^{ln} - a^{kl} a^{mn}) e_{kl}^{(s)} e_{mn}^{(s)} + 4e_{33}^{(s)} (e_{33}^{(s)} - a^{mn} e_{mn}^{(s)})}. \quad (14)$$

3. С помощью диаграммы деформирования определяем интенсивность напряжений  $\sigma_i^{(s)} = \sigma_i(e_i^{(s)})$ .

4. По формулам (5) вычисляем  $\omega_i^{(s)}$  и  $\nu_i^{(s)}$ .

5. Проверяем условие окончания итерационного процесса

$$\left| \frac{\nu_i^{(s)} - \nu_i^{(s-1)}}{\nu_i^{(s-1)}} \right| \leq \varepsilon. \quad (15)$$

6. При невыполнении условия (15) переходим к п. 1 и выполняем операции, предусмотренные п.п. 1 – 5. Если условие (15) выполняется, то по формулам (4) определяем напряжения  $\sigma_{(0)}^{mn}$ ,  $\sigma_{(p)}^{mn}$  и  $\sigma^{mn}$ .

Отметим, что для несжимаемых материалов ( $\nu = \nu_i = 0,5$ ) отпадает необходимость в организации итерационного цикла и процесс вычисления напряжений за пределом упругости значительно упрощается.

Разработанная методика реализована в виде комплекса прикладных программ. Всестороннее тестирование предложенной методики и созданного программного обеспечения показало [20], что используемые для вычисления компонент деформации конечно-разностные соотношения в векторной форме (9) точно описывают перемещения оболочки как жесткого целого и свободны от так называемого мембранного запирания, что значительно повышает точность решения данных задач.

### 3. Числовые результаты и их анализ.

В качестве числового примера представим результаты исследования упругопластического состояния сферической оболочки с рядом одинаковых периодически расположенных круговых отверстий радиуса  $r_0$  (рис. 2). Оболочка изготовлена из сплава АМг-6 и нагружена внутренним давлением интенсивности  $p_3 = p_3^0 \cdot 10^5$  Па.

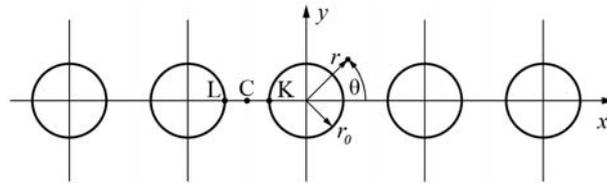


Рис. 2

Числовые результаты представлены для оболочки с такими геометрическими и физико-механическими параметрами:

$$R/h = 200; \quad r_0/h = 20; \quad d/r_0 = 0,3; 0,4; 0,5; 1,0; 2,0;$$

$$E = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,3 \dots 0,5; \quad \sigma_n = 140 \text{ МПа}; \quad \varepsilon_n = 0,002,$$

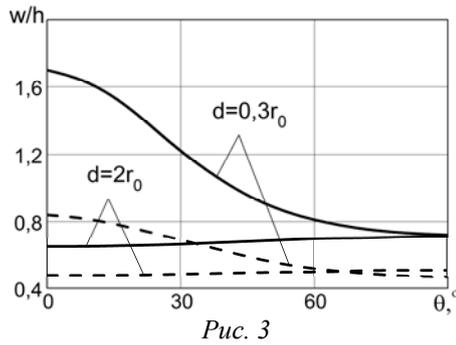
где  $d$  – длина перемычки ЛК.

Принято, что отверстия закрыты крышками, которые передают на их контуры только действие перерезывающих усилий  $Q_k = p_3 r_0 / 2$ , а на достаточном удалении от контуров отверстий имеет место безмоментное состояние:

$$w = \frac{1-\nu}{2Eh} p_3 R^2; T_k = p_3 R / 2; S_k = 0; M_k = 0.$$

Введем в области, которую занимает в плане срединная поверхность оболочки, декартовую  $(x, y)$  и полярную  $(r, \theta)$  системы координат (рис. 2). Учитывая периодичность и симметрию, за расчетную схему примем область  $(\Sigma)$ , ограниченную контуром отверстия, а также линиями:  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = r_0 + d/2$  и  $x^2 + y^2 = 25r_0^2$ .

Конкретные числовые результаты решения линейных (ЛЗ) и физически нелинейных задач (ФНЗ) получены для равномерного внутреннего давления интенсивности  $p_3^0 = 5$ .



На рис. 3 показан характер изменения относительных прогибов  $(w/h)$  вдоль контура отверстия  $(r = r_0; 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ . Данные приведены для оболочки с наименьшей  $(d/r_0 = 0,3)$  и наибольшей  $(d/r_0 = 2)$  длиной перемычки как для ЛЗ (штриховые кривые), так и ФНЗ (сплошные кривые).

В табл. 1 и 2 представлены значения окружных деформаций  $e_\theta = e_{(22)}$  и напряжений  $\sigma_\theta^0$  ( $\sigma_\theta = \sigma^{(22)} = \sigma_\theta^0 \cdot 10^5$  Па) в нескольких точках контура отверстия  $(r = r_0; 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$  на внешней и внутренней поверхностях оболочки  $(\zeta = \gamma/h = \pm 0,5)$ . Результаты решения задач в линейно-упругой (ЛЗ) и в физически нелинейной (ФНЗ) постановках приведены для двух значений длины перемычки  $d/r_0 = 0,3$  (табл. 1) и  $d/r_0 = 2,0$  (табл. 2).

Таблица 1

$d/r_0$	$\theta^\circ$	$\zeta$	$e_\theta \cdot 10^2$		$\sigma_\theta^0$	
			ЛЗ	ФНЗ	ЛЗ	ФНЗ
0,3	0	0,5	0,7991	4,3440	5592	2516
		-0,5	0,4025	2,9750	2814	2299
	30	0,5	0,3886	0,8344	2720	1817
		-0,5	0,2881	0,9131	2016	1854
	45	0,5	0,3413	0,4573	2388	1634
		-0,5	0,3009	0,6301	2105	1744
	60	0,5	0,3859	0,5983	2700	1728
		-0,5	0,3229	0,5566	2259	1709
	90	0,5	0,4311	0,7186	3015	1772
		-0,5	0,3190	0,5229	2231	1692

Таблица 2

$d/r_0$	$\theta^\circ$	$\zeta$	$e_\theta \cdot 10^2$		$\sigma_\theta^0$	
			ЛЗ	ФНЗ	ЛЗ	ФНЗ
2,0	0	0,5	0,4416	0,6242	3088	1750
		-0,5	0,2634	0,3628	1842	1561
	30	0,5	0,4479	0,6468	3132	1760
		-0,5	0,2589	0,3611	1809	1558
	45	0,5	0,4483	0,6499	3132	1757
		-0,5	0,2506	0,3452	1750	1545
	60	0,5	0,4471	0,6445	3124	1755
		-0,5	0,2426	0,3300	1695	1533
	90	0,5	0,4445	0,6358	3104	1750
		-0,5	0,2342	0,3138	1635	1516

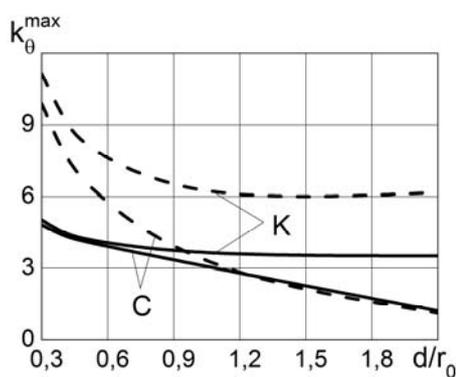


Рис. 4

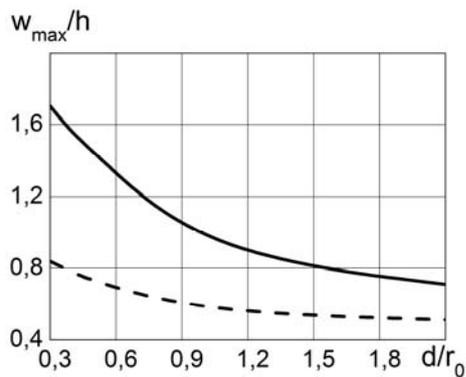


Рис. 5

Зависимости максимальных значений коэффициентов концентрации окружных напряжений ( $k_{\theta}^{\max} = 2\sigma_{\theta}^{\max} / qR$ ) на концах (точки  $K, L$  на рис. 2) и в центре (точка  $C$ ) перемычки, а также максимальных относительных прогибов ( $w_{\max} / h$ ) от длины перемычки ( $d / r_0$ ) изображены на рис. 4 и 5, соответственно.

Из представленных результатов решения как ЛЗ, так и ФНЗ следует, что для данной оболочки при небольшой длине перемычки и действии равномерного внутреннего давления наиболее опасными являются точки, которые расположены в сечениях ( $r = r_0; \theta = 0^\circ$ ) на внешней поверхности оболочки ( $\zeta = 0,5$ ), где имеют место наибольшие напряжения ( $\sigma_{\theta}$ ), деформации ( $e_{\theta}$ ) и прогибы ( $w$ ).

Учет пластических деформаций материала оболочки приводит к выравниванию напряжений как по толщине оболочки, так и на контурах отверстий, а также к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на 55% при  $d / r_0 = 0,3$  и на 44% – при  $d / r_0 = 2$ . Кроме этого, максимальные деформации и прогибы для ФНЗ больше соответствующих данных ЛЗ на 44 и 103% при  $d / r_0 = 0,3$  и на 45 и 39% – при  $d / r_0 = 2$ .

При уменьшении длины перемычки наибольшие напряжения, деформации и прогибы возрастают: от значений  $\sigma_{\max}^0 = 3132$ ,  $e_{\max} = 0,4483 \cdot 10^{-2}$  и  $w_{\max} / h = 0,5111$  при  $d / r_0 = 2$  к значениям  $\sigma_{\max}^0 = 5592$ ,  $e_{\max} = 0,7991 \cdot 10^{-2}$  и  $w_{\max} / h = 0,837$  при  $d / r_0 = 0,3$  для (ЛЗ); от  $\sigma_{\max}^0 = 1760$ ,  $e_{\max} = 0,6499 \cdot 10^{-2}$  и  $w_{\max} / h = 0,7086$  при  $d / r_0 = 2$  к  $\sigma_{\max}^0 = 2516$ ,  $e_{\max} = 4,344 \cdot 10^{-2}$  и  $w_{\max} / h = 1,702$  при  $d / r_0 = 0,3$  (для ФНЗ). Как видно из рис. 4, при сближении отверстий также происходит выравнивание напряжений на линии центров. Анализ полученных числовых результатов свидетельствует о том, что в случае многосвязных сферических оболочек с рядом одинаковых периодически расположенных круговых отверстий при  $d / r_0 \geq 2$  взаимным влиянием контуров отверстий можно пренебречь.

#### Заключение.

Таким образом, в работе дана постановка и изложена методика численного решения двумерных упругопластических задач для тонких сферических оболочек, ослабленных рядом одинаковых круговых отверстий, которая базируется на применении метода дополнительных напряжений и вариационного векторно-разностного метода. С помощью разработанной методики исследовано упругопластическое состояние сферической оболочки с рядом одинаковых круговых отверстий, центры которых расположены на одинаковых расстояниях друг от друга, при действии равномерного внутреннего давления. Числовые результаты представлены в виде таблиц и графиков для нескольких значений длины перемычки. В дальнейшем представляет интерес решение нелинейных периодических и двоякопериодических задач для тонких оболочек с подкрепленными отверстиями.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку задач статики для пружнопластичних сферичних оболонок з рядом однакових кругових отворів і розроблено методику чисельного розв'язання даного класу нелінійних задач. Запропонована методика базується на застосуванні методу додаткових напружень і варіаційного векторно-різницевого методу. Для оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском, досліджено вплив пластичних деформацій і геометричних параметрів на розподіл напружень, деформацій і переміщень в зоні їх концентрації.

1. Гузь А.Н. О решении задач для пологой сферической оболочки в случае многосвязных областей // Докл. АН СССР. – 1964. – **158**, № 16. – С. 1281 – 1284.
2. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Сферические днища, ослабленные отверстиями – К.: Наук. думка, 1970. – 324 с.
3. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т.1). – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
4. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff – Love constraints // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2005. – **64**. – P. 1166 – 1206.
5. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1269 – 1300.
6. Kaufman A., Spera D. Investigation of the elastic-plastic stress state around reinforced opening in a spherical shell // NASA Scientific and Technical Publications. – Washington, 1965. – P. 1 – 27.
7. Kharat A., Kulkarni V.V. Stress concentration at openings in pressure vessels – a review // Int. J. of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. – 2013. – **2**, N3. – P. 670 – 678.
8. Liu J.-S., Parks G.T., Clarkson P.J. Shape optimisation of axisymmetric cylindrical nozzles in spherical pressure vessels subject to stress constraints // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2001. – **78**. – P. 1 – 9.
9. Lutskaya I.V., Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Elastic Deformation of Thin Composite Shells of Discretely Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 6. – P. 616 – 623.
10. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress–Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 425 – 433.
11. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
12. Murthy S.S., Gallagher R.H. Anisotropic cylindrical shell element based on discrete Kirchhoff theory // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1983. – **19**, N 12. – P. 1805 – 1823.
13. Pilkey W.D., Pilkey D.D. Peterson's Stress Concentration Factors // John Wiley & Sons, Inc., USA, 2008. – 560 p.
14. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open J. of Composite Materials. – 2012. – **2**. – P. 61 – 86.
15. Rahimi G.H., Alashti R.A. Lower bound to plastic load of cylinders with opening under combined loading // J. of Thin-Walled Structures. – 2007. – **45**. – P. 363 – 370.
16. Ryu C.H., Lee Y.S., Choi M.H., Kim Y.W. A study on stress analysis of orthotropic composite cylindrical shells with a circular or an elliptical cutout // KSME Int. J. – 2004. – **18**, N 5. – P. 808 – 813.
17. Senocak E., Waas A.M. Optimally reinforced cutouts in laminated circular cylindrical shells // Int. J. of Mech. Sci. – 1996. – **38**, N 2. – P. 121 – 140.
18. Shevchenko V.P., Zakora S.V. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 159 – 166.
19. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 11. – P. 1280 – 1287.
20. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Rudenko I.B. Elastoplastic State of Spherical Shells with Cyclically Symmetric Circular Holes // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 573 – 582.

Поступила 25.01. 2016

Утверждена в печать 14.03.2017