А.А.Мартынюк, Л.Н.Чернецкая, Ю.А.Мартынюк-Черниенко

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ

Институт механики им.С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; email:center@inmech.kiev.ua

Abstract. The affine systems of special type are considered. For this class of system of equations, the new conditions of the motion stabilization by a linear control of special kind are established. These conditions are based on restrictions on the fundamental matrix of linear approximation of the system and the vector-function of nonlinearities. At that, both the linear and the nonlinear integral inequalities are applied.

Key words: pseudo-linear affine system, stability, boundedness, estimates of solutions.

Введение.

Исследование аффинных систем является актуальной темой из-за их применения во многих технических приложениях (см. [2, 3, 5] и библиографию там). Среди применяемых методов исследования отметим прямой метод Ляпунова [4] и метод интегральных неравенств [6, 8, 9].

В данной статье для класса аффинных систем установлены условия стабилизации при помощи линейного управления. Статья построена по следующему плану.

В разделах 1-2 приведена постановка задачи и выполнено преобразование исходных уравнений к виду, удобному для дальнейшего исследования.

В разделе 3 приведены результаты анализа условий стабилизации движения линейным управлением.

В разделе 4 указаны условия стабилизации движения псевдолинейной аффинной системы специального вида.

В разделе 5 обсуждаются результаты данной статьи и указаны некоторые нерешенные задачи в данном направлении.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x + B(t,x) + G\int_{t_0} u(s)ds; \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $A(t,x)-$ $n\times n$-матрица с непрерывными элементами на произведении $R_+ \times D$, $D \subset R^n$, $B(t,x) - n\times m$-матрица с элементами аналогичного содержания; G – $n\times m$-постоянная матрица. Заметим, что система вида (1) с линейными матрицами рассматривалась в работе [12].

Представляет интерес задача о стабилизации состояния x=0 системы (1) к устойчивости определенного типа при линейном управлении $u(t)$ специального вида и при условии, что $A(t,0) = B(t,0) = 0$ при всех $t \ge t_0$.

2. Преобразование системы (1).

Рассмотрим укороченную систему, соответствующую системе (1)

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x)x + B(t, x)u; \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

и управление $u(t) = -K_1 x(t)$, где $K_1 -$ $n \times m$ -постоянная матрица. Из уравнений (3) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + D(t, x); \tag{5}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

где

$$C(t) = \frac{\partial}{\partial x}(A(t, x) - B(t, x)K_1)|_{x=0}; \quad D(t, x) = (A(t, x) - B(t, x)K_1)x - C(t)x.$$

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица не автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x, \tag{7}$$

с начальным значением $\Phi(t_0) = I - n \times n$ -единичная матрица. Кроме того, $D(t, x) = 0$ при $x = 0$ при всех $t \geq t_0$.

3. Анализ устойчивости системы (3).

Укажем условия, при которых линейное управление $u(t) = -K_1 x(t)$ обеспечивает равномерную (асимптотическую) устойчивость нулевого решения системы (7) и сохранение этого типа устойчивости в системе (5).

Теорема 1. Пусть управление $u(t) = -K_1 x(t)$ такое, что для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (7) существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\left\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right\| \leq M \quad \text{при всех} \quad t \leq s \leq t < \infty. \tag{8}$$

Предположим, что $D(t, x)$ в системе (5) удовлетворяет неравенству

$$H_1 \left\|D(t, x)\right\| \leq \gamma(t)\left\|x\right\|, \tag{9}$$

где $\gamma(t)$ – неотрицательная непрерывная функция, для которой

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\, ds < \infty. \tag{10}$$

Тогда, для любого $0 < c \leq H < \infty$ и $t^* \geq t_0$ найдется положительная постоянная Q такая, что из условия $t^* \geq t_0$ таком, что $\left\|x(t^*)\right\| < c/Q$ для решения $x(t)$ системы (5) следует оценка

$$\left\|x(t)\right\| < c \quad \text{при всех} \quad t \geq t^*.$$

Если наряду с условиями (8) – (10) $\left\|\Phi(t)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$, тогда $\left\|x(t)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Для решения $x(t)$ системы (5) при начальном условии $x(t^*) = x^*$ верно соотношение

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t^*)x^* + \int_{t^*}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)D(s, x(s))\, ds. \tag{11}$$

Учитывая условия теоремы 1 (неравенства (8) – (10)), получаем

$$\|x(t)\| \le M\left\|x^*\right\| + M\int_{t^*}^{t}\gamma(s)\|x(s)\|\,ds \quad \text{при} \quad t \ge t^*. \tag{12}$$

Из оценки (12), согласно леммы Гронуолла – Белмана [11], получим

$$\|x(t)\| \le M\left\|x^*\right\|\exp\left(M\int_{t^*}^{t}\gamma(s)\,ds\right) \le Q\left\|x^*\right\|$$

при всех $t \ge t^*$, где

$$Q = M\exp\left(M\int_{t_0}^{\infty}\gamma(s)\,ds\right).$$

Далее рассмотрим решение $x(t)$ системы (5) при условии, что $\|\Phi(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $t_1 \ge t_0$ так, чтобы

$$MQ(t_1)\|x(t_1)\|\int_{t_1}^{\infty}\gamma(s)\,ds < \varepsilon \tag{13}$$

и учитывая, что $\Phi(t_0) = I$, из соотношения

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)D(s,x(s))\,ds$$

получаем оценку

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\|\left(\|x(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)D(s,x(s))\,ds\right\|\right) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

при достаточно большом t. Отсюда следует, что $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует такое утверждение.

Следствие 1. Если управление $u(t) = -K_1x(t)$ выбрано так, что нулевое решение системы (7) равномерно (асимптотически) устойчиво, тогда нулевое решение системы (5) равномерно (асимптотически) устойчиво.

Далее рассмотрим движение системы (3) в смысле следующего определения.

Определение 1 (cf. [1]). Решение $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ системы (3) строго устойчиво при управлении $u(t) = -K_1x(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом другом решении $\overline{x}(t) = x(t,t_0,\overline{x}_0)$, $\overline{x}_0 \ne x_0$, неравенства $\|\overline{x}(t_1) - x(t_1)\| \le \delta$ и $t_1 \ge t_0$ влекут оценку $\|\overline{x}(t) - x(t)\| \le \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$.

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в системе (3) управление $u(t) = -K_1x(t)$ выбрано так, что для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (7) существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|\Phi(t)\| \le M, \quad \left\|\Phi^{-1}(t)\right\| \le M \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0. \tag{14}$$

Если вектор-функция $D(t,x)$ такова, что выполняются оценки (9), (10), тогда существует постоянная Q^* такая, что решение $x(t)$ системы (3) с начальным условием $\left\|x(t^*)\right\| < c/Q$, где $t_1 \ge t_0$ удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \le Q^* \|x(t^*)\| \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0 .$$

Доказательство. Из соотношения (11) при условиях (14) получаем

$$\|x(t)\| = M^2 \|x(t^*)\| + M^2 \int_{t_1}^{t} \gamma(s) \|x(s)\| ds \tag{15}$$

и, следовательно,

$$\|x(t)\| \le M^2 \|x^*\| \exp\left(M^2 \int_{t_1}^{t} \gamma(s)\, ds \right) \le M^2 \|x^*\| \exp\left(M^2 \int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\, ds \right) = Q^* \|x^*\|,$$

где

$$Q^* = M^2 \exp\left(M^2 \int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\, ds \right).$$

Этим теорема 2 доказана. Из теоремы 2 следует такое утверждение.

Следствие 2. Если управление $u(t) = -K_1 x(t)$ в системе (3) выбрано так, что решение $x(t)$ системы (7) строго устойчиво и вектор-функция $D(t, x)$ удовлетворяет условиям (9), (10) тогда решение $x(t)$ системы (3) строго устойчиво.

Теорема 3. Пусть в системе (3) управление $u(t) = -K_1 x(t)$ выбрано так, что для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (7) существуют постоянные $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le M \exp[-\alpha(t-s)] \quad \text{при} \quad t \ge s \ge t_0 .$$

Если вектор-функция $D(t, x)$ такова, что выполняются оценки (9), (10) тогда для любого решения $x(t)$ системы (3) для которого $\|x(t_1)\| < c/M$, $0 < c < \infty$, определенного при всех $t_1 \ge t_0$, верна оценка

$$\|x(t)\| \le M_1 \exp[-\alpha(t-t_1)] \|x(t_1)\| \quad \text{при} \quad t > t_1 ,$$

где $M_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство. Из соотношения (11) при выполнении условий теоремы 3 имеем

$$\|x(t)\| \le M \exp[-\alpha(t-s)] \|x(t_1)\| + M \int_{t_1}^{t} \exp[-\alpha(t-s)] \gamma(s) \|x(s)\| ds . \tag{16}$$

Обозначим $w(t) = \|x(t)\| \exp[\alpha t]$, $t \ge t_0$, и неравенство (16) перепишем в виде

$$w(t) \le M w(t_1) + M \int_{t_1}^{t} \gamma(s) w(s)\, ds, \ t \ge t_1. \tag{17}$$

Из неравенства (17) получаем

$$w(t) \le M w(t_1) \exp\left[M \int_{t_1}^{t} \gamma(s)\, ds \right] \le M w(t_1) \exp\left[M \int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\, ds \right] \le M_1 w(t_1) , \tag{18}$$

где $M_1 = M \exp\left[M \int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\, ds_1 \right]$. Из оценки (18) следует, что

$$\|x(t)\| \le M_1 \exp[-\alpha(t-t_1)] \|x(t_1)\| \quad \text{при} \quad t > t_1 .$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. Если управление $u(t) = -K_1 x(t)$ в системе (3) выбрано так, что решение $x(t)$ системы (7) равномерно асимптотически устойчиво, тогда при выполнении условий (9) и (10) решение $x = 0$ системы (3) равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 4. Пусть в системе (3) управление $u(t) = -K_1 x(t)$ выбрано так, что для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (7) существуют постоянные $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le M \exp[-\alpha(t-s)]$ при всех $t \ge s \ge t_0$ и, кроме того, выполняется оценка $\|D(t, x)\| \le R\|x\|$, где $R < \alpha / M$.

Тогда любое решение $x(t)$ системы (3) для которого $\|x(t_1)\| < c/M$, $0 < c < \infty$ определено при всех $t_1 \ge t_0$ и

$$\|x(t)\| \le M \exp[-\beta(t-s)]\|x(t_1)\| \quad \text{при всех} \quad t > t_1, \text{ где } \beta = \alpha - RM .$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы 4 получим оценку, аналогичную оценке (17):

$$w(t) \le Mw(t_1) + RM\int_{t_1}^{t} w(s)\,ds .$$

Отсюда следует, что

$$w(t) \le Mw(t_1)\exp[RM(t-t_1)] \quad \text{при всех} \quad t > t_1$$

и далее

$$\|x(t)\| \le M \exp[-\beta(t-t_1)]\|x(t_1)\| \quad \text{при всех } t > t_1 .$$

4. Анализ устойчивости системы (1).

Пусть в системе (1) управление $u(t)$ выбрано в виде

$$u(t) = -K_1 x(t) - K_2 \int_0^t u(s)\,ds , \tag{19}$$

где K_1 и K_2 – постоянные матрицы соответствующей размерности и K_2 – обратимая матрица. Из (19) следует, что

$$\int_0^t u(s)\,ds = (K_2^{-1})(-K_1 x - u) = -K_2^{-1}K_1 x - K_2^{-1}u . \tag{20}$$

Учитывая (20), система (1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x)x + B(t, x)u + G(-K_2^{-1}x - K_2^{-1}u) = A_1(t, x)x + B_1(t, x)u, \tag{21}$$

где $A_1(t, x) = A(t, x) - GK_2^{-1}$, $B_1(t, x) = B(t, x) - GK_2^{-1}$.

Далее в системе (21) управление $u(t)$ выбираем в виде

$$u_0(t) = -K_0 x(t), \tag{22}$$

где K_0 – постоянная матрица соответствующей размерности. При управлении (22) система (21) преобразуется к следующей:

$$\frac{dx}{dt} = (A_1(t, x) - B_1(t, x)K_0)x; \quad x(0) = x_0. \tag{23}$$

Выполняя линеаризацию системы (23), получим

$$\frac{dx}{dt} = C^*(t)x + D^*(t, x), \tag{24}$$

$$x(0) = x_0, \tag{25}$$

где

$$C^*(t)=\frac{\partial}{\partial x}(A_1(t,x)-B_1(t,x)K_0)\,|_{x=0};\quad D^*(t,x)=(A_1(t,x)-B_1(t,x)K_0)x-C^*(t)x.$$

Устойчивость системы (25), при условиях типа (8) – (10), может быть исследована аналогично тому, как исследована система (8).

Систему (24) при начальных условиях (25) будем исследовать при таком предположении: существуют неотрицательные интегрируемые функции $a(t)$, и $b(t)$ при всех $t\ge 0$ такие, что

$$\left\|C^*(t)\right\|\le a(t)\quad \text{при всех}\quad t\ge 0\,; \tag{26}$$

$$\left\|D^*(t,x)\right\|\le b(t)\left\|x\right\|^k,\quad k>1,\quad \text{при всех}\quad t\ge 0\,,\ \text{равномерно по}\quad x\in S\subset R^n\,. \tag{27}$$

Далее применяется следующее утверждение.

Лемма 1. (cf. [7, 8, 10]) Пусть для системы (24) выполняются условия (26), (27). Тогда для нормы решений $x(t)$ задачи (24), (25) верна оценка

$$\left\|x(t)\right\|\le\left\|x_0\right\|\exp\left[\int_0^t a(s)\,ds\right](L(t))^{-1/(k-1)} \tag{28}$$

для тех значений $t\in R_+$, для которых

$$L(t)=\left\{1-(k-1)\left\|x_0\right\|^{k-1}\int_0^t b(s)\exp\left[(k-1)\int_0^s a(\tau)\,d\tau\right]ds\right\}>0\,.$$

Доказательство. Из системы (24) при условиях (26), (27) получаем

$$\left\|x(t)\right\|\le\left\|x_0\right\|+\int_0^t(a(s)\left\|x(s)\right\|+b(s)\left\|x(s)\right\|^k)\,ds=\left\|x_0\right\|+\int_0^t(a(s)+b(s)\left\|x(s)\right\|^{k-1})\left\|x(s)\right\|ds\,. \tag{29}$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла – Беллмана, получаем

$$\left\|x(t)\right\|\le\left\|x_0\right\|\exp\left[\int_0^t(a(s)+b(s)\left\|x(s)\right\|^{k-1})\,ds\right]. \tag{30}$$

Выполняя в этом неравенстве оценку сверху слагаемого

$$\exp\left[\int_0^t b(s)\left\|x(s)\right\|^{k-1}ds\right], \tag{31}$$

получаем неравенство (28). Лемма 1 доказана.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть выполняются условия:

(1) в системе (1) управления (19) и (22) выбраны так, что для слагаемых правой части системы (24) выполняются оценки (26), (27);

(2) для любого $t_0\in R_+$ выполняется неравенство

$$L(t)=\left\{1-(k-1)\left\|x_0\right\|^{k-1}\int_{t_0}^t b(s)\exp\left[(k-1)\int_{t_0}^s a(\tau)\,d\tau\right]ds\right\}>0\quad \text{при всех}\quad t\ge t_0\,; \tag{32}$$

(3) для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$ такое, что

$$\exp\left[\int_{t_0}^t a(s)ds\right](L(t))^{-1/(k-1)}<\frac{\varepsilon}{\delta}\quad \text{при всех}\quad t\ge t_0\,. \tag{33}$$

Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 5 для решений $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) верна оценка (28) при всех $t \ge t_0$. Так как $L(t) > 0$ при $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, то из (33) находим $\|x(t)\| < \delta(t_0, \varepsilon)\,\varepsilon / \delta = \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$. Этим устойчивость решения $x = 0$ системы (1) при управлениях (19) и (22) доказана.

Следствие 4. Если в условиях теоремы 5 величина δ может быть выбрана вне зависимости от t_0 и при этом выполняются все условия теоремы 5, то нулевое решение системы (1) будет равномерно устойчивым.

Теорема 6. Пусть выполняются:

(1) условие (1) теоремы 5;

(2) существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что выполняется неравенство (32) при $\|x_0\| < \delta(t_0)$;

(3) $\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds \to \infty$ при $t \to \infty$.

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. При выполнении условия (1) теоремы 5, для решения $x(t)$ имеет место оценка (28). Из оценки (28) следует, что

$$\|x(t)\| \le \delta(t_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right](L(t))^{-\frac{1}{k-1}}$$

и в силу условия (3) теоремы (6) $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Это доказывает теорему 6.

Пример. Рассмотрим систему (3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t,x)u\,, \tag{34}$$

где $u = (u_1(t), u_2(t))^T$ и $x \in R^2$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1-\alpha\cos^2 t & 1-\alpha\sin t\cos t \\ -1-\alpha\sin t\cos t & -1-\alpha\sin^2 t \end{pmatrix} \quad B(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения матрицы $A((t)$:

$$\det(A(t) - \lambda E) = 0$$

следующие: $\{(\alpha-2) \pm (\alpha^2-4)\}/2$ При $\alpha < 2, \lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, однако среди решений системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x; \quad x(t_0) = x_0$$

существуют неограниченные.

Представляет интерес задача выбора управления

$$u(t) = -K_1(t)x(t)\,,$$

где $K_1(t) - 2\times 2$ – матрица с непрерывными на R_+ элементами такими, что нулевое решение системы (34) устойчиво.

Нетрудно показать, что матрица $K_1(t)$ в управлении $u(t)$ может быть выбрана в виде

$$K_1(t) = 3\begin{pmatrix} \cos^2 t & -\sin t\cos t \\ -\sin t\cos t & -\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Заключение.

Новые результаты о стабилизации движения псевдо-линейных аффинных систем получены выше в статье на основе формулы вариации параметров и интегральных неравенств. В теоремах 1 − 6 введены ограничения на фундаментальную матрицу линейного приближения уравнений возмущенного движения и вектор-функцию нелинейных составляющих. Этот подход может представить интерес при исследовании крупномасштабных систем, в особенности, в том случае, когда функции связи между подсистемами могут быть оценены неравенствами вида (9) или (27). Среди открытых проблем, для систем вида (1), отметим задачу об устойчивости на конечном интервале и задачу об ограниченности движения.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто афінні системи спеціального виду. Для цього класу систем рівнянь встановлено нові умови стабілізації руху лінійним керуванням спеціального виду. Ці умови основані на обмеженнях на фундаментальну матрицю лінійного наближення системи і вектор-функцію нелінійностей. При цьому застосовано як лінійні, так і нелінійні інтегральні нерівності.

1. *Ascoli G.* Osservazioni sopra alcune questioni di stabilita 1 // Atti Acccad. Naz. Lincei Rend. Cl.Sci. Fis. Mat. Nat. − 1950. − N 9. − P. 129 − 134.
2. *Babenko E.A., Martynyuk A.A.* Stabilization of the Motion of a Nonlinear System with Interval Initial Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 182 – 191.
3. *Babenko E.A., Martynyuk A.A.* Effectiveness of a Roller Damper in Suppressing Conductor Galloping // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 413 – 421.
4. *Bacciotti A., Ceragioli F.* Stability and Stabilization of Discontinuous Systems and Non smooth Lyapunov Functions. − Dip. di Mat. del Politecnico di Torino, Manuscript. − 2016. – 21 p.
5. *Christophersen F.J.* Optimal Control and Analysis for Constrained Piecewise Affine Systems. − Diss. ETH, Zurich, No. 16807, Manuscript. − 2006. — 223 p.
6. *Elakkary A., Elalami N.*, Stabilizability: Application for attitude control systems of micro satellite // J. Theor. and Appl. Inform. Technology. − 2014. − **5**. − P. 325−333.
7. *Louartassi Y., Elhoussine El Mazoudi, Elalami N.* A new generalization of lemma Gronwall-Bellman // Appl. Math. Sci. − 2012. − **6**, N 13. − P. 621 − 628.
8. *Martynyuk A.A.* Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations // Appl. Math. − 2015. – N 6. − P. 182 − 194.
9. *Martynyuk A.A., Babenko Ye.A.* Finite time stability of uncertain affine systems // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2016. − **7**, N 1. − P. 179 − 196.
10. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya., Chernienko V.A.* Integral estimates of solution to nonlinear systems and their applications // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. − 2016. − **16**, N 1. − P. 1 − 11.
11. *Rama Mohana Rao M.* Ordinary Differential Equations: Theory and Applications. − New Delhi-Madras: Affiliated East-West Press Pvt Ltd, 1980. − 266 p.
12. *Skullestad A., Gilbert J.* H control of gravity gradient stabilized satellite // Control Engineering Practice. − 2000. − **8**. − P. 975 − 983.

Поступила 27.05.2016 Утверждена в печать 14.03.2017