

В. С. Кирилюк, О. И. Левчук

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОРТОТРОПНОГО ПЬЕЗО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: compos@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem on electric and stress state in an orthotropic electroelastic space with elliptic crack is considered under the force and electric loading. A solution of this problem is obtained by using the triple Fourier transform and the Fourier direct image of the Green function for the infinite orthotropic piezoelectric medium. A testing the approach is carried out for the case of the crack location in an isotropy plane of the transversely isotropic piezoelectric material, for which the exact solution of the problem exists. A comparison of approximate and exact results testifies the high efficiency of the used approach. A numerical study is carried out and a distribution of stress intensity factors along the elliptic crack front in the orthotropic electroelastic material is studied for different loadings.

Key words: orthotropic electroelastic material, plane elliptic crack, uniform loading, stress intensity factor.

Введение.

Во многих случаях при создании преобразователей энергии или датчиков для измерительной аппаратуры различного назначения используются электроупругие (пьезоэлектрические) материалы. Такие материалы, как правило, обладают значительной хрупкостью, что вызывает необходимость детального анализа распределения силовых и электрических полей в пьезоэлектрических телах с концентраторами напряжений типа полостей, включений, трещин. В то же время, решение трехмерных задач электроупругости (с учетом связанности силовых и электрических полей и анизотропных свойств электроупругих материалов) является достаточно сложной в математическом плане проблемой, поскольку исходная система уравнений для определения электронапряженного состояния представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений [1 – 3] значительно более сложной структуры, чем в случае упругого материала.

До настоящего времени наиболее полно исследованы двумерные задачи связанной электроупругости для пьезоэлектрического материала с концентраторами напряжений, среди которых можно отметить работы [7, 9, 10 и др]. Заметим, что в случае трансверсально-изотропного электроупругого материала, к которым относится наиболее широкий класс пьезоэлектрических материалов, в статьях [19, 24] предложены структурно подобные подходы к построению общих решений связанных уравнений электроупругости, с помощью которых получены точные решения целого ряда задач для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала с полостями, включениями, трещинами, которые специальным образом ориентированы относительно оси симметрии электроупругого тела.

В этих случаях предполагалось, что ось симметрии материала совпадает с осью вращения концентратора напряжений в виде полости или включения, а в случае круговой или эллиптической трещины принято, что она расположена в плоскости, перпендикулярной оси симметрии электроупругого материала [4, 6, 8, 11, 13, 14, 16 – 23, 26 – 28]. Среди указанных работ статьи [6, 8 – 10, 16 – 18, 21] содержат результаты исследований коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) при специальной ориентации трещин относительно оси симметрии в пьезоэлектрическом теле.

При этом в работах [13, 14, 16] исследованы общие закономерности распределения КИН вдоль границы плоской трещины произвольной формы, расположенной в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом материале в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Установлено соответствие выражений КИН для плоской трещины той же формы в трансверсально-изотропной электроупругой и изотропной упругой средах при тех же силовых нагрузках [13, 14] и при симметричном тепловом потоке [16]. В случае же другой ориентации дефектов (полостей, включений, трещин) в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом материале указанные подходы не эффективны и не позволяют получить решения пространственных задач электроупругости.

Отметим, что для трансверсально-изотропного электроупругого материала с произвольно ориентированной плоской трещиной круговой или эллиптической формы в работе [12] развит аналитико-численный подход, позволивший исследовать распределение КИН вдоль фронта трещины с учетом ее ориентации в материале. Отметим, что отдельные задачи электроупругости для ортотропных пьезоэлектрических материалов рассмотрены в работах [5, 29].

В данной работе аналитико-численный подход, основанный на использовании тройного преобразования Фурье по пространственным переменным и Фурье-образу функции Грина, распространен на случай ортотропного электроупругого материала с эллиптической трещиной. При его применении используется также теорема Коши о вычетах и квадратурные формулы Гаусса (при вычислении контурных интегралов, возникающих в процессе решения задачи). Для частных случаев (при определении трещины в плоскости симметрии электроупругого трансверсально-изотропного материала, а также в плоскости симметрии упругого ортотропного материала) имеет место совпадение результатов с данными других исследований. Изучено распределение КИН и КИНИН вдоль границы эллиптической трещины в ортотропном электроупругом материале при постоянном давлении на поверхности трещины и сдвиге в материале.

1. Постановка задачи и основные уравнения.

Пусть ортотропная электроупругая среда содержит эллиптическую трещину, расположенную в плоскости x_1x_2 (одной из трех ортогональных плоскостей упругой симметрии). Полагаем, что электроупругий материал находится под действием силовых и электрических полей полиномиального вида. Наличие трещины в среде, как концентратора напряжений, приводит к появлению возмущений основных силовых и электрических полей.

Полная система уравнений принимает следующий вид:
уравнения равновесия при отсутствии объемных сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

уравнения вынужденной электростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} + e_{nij} \Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} - k_{in} \Psi_{,n}, \quad (3)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ – компоненты напряжений, деформаций, перемещений, электрических перемещений (электрической индукции), напряженности электрического поля и электрический потенциал, соответственно. Также использованы следующие обозначения тензоров: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} – упругие модули, пьезомодули, диэлектрические проницаемости пьезоэлектрического материала. Для ортотропных электроупругих материалов упругие характеристики материала описываются девятью независимыми постоянными c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{23} , c_{44} , c_{55} , c_{66} ; пьезомодули – пятью величинами e_{15} , e_{24} , e_{31} , e_{32} , e_{33} ; диэлектрические проницаемости – тремя независи-

мыми постоянными k_{11} , k_{22} , k_{33} . Компоненты записанных в выражениях (3) тензоров связаны с соответствующими независимыми постоянными следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; & C_{2222} &= c_{22}; & C_{3333} &= c_{33}; & C_{1122} &= C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; & C_{2233} &= C_{3322} = c_{23}; & C_{2323} &= C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; & C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; & e_{223} &= e_{232} = e_{24}; & e_{311} &= e_{31}; & e_{322} &= e_{32}; & e_{333} &= e_{33}; & k_{11}; & k_{22}; & k_{33}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты этих трех тензоров равны нулю.

Для описания электроупругого состояния используем более унифицированные обозначения [8]. Представим в следующем виде:

упругие перемещения и электрический потенциал –

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \quad (4)$$

упругие деформации и интенсивность электрического поля –

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \quad (5)$$

напряжения или электрические перемещения –

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3; \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \quad (6)$$

электроупругие модули –

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_m, & J, M = 4. \end{cases} \quad (7)$$

С помощью введенных обозначений уравнения состояния (3) представим в следующем виде:

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn}. \quad (8)$$

Отметим, что рассматриваемая задача для плоской трещины не расщепляется, как для случая трансверсально-изотропного материала при расположении эллиптической трещины в плоскости изотропии материала, на две – симметричную и антисимметричную. Задачу следует рассматривать в общей постановке. При этом в граничные условия входят и нормальные и касательные усилия, а также нормальная составляющая вектора электрической индукции на поверхности трещины:

$$\tau_{13}^{\pm} = f(x_1, x_2); \quad \tau_{23}^{\pm} = g(x_1, x_2); \quad \sigma_{33}^{\pm} = -P(x_1, x_2); \quad (9)$$

$$D_3^{\pm} = -D(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in S; \quad U_M(\bar{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty,$$

где S – поверхность трещины. При заданном основном напряженном состоянии и электрической индукции в среде и свободной от силовых и электрических воздействий поверхности трещины, представив силовое и электрическое поля суперпозицией основного и возмущенного состояний, приходим к граничным условиям для определения возмущенного состояния.

2. Метод решения.

Функция Грина $G_{JM}(\vec{x} - \vec{x}')$ для бесконечной ортотропной электроупругой среды (фундаментальное решение) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$E_{kJMn} G_{JM, kn} + \delta_{JM} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0; \quad (10)$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ – дельта функция Дирака; δ_{JM} – символ Кронекера. Запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей переменной. Воспользуемся интегральным выражением фундаментального решения

$$G_{JM}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{JM}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (11)$$

где $A_{JM}(\vec{\xi})$ – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы

$$\{K_{JM}(\vec{\xi})\} = \{E_{iJMn} \xi_i \xi_n\} \quad (D(\vec{\xi}) - \text{ее определитель}). \quad (12)$$

Воспользовавшись тождеством Соммильяны для электроупругого материала, представим возмущенное электрическое и напряженное состояния, обобщая случай для чисто упругого материала [25], с помощью неизвестных скачков перемещений и электрического потенциала через поверхность трещины

$$U_I(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{IJM3} \xi_I^N A_{IJ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3} \iint_S b_M(\vec{x}') e^{-i\vec{\xi}^N \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2,$$

где для эллиптической трещины неизвестный вектор $\vec{b}(\vec{x})$ принимает вид

$$\vec{b}(\vec{x}) = \vec{b}^{(p,q)}(x_1/a_1 + ix_2/a_2)^p (x_1/a_1 - ix_2/a_2)^q (1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)^{1/2}; \quad (13)$$

a_1, a_2 – значения полуосей эллиптической трещины; $\vec{b}^{(p,q)}$ – постоянные четырехкомпонентного вектора, которые в общем случае являются комплексными числами. Суммирование проводится для ξ_3^M – корней уравнения $D(\vec{\xi}) = 0$ с отрицательной мнимой частью при $x_3 > 0$, а вектор $\vec{\xi}^M$ имеет вид $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Компоненты напряжений и электрической индукции будем вычислять с помощью выражений

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}(\vec{x}) &= E_{ijkl} U_{k,l} = \\ &= \left(\frac{-i}{4\pi^2} \right) \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{ijkl} E_{pQM3} \xi_I^N \xi_J^N A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3} b_M(\vec{x}') e^{-i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2. \end{aligned}$$

Следуя преобразованиям, аналогичным [25] для чисто упругого материала, в плоскости трещины компоненты напряжений и электрической индукции можно получить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}(x_1, x_2, 0) &= \frac{i}{4} \sum_{p,q} b_M^{(p,q)} \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{IJM}(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2, \xi_3^N(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2)) \times \\ &\times e^{i(p-q)\varphi} \frac{\partial^2}{\partial(\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2} \left[K^{(p,q)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y}) - K^{(p+1, q+1)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y}) \right] d\varphi; \quad (14) \end{aligned}$$

$$K^{(p,q)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y}) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q (-1)^{(m-n)/2} C_p^m C_q^n C_{m+n}^{(m+n)/2} \left(\frac{1 - (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2}{4} \right)^{(m+n)/2} (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^{p+q-m-n};$$

$$F_{iJM}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_{ijkl} E_{pQM3} \xi_p^N \xi_l^N \frac{A_{kQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3}, \quad (15)$$

где $m+n$ – целое четное число; $\eta_1 = \cos \varphi$, $\eta_2 = \sin \varphi$; $y_1 = x_1 / a_1$, $y_2 = x_2 / a_2$, $y = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$; а C_n^m – биномиальные коэффициенты.

Правая часть уравнений (14) является полиномом степени $p+q$, когда $|y| < 1$ (внутри эллиптической трещины). Посредством выбора неизвестных компонентов $b_M^{(p,q)}$ ($= 1, 2, 3, 4$), приравнявая коэффициенты при подобных членах (целиком аналогично упругому случаю [25]), можно удовлетворить граничным условиям при заданной силовой нагрузке и известной нормальной компоненте электрической индукции полиномиального вида.

Исследуем случай равномерной силовой и электрической нагрузки в ортотропном пьезоэлектрическом материале. Тогда на поверхности трещины получим

$$\Sigma_{ij}(\vec{x}) = \left(\frac{-i}{4} \right) \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(\eta_1 / a_1, \eta_2 / a_2, \xi_3^N(\eta_1 / a_1, \eta_2 / a_2)) b_M^{(0,0)} d\varphi,$$

где функция $F_{iJM}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ определяется по формулам (15).

После дополнительного анализа асимптотических выражений компонент напряжений и электрической индукции в плоскости трещины (на основе определения коэффициентов интенсивности напряжений и индукции K_{IJ}) получим

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi a} (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{-1/4} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(x_1 / a_1^2, x_2 / a_2^2, \xi_3^N(x_1 / a_1^2, x_2 / a_2^2)) b_M^{(0,0)};$$

$$K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1; \quad K_{IV} = K_D = k_{34}. \quad (16)$$

Компоненты вектора нормали для эллиптической трещины имеют вид $n_1 = (x_1 / a_1^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}$, $n_2 = (x_2 / a_2^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}$. Воспользовавшись при вычислении одномерных интегралов методом квадратур Гаусса и удовлетворив граничным условиям на поверхности трещины, получим неизвестные значения скачков перемещений и электрического потенциала.

Для тестирования развиваемого подхода рассмотрим задачу об эллиптической трещине в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом материале, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси симметрии изотропии электроупругого материала, при известном значении давления P_0 на поверхности трещины, а также при заданных сдвигающих усилиях $\sigma_{23}^0 \neq 0$. Нормальная компонента электрической индукции D_z^0 полагаем равной нулю на поверхности трещины. Согласно результатам [13] при такой ориентации плоской трещины коэффициенты интенсивности напряжений K_I не зависят от электроупругих свойств трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала и совпадают со значением КИН K_I для плоской трещины в упругом изотропном материале (при тех же симметричных нагрузках), а $K_D = 0$.

В то же время, коэффициенты интенсивности напряжений K_{II} и K_{III} при сдвиге зависят как от упругих, так и электрических свойств материала. Согласно исследованиям, проведенным в работе [14], их значения для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала можно получить из формул для КИН K_{II} и K_{III} для упру-

того изотропного материала при тех же сдвигающих нагрузках, где вместо коэффициента Пуассона ν в соответствующие выражения следует подставить значение ν_{PIEZO} , которое вычисляется специальным образом и зависит от десяти электроупругих постоянных трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала.

Представим значения ν_{PIEZO} для отдельных пьезокерамических материалов с помощью данных [14]. Так, согласно проведенным исследованиям для пьезоэлектрических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H получаем следующие значения ν_{PIEZO} : 0,48513; 0,48815; 0,47324; 0,34369; 0,37867. Исходные значения электроупругих постоянных для приведенных материалов приняты согласно [1, 10, 12, 17].

3. Числовые результаты.

На основе результатов работ [13, 14] для электроупругой трансверсально-изотропной среды, содержащей эллиптическую трещину, при внутреннем давлении P_0 на ее поверхности и сдвиге σ_{23}^0 в пьезоэлектрическом материале приходим к следующим выражениям КИН вдоль фронта внутренней эллиптической трещины:

$$K_I = \frac{P_0}{E(k)} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}; \quad (17)$$

$$K_{II} = (\pi a b)^{1/2} \frac{k^2 \sigma_{23}^0 \sin \beta}{[(k^2 + \nu_{PIEZO} k_1^2)E(k) - \nu_{PIEZO} k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (18)$$

$$K_{III} = \left(\frac{\pi b^3}{a} \right)^{1/2} \frac{(1 - \nu_{PIEZO}) k^2 \sigma_{23}^0 \cos \beta}{[(k^2 + \nu_{PIEZO} k_1^2)E(k) - \nu_{PIEZO} k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (19)$$

$$K_D = 0,$$

где $k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$, $k_1 = b/a$; $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Сравнения результатов исследований КИН K_I , K_{II} и K_{III} на основе двух подходов (с помощью формул (16) и согласно выражениям (17) – (19)) для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала PZT-4 приведены в табл. 1 – 3, в которых значения КИН, полученные по формулам (17) – (19), даны в круглых скобках. При вычислениях одномерных интегралов использована квадратурная формула Гаусса по 24 узлам. Большая полуось эллиптической трещины при расчетах полагалась равной единице.

Сравнение значений $K_I / P_0 \sqrt{a}$ дано в табл. 1.

Таблица 1

b/a	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0,999915 (0,999915)	1,013080 (1,013080)	1,045309 (1,045310)	1,081427 (1,081428)	1,108205 (1,108205)	1,117939 (1,117939)
0,6	0,833213 (0,833214)	0,866524 (0,866525)	0,939174 (0,939174)	1,010530 (1,010529)	1,058848 (1,058849)	1,075674 (1,075674)
0,4	0,616144 (0,616154)	0,682027 (0,682038)	0,798007 (0,798020)	0,894199 (0,894214)	0,954057 (0,954073)	0,974209 (0,974226)
0,2	0,337311 (0,337449)	0,454348 (0,454534)	0,588919 (0,589159)	0,681966 (0,682245)	0,681966 (0,682245)	0,736336 (0,736637)

В табл. 2 дано сравнение значений $K_{II} / \sigma_{23}^0 \sqrt{a}$.

Таблица 2

b/a	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0 (0)	0,477913 (0,477913)	0,881015 (0,881016)	1,172114 (1,172115)	1,344609 (1,344610)	1,401495 (1,401496)
0,6	0 (0)	0,487578 (0,487579)	0,855688 (0,855690)	1,094589 (1,094593)	1,228048 (1,228051)	1,271049 (1,271052)
0,4	0 (0)	0,476210 (0,476249)	0,774158 (0,774221)	0,950514 (0,950990)	1,047732 (1,047816)	1,078861 (1,078948)
0,2	0 (0)	0,401896 (0,402297)	0,589772 (0,590359)	0,700996 (0,701694)	0,763222 (0,763982)	0,783439 (0,784219)

В табл. 3 дано сравнение значений $K_{III} / \sigma_{23}^0 \sqrt{a}$.

Таблица 3

b/a	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0,645407 (0,645408)	0,605842 (0,605843)	0,499470 (0,499471)	0,350766 (0,350767)	0,179953 (0,179953)	0 (0)
0,6	0,506915 (0,506916)	0,463572 (0,463573)	0,363834 (0,363835)	0,245675 (0,245676)	0,123265 (0,123266)	0 (0)
0,4	0,351312 (0,351340)	0,301842 (0,301866)	0,219445 (0,219463)	0,142285 (0,142297)	0,070110 (0,070116)	0 (0)
0,2	0,180392 (0,180572)	0,127369 (0,127496)	0,0835892 (0,0836725)	0,0524449 (0,0524972)	0,0255361 (0,0255615)	0 (0)

Сравнение данных расчетов с применением двух подходов на всем интервале $[0, 2\pi]$ изменения угла β (интервал разбивался на 100 одинаковых подинтервалов, в концах которых проводилось сравнение значений) показало, примерно, такую же точность совпадения результатов исследований.

Для другого частного случая рассматриваемой задачи – случая нахождения плоской эллиптической трещины в упругом ортотропном материале (в плоскости упругой симметрии) также проведены сравнения с данными расчетов [15]. Для этого при вычислениях с помощью развиваемого подхода значения пяти пьезомодулей и величины трех диэлектрических проницаемостей полагались близкими нулевым значениям (при расчетах они получены умножением исходных значений этих величин на 10^{-12}).

В результате получено совпадение результатов вычислений КИН K_I , K_{II} , K_{III} до восьми значащих цифр, полученных с помощью использования преобразования Фурье для задачи теории упругости (для ортотропной упругой среды) и для задачи электроупругости (для ортотропного электроупругого пространства).

4. Анализ результатов исследований.

Рассмотрим ортотропный пьезоэлектрический материал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, электроупругие свойства которого (всего 17 независимых электроупругих параметров) приведены в [3]. Полагаем, что эллиптическая трещина расположена в плоскости xu пьезоэлектрического материала. На рис. 1 – 3 показано распределение КИН K_I , K_{II} , K_{III} при постоянном давлении P_0 на поверхности трещины и сдвиге σ_{yz}^0 в электроупругом материале. Кривые 1, 2, 3 относятся к случаям отношений полуосей $b/a = 0,3$; $0,5$; $0,7$, соответственно. Видно, что при увеличении отношения полуосей возрастают и соответствующие значения коэффициентов K_I , K_{II} , K_{III} . При этом, максималь-

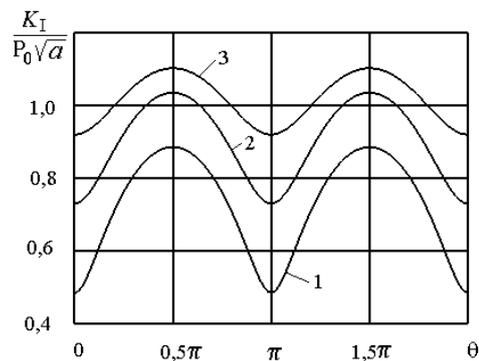


Рис. 1

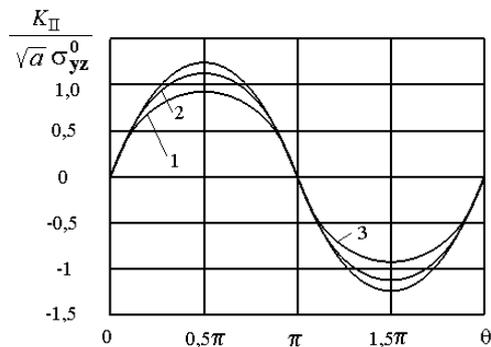


Рис. 2

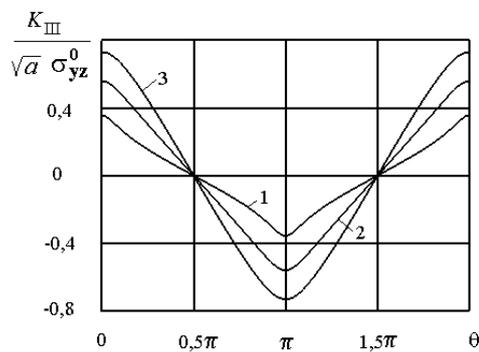


Рис. 3

ные значения КИН K_I и K_{II} достигаются при $\theta = \pi/2$ (на малой полуоси контура эллиптической трещины), а наибольшие значения K_{III} – при $\theta = \pi/2$ (на большей полуоси эллипса, ограничивающего поверхности трещины). При этом нулевые значения КИН K_{II} при сдвигающих усилиях σ_{yz}^0 достигаются в точках большей полуоси на контуре трещины, а нулевые значения K_{III} – в точках малой полуоси.

Заключение.

Таким образом, в данной работе исследовано напряженное состояние в ортотропной электроупругой среде с эллиптической трещиной. Изучено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины, расположенной в плоскости симметрии материала, при постоянном давлении на поверхности трещины, а также в случае сдвига в – ортотропном пьезоэлектрическом материале.

РЕЗЮМЕ. Досліджено задачу про електричний та напружений стани у ортотропному електропружному просторі з еліптичною тріщиною при силових та електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання потрібного перетворення Фур'є та Фур'є-образу функції Гріна для нескінченного ортотропного п'єзоелектричного середовища. Тестування підходу здійснено у випадку розташування тріщини у площині ізотропії трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного матеріалу, для якого існує точний розв'язок задачі. Порівняння результатів обчислень свідчать про високу ефективність використаного підходу. Проведено числові дослідження, вивчено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту еліптичної тріщини у ортотропному електропружному матеріалі при рівномірних навантаженнях.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т.; Т. 1).
2. Партон В.З., Кудряцев Б.А. Электроупругость пьезокерамических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 270 с.
4. Chen W.Q., Lim C.W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract.– 2005. – 131, N 3. – P. 231 – 246.
5. Chen W.Q., Cai J.B., Ye G.R., Wang Y.F. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer // Int. J. of Solids Struct. – 2004. – 41, N 18 – 19. – P. 5247 – 5263.

6. *Chiang C. R., Weng G.J.* The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // *Int. J. Fract.* 2005. – **134**, N 3 – 4. – P. 319 – 337.
7. *Dai L., Guo W., Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
8. *Dunn M.L., Taya M.* Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids // *J. Appl. Mech.* – 1994. – **61**, N 4. – P. 474 – 475.
9. *Kaloerov S.A.* Determining the Intensity Factors for Stresses, Electric-Flux Density, and Electric-Field Strength in Multiply Connected Electroelastic Anisotropic Media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 631 – 637.
10. *Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 623 – 639.
11. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Zavgorodnii A.V., Umrykhin I.N.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of a Viscoelastic Piezoelectric Material // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 614–622.
12. *Kirilyuk V.S.* Elastic State of a Transversely Isotropic Piezoelectric Body with an Arbitrarily Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 2. – P. 150 – 157.
13. *Kirilyuk V.S.* On the Stress State of a Piezoceramic Body with a flat Crack under Symmetric Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1263 – 1271.
14. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoelectric Ceramic Body with a Plane Crack under Antisymmetric loads // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 152 – 161.
15. *Kirilyuk V.S.* Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with Elliptical Crack under Tension and Shear // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 358 – 366.
16. *Kirilyuk V.S.* Thermostressed State of a Piezoelectric Body with a Plane Crack under Symmetric Thermal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N. 3. – P. 320 – 330.
17. *Levchenko V.V.* Effect of Boundary Conditions on the Natural Frequencies and Vibration Modes of Piezoelectric Plates with Radially Cut Electrodes // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 2. – P. 187 – 195.
18. *Lin S., Narita F., Shindo Y.* Electroelastic analysis of a penny-shaped crack in a piezoelectric ceramic under mode I loading // *Mech. Res. Com.* – 2003. – **30**, N 4. – P. 371 – 386.
19. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
20. *Podil'chuk Yu.N.* Electroelastic Equilibrium of Transversally Isotropic, Piezoceramic Media Containing Cavities, Inclusions, and Cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 10. – P. 1023 – 1034.
21. *Shang F., Kuna M., Kitamura T.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – **40**, N 3. – P. 237 – 246.
22. *Sladek J., Sladek V., Krahulec S., Song C.* Crack analyses in porous piezoelectric brittle materials by the SBFEM // *Engineering Fract. Mech.* – 2016. – **160**. – P. 78 – 94.
23. *Wang Y.J., Gao C.F., Song H.P.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material // *Mechanics Research Communications.* – 2015. – **65**. – P. 17 – 23.
24. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
25. *Willis J.R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // *Int. J. Eng. Sci.* – 1968. – **6**, N 5. – P. 253 – 263.
26. *Zhang T.Y., Gao C.F.* Fracture behaviors of piezoelectric materials // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – **41**, N 1 – 3. – P. 339 – 379.
27. *Zhao M.H., Li Y., Yan Y., Fan C.Y.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2016. – **67**. – P. 115 – 125.
28. *Zhao M.H., Pan Y.B., Fan C.Y., Xu G.T.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors // *Int. J. of Solids Struct.* – 2016. – **94 – 95**. – P. 50 – 59.
29. *Zhou Y., Chen W.Q., Lu C.F.* Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections // *Composite Structures.* – 2010. – **92**, N 4. – P. 1009 – 1018.

Поступила 31.08.2016

Утверждена в печать 14.03.2017