

П.З.Луговой¹, В.Н.Сиренко²
Ю.В.Скосаренко¹, Т.Я.Батутина²

ДИНАМИКА ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

¹ *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plugovyy@inmtech.kiev.ua*

² *Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»»,
г. Днепр, Украина; e-mail: batutinatet1@rambler.ru*

Abstract. The technique and computational program are developed for study of dynamics of the stiffened cylindrical shell contacting with elastic foundation. The shell is under action of local loadings that are distributed over small areas and change during the given short time by the linear law. The longitudinal reinforcing elements are taken into account by the structurally orthotropic scheme and the ring ribs – by the discrete scheme. The elastic foundation restricts the normal displacements and rotations of the shell middle surface relative to the circumferential coordinate line. To solve the problem, the method of expansion of solution by the natural modes is used. An influence of the local loading on parameters of shell deformation I studied on the test example. Some conclusions are proposed on an influence the impulse shape, the external forces action duration, and the shell reinforcing on the shell strain state under impulse loading.

Key words: cylindrical shell, stiffening ribs, strain state, dynamic local loadings.

Введение.

При использовании пирозамков для разделения тонкостенных элементов конструкций в последних распространяются возбуждения нестационарного характера. Отклик конструкции на локальную импульсную нагрузку, которая генерируется взрывом пирозамка в виде затухающего процесса, существенно влияет на дееспособность отдельных элементов и конструкции в целом. По причине большой сложности и высокой стоимости изготовления современных летательных аппаратов проведение натурных экспериментов является достаточно проблематичным и практикуется, как правило, на заключительной стадии проектирования. В данной статье проведено математическое моделирование динамики цилиндрической оболочки, выполняющей роль соединительного элемента, при действии на нее локального импульса большой интенсивности, генерируемого взрывом пирозамка.

В общем случае рассмотрены ребристые цилиндрические оболочки, взаимодействующие с упругим основанием. Задачи динамики таких оболочек в разных аспектах исследованы в работах [2 – 5, 7 – 9].

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу об определении деформированного состояния замкнутой цилиндрической оболочки, подкрепленной перекрестной системой ребер и находящейся под действием распределенных по ее поверхности локальных кратковременных нагрузок. Оболочка взаимодействует с упругим основанием, препятствующим ее нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности вокруг окружной координатной линии. Принимаем, что продольные подкрепляющие ребра учитываются на

основе конструктивно-ортотропной схемы, а кольцевые ребра – как дискретно расположенные элементы. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания.

В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней [1] и энергетический метод. Ранее [9] данный подход детально изложен и использован для решения задач динамики оболочек под действием осесимметричной равномерно распределенной по ее длине кратковременной нагрузки. Полученное в [9] вариационное уравнение движения может быть использовано также для случая действия локальных нагрузок. При конструктивно-ортотропной схеме учета продольных ребер вариационное уравнение имеет вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[\left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta u} - r^2 q_1 \right) \delta u + \left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta v} - r^2 q_2 \right) \delta v + \right. \\ \left. + \left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta w} - r^2 q_3 \right) \delta w \right] d\xi d\theta dt = 0, \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$L_{\delta u} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \delta_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \delta_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \sigma_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \delta_{11}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \right. \\ \left. - \delta_{21}^* \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \tau^2} + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \delta_{12j}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} d\xi \right]; \\ L_{\delta v} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + (1+a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} (1+4a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] + \\ + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left(-\delta_{12j} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \delta_{12j} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \delta_{22j} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) d\xi - \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \delta_{11}^* \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[(\delta_{12j}^* + 2\delta_{22j}^* + \delta_{32j}^*) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - (\delta_{22j}^* + \delta_{32j}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \tau^2} \right] d\xi \right\}; \\ L_{\delta w} = \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] - w - a^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + \delta_{21} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \eta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \\ + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \delta_{22j} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \eta_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - 2(\eta_{12j} + \delta_{22j}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (\delta_{12j} + \eta_{12j}) w \right] d\xi - \\ - \delta_{1f} w + \delta_{2f} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \delta_{21}^* \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \tau^2} + \delta_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{31}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \delta_{1f}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{2f}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \tau^2} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \delta_{22j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial \tau^2} - \delta_{32j}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \tau^2} \right] d\xi \right\};$$

E, ρ_0, μ – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала обшивки; u, v, w – продольное, окружное и нормальное перемещения срединной поверхно-

сти обшивки; $x = r\xi$, $y = r\theta$, $z = r\zeta$ – продольная, окружная и нормальная координаты; $\tau = t/T$ – безразмерное время; $T = t_2 - t_1$ – некоторый промежуток времени; t_1, t_2 – фиксированные моменты времени; h, r, L – толщина обшивки, радиус срединной поверхности оболочки и ее длина, соответственно; k_1, k_2 – число продольных и кольцевых ребер; $E_1, \rho_1, F_1, I_{y1}, h_1$ – модуль упругости, плотность материала, площадь, момент инерции поперечного сечения относительно окружной координатной линии и эксцентриситет каждого продольного ребра; $E_{2j}, \rho_{2j}, F_{2j}, I_{x2j}, h_{2j}$ – модуль упругости, плотность материала, площадь, момент инерции поперечного сечения относительно продольной координатной линии и эксцентриситет j -го кольцевого ребра; E_f, ρ_f – модуль упругости и плотность материала упругого основания, которое охватывает оболочку с ее внешней стороны;

$$\alpha^2 = h^2 / (12r^2); \quad \sigma_o = \frac{(1-\mu^2)\rho_o r^2}{ET^2}; \quad \delta_{11} = \frac{k_1 E_1 F_1 (1-\mu^2)}{Ehr}; \quad \delta_{21} = \frac{h_1}{r} \delta_{11}; \quad \delta_{31} = \delta_{21} \frac{h_1}{r};$$

$$\eta_1 = \delta_{31} + \eta_{11}; \quad \eta_{11} = \frac{k_1 E_1 I_{y1} (1-\mu^2)}{Ehr^3}; \quad \delta_{11}^* = \frac{\rho_1 k_1 F_1}{\rho_o hr}; \quad \delta_{21}^* = \frac{h_1}{r} \delta_{11}^*; \quad \delta_{31}^* = \frac{h_1}{r} \delta_{21}^*;$$

$$\delta_{12j} = \frac{E_{2j} F_{2j} (1-\mu^2)}{Ehr}; \quad \delta_{22j} = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}; \quad \delta_{32j} = \delta_{22j} \frac{h_{2j}}{r}; \quad \eta_{2j} = \delta_{32j} + \eta_{12j};$$

$$\eta_{12j} = \frac{E_{2j} I_{x2j} (1-\mu^2)}{Ehr^3}; \quad \delta_{12j}^* = \frac{\rho_{2j} F_{2j}}{\rho_o hr}; \quad \delta_{22j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}^*; \quad \delta_{32j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{22j}^*;$$

$$\delta_{1f} = \frac{(1-\mu^2)rE_f}{3Eh} C_1^2; \quad \delta_{2f} = \frac{(1-\mu^2)rE_f}{3Eh} C_2^2; \quad \delta_{1f}^* = \frac{\rho_f r}{\rho_o h} C_1^2; \quad \delta_{2f}^* = \frac{\rho_f r}{\rho_o h} C_2^2$$

(безразмерные коэффициенты C_1, C_2 характеризуют свойство упругого основания препятствовать нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности оболочки);

$$q_1 = q_{01} \cdot \bar{q}_1(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{1t}(\tau); \quad q_2 = q_{02} \cdot \bar{q}_2(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{2t}(\tau); \quad q_3 = q_{03} \cdot \bar{q}_3(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{3t}(\tau);$$

q_{01}, q_{02}, q_{03} – максимальные значения компонент внешней нагрузки; $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ – безразмерные функции, описывающие изменение внешней нагрузки в зависимости от пространственных координат; $\bar{q}_{1t}, \bar{q}_{2t}, \bar{q}_{3t}$ – безразмерные функции, отображающие зависимость нагрузки от времени.

Пространственные функции задаются в виде одиночных ступенек:

$\bar{q}_i = 1$, если $\xi_{1i} \leq \xi \leq \xi_{2i}$, $\theta_{1i} \leq \theta \leq \theta_{2i}$ и равны нулю ($\bar{q}_i = 0$) в других точках поверхности; $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \theta_{1i}, \theta_{2i}$ – координаты i -й локальной нагрузки.

Во времени нагрузка изменяется следующим образом:

$\bar{q}_{it}(\tau) = \alpha_{1i} + \alpha_{2i}\tau$ при $\tau_{1i} \leq \tau \leq \tau_{2i}$, $\bar{q}_{it}(\tau) = 0$ в иные моменты времени (α_{1i}, α_{2i} – безразмерные коэффициенты).

Для решения динамической задачи используем метод разложения решения по формам собственных колебаний [10].

2. Методика исследования.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами по пространственным координатам

$$u = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{1mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{1mn}^2(\tau) \sin n\theta) \cos d_m \xi;$$

$$v = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{2mn}^1(\tau) \sin n\theta + u_{2mn}^2(\tau) \cos n\theta) \sin d_m \xi ;$$

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{3mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{3mn}^2(\tau) \sin n\theta) \sin d_m \xi \quad (2)$$

$(u_{1mn}^1(\tau), u_{1mn}^2(\tau), \dots, u_{3mn}^2(\tau))$ – функции времени, которые определяются; $d_m = m\pi r / L$.

Подставив (2) в (1) и выполнив дифференцирование и интегрирование по координатам ξ, θ , на основании независимости и произвольности вариаций перемещений получим следующие системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^1}{\partial \tau^2} + \mathbf{S}^1 \mathbf{u}^1 = \mathbf{Q}^1; \quad \mathbf{M}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^2}{\partial \tau^2} + \mathbf{S}^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{Q}^2. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2, \mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2$ – матрицы масс и жесткости, элементы которых зависят от параметров оболочки, ребер, упругого основания, а также от параметров волнообразования m, n . Верхние индексы 1, 2 указывают на то, что при формировании матриц масс и жесткости использованы, соответственно, первые (индекс 1) и вторые (индекс 2) слагаемые в выражениях (2); $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – вектор-столбцы, составленные, соответственно, из функций времени $u_{1mn}^1, u_{2mn}^1, u_{3mn}^1$ и $u_{1mn}^2, u_{2mn}^2, u_{3mn}^2$; $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2$ – вектор-столбцы, полученные в результате интегрирования по пространственным координатам внешних нагрузок.

В общем случае системы (3) связаны между собой, но здесь эти системы независимы, так как рассматриваем оболочки, подкрепленные регулярно расположенными продольными ребрами с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами, и осесимметричное упругое основание.

Чтобы использовать для решения задачи метод разложения решения по формам собственных колебаний [10], на первом этапе решаем задачу на собственные значения. Определяем диагональные матрицы $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$, элементами которых являются квадраты собственных значений $(p_k^1)^2, (p_k^2)^2$, и матрицы форм собственных колебаний $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2$, элементами которых есть произвольные постоянные собственных форм $a_{k,l}^1, a_{k,l}^2$.

Далее, уравнения (3) приводим к главным координатам, нормируя при этом матрицы форм собственных колебаний по отношению к матрице масс. В этом случае матрицы масс в главных координатах представляют собой единичные матрицы; матрицы жесткости – диагональные матрицы, элементами которых есть квадраты собственных значений $(p_k^1)^2, (p_k^2)^2$. В правой части – элементы векторов $\mathbf{Q}_g^1 = (\bar{\mathbf{A}}^1)^T \mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}_g^2 = (\bar{\mathbf{A}}^2)^T \mathbf{Q}^2$.

В результате вместо систем (3) получим ряд несвязанных между собой уравнений

$$\ddot{u}_{g,i}^1(\tau) + (p_i^1)^2 u_{g,i}^1(\tau) = q_{g,i}^1(\tau); \quad \ddot{u}_{g,i}^2(\tau) + (p_i^2)^2 u_{g,i}^2(\tau) = q_{g,i}^2(\tau). \quad (4)$$

Число уравнений (4) равно числу членов, удерживаемых в рядах (2).

Если приближенно учесть рассеяние энергии при колебаниях оболочки, как в работе [10], то вместо (4) получим уравнения в виде

$$\ddot{u}_{g,i}^1(\tau) + 2c_{g,i}^1 \dot{u}_{g,i}^1(\tau) + (p_i^1)^2 u_{g,i}^1(\tau) = q_{g,i}^1(\tau); \quad \ddot{u}_{g,i}^2(\tau) + 2c_{g,i}^2 \dot{u}_{g,i}^2(\tau) + (p_i^2)^2 u_{g,i}^2(\tau) = q_{g,i}^2(\tau), \quad (5)$$

где $c_{g,i}^1 = \gamma_i p_i^1$, $c_{g,i}^2 = \gamma_i p_i^2$ – постоянные демпфирования по i -й форме собственных колебаний; γ_i – соответствующий коэффициент демпфирования.

Получив решения уравнений (4), (5), выполним обратный переход к исходной системе функций с помощью выражений $\mathbf{u}^1 = \bar{\mathbf{A}}^1 \mathbf{u}_g^1$, $\mathbf{u}^2 = \bar{\mathbf{A}}^2 \mathbf{u}_g^2$.

Принимаем, что до начала действия внешних сил оболочка находится в состоянии покоя.

Решение уравнений (5) находим с помощью интеграла Дюамеля [10]. При нулевых начальных условиях для каждой i -той формы колебаний имеем (верхние индексы не указаны):

$$\begin{aligned}
 u_g(\tau) &= \frac{q_g}{p^2} \left\langle \alpha_1 + \alpha_2 \left(\tau - \frac{2\gamma}{p} \right) - e^{-\gamma p(\tau - \tau_2)} \left\{ \left[\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \left(\beta_1 \tau_2 + \frac{\beta_2}{p} \right) \right] \sin p_d(\tau - \tau_2) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\tau_2 - \frac{2\gamma}{p} \right) \right] \cos p_d(\tau - \tau_2) \right\} \right\rangle \text{ при } \tau_2 \leq \tau \leq \tau_3; \\
 u_g(\tau) &= \frac{q_g}{p^2} \left\langle -e^{-\gamma p(\tau - \tau_2)} \left\{ \left[\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \left(\beta_1 \tau_2 + \frac{\beta_2}{p} \right) \right] \sin p_d(\tau - \tau_2) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\tau_2 - \frac{2\gamma}{p} \right) \right] \cos p_d(\tau - \tau_2) \right\} + e^{-\gamma p(\tau - \tau_3)} \left\{ \left[\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \left(\beta_1 \tau_3 + \frac{\beta_2}{p} \right) \right] \sin p_d(\tau - \tau_3) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\tau_3 - \frac{2\gamma}{p} \right) \right] \cos p_d(\tau - \tau_3) \right\} \right\rangle \text{ при } \tau > \tau_3.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что если в (6) положить $\gamma = 0$, получим решение уравнений (4). Коэффициент – общий множитель в выражениях (6) представляет собой решение статической задачи.

Для определения ускорений точек срединной поверхности оболочки определим вторую производную от выражений (6) по времени. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_g(\tau) &= q_g e^{-\gamma p(\tau - \tau_2)} [c_3 \sin p_d(\tau - \tau_2) + c_4 \cos p_d(\tau - \tau_2)] \quad (\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3); \\
 \ddot{u}_g(\tau) &= q_g \{ e^{-\gamma p(\tau - \tau_2)} [c_3 \sin p_d(\tau - \tau_2) + c_4 \cos p_d(\tau - \tau_2)] - \\
 &\quad - e^{-\gamma p(\tau - \tau_3)} [d_3 \sin p_d(\tau - \tau_3) + d_4 \cos p_d(\tau - \tau_3)] \} \quad (\tau > \tau_3),
 \end{aligned}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
 p_d &= p_i(1 - \gamma^2)^{1/2}; \quad c_3 = (1 - 2\gamma^2)b_1 - 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}b_2; \quad c_4 = (1 - 2\gamma^2)b_2 + 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}b_1; \\
 d_3 &= (1 - 2\gamma^2)b_3 - 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}b_4; \quad d_4 = (1 - 2\gamma^2)b_4 + 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}b_3; \\
 b_1 &= \left[\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \left(\beta_1 t_2 + \frac{\beta_2}{p} \right) \right]; \quad b_2 = \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(t_2 - \frac{2\gamma}{p} \right) \right]; \\
 b_3 &= \left[\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \left(\beta_1 t_3 + \frac{\beta_2}{p} \right) \right]; \quad b_4 = \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(t_3 - \frac{2\gamma}{p} \right) \right].
 \end{aligned}$$

3. Определение параметров деформированного состояния оболочки при действии локальных кратковременных нагрузок.

В качестве примера расчета рассмотрим цилиндрическую оболочку с параметрами $\nu = 0,3$; $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E = 0,7 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$; $r = 0,185 \text{ м}$; $L = 0,27 \text{ м}$; $h = 0,0045 \text{ м}$, подкрепленную шестнадцатью продольными ребрами ($F_1 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$; $h_1 = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

$I_{y1} = 3,75 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4$) и четырьмя равноотстоящими кольцевыми ребрами ($F_{2j} = 8,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$; $h_{2j} = 1,125 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $I_{x2j} = 2,187 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4$).

Выполнены расчеты прогибов w и ускорений \ddot{w} точек срединной поверхности оболочки при действии на нее динамических кратковременных нагрузок. Принято, что материал ребер и оболочки одинаков. Упругое основание в данном примере не рассматривается. Две нормально направленные силы действуют на оболочку в промежутке времени от нуля ($\tau_2 = 0$) до $\tau_n = \tau_3$. Они распределены на прямоугольных площадках размером $a_n \times a_n = 0,034 \text{ м} \times 0,034 \text{ м}$, центры которых имеют координаты $\xi_1 = 0,2$; $\theta_1 = \pi/5$ (точка 1) и $\xi_2 = 0,2$; $\theta_2 = 19\pi/15$ (точка 2).

Исследовано влияние формы импульса $\bar{q}_i(\tau)$, времени его действия τ_n на деформированное состояние оболочки, а также проведено сравнение результатов расчета с аналогичными результатами, полученными ранее для неподкрепленной оболочки [6].

Вычисления проведены при неизменной величине импульса внешних сил ($q_{03}^1 \tau_n = 0,007 \text{ н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$), приложенных на заданных площадках (точки 1, 2).

В рядах (2) удерживаем члены до $M = 30$, $N = 40$, при которых достигается практическая сходимость результатов. С увеличением числа удерживаемых членов ряда числовые значения w , \ddot{w} уточняются, но характер приведенных ниже кривых не изменяется.

Рассмотрено три варианта изменения нагрузки во времени (формы импульса):

1. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ (интенсивность распределенной по площадке нагрузки q_{03}^1 постоянна на заданном промежутке времени τ_n);

2. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2}{\tau_n} q_{03}^1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_n$ (интенсивность нагрузки линейно возрастает на промежутке времени от нуля до τ_n);

3. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{4}{\tau_n} q_{03}^1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_n/2$ (интенсивность нагрузки линейно возрастает на промежутке времени от нуля до $\tau_n/2$) и $\alpha_1 = 4q_{03}^1$, $\alpha_2 = -\frac{4}{\tau_n} q_{03}^1$ при $\tau_n/2 < \tau \leq \tau_n$ (интенсивность нагрузки линейно убывает на промежутке времени от $\tau_n/2$ до τ_n).

На рис. 1 – 4 представлены результаты расчетов, полученные при времени действия внешней нагрузки $t_n = 0,0035 \text{ с}$; кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют указанным выше вариантам нагружения.

На рис. 1 представлены зависимости прогиба от текущего времени в точке 1 (сплошные кривые) и в точке 3 с координатами $\xi = 0,5$; $\theta = \pi/5$, расположенной в среднем сечении оболочки (пунктирные кривые).

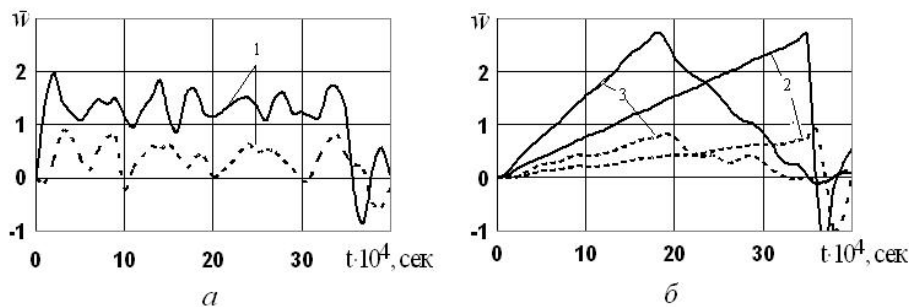


Рис. 1

Из графиков следует, что при мгновенном приложении нагрузки (кривые 1) и $\tau \leq \tau_n$ колебания совершаются вокруг некоторого отклоненного положения. При плавном изменении нагрузки прогиб оболочки так же плавно возрастает или возрастает – убывает с небольшими отклонениями от линейной зависимости. При $\tau > \tau_n$ и мгновенном сбрасывании нагрузки (кривые 1, 2) возбуждается интенсивный колебательный процесс. Отметим, что при вариантах нагрузки 2, 3 максимальное отклонение оболочки от исходного положения в точке приложения нагрузки больше максимального отклонения в той же точке при первом варианте нагрузки примерно в 1,38 раза.

В точках оболочки 1 (рис.2, а, в) и 3 (рис. 2, б, г) определены также их ускорения в нормальном направлении.

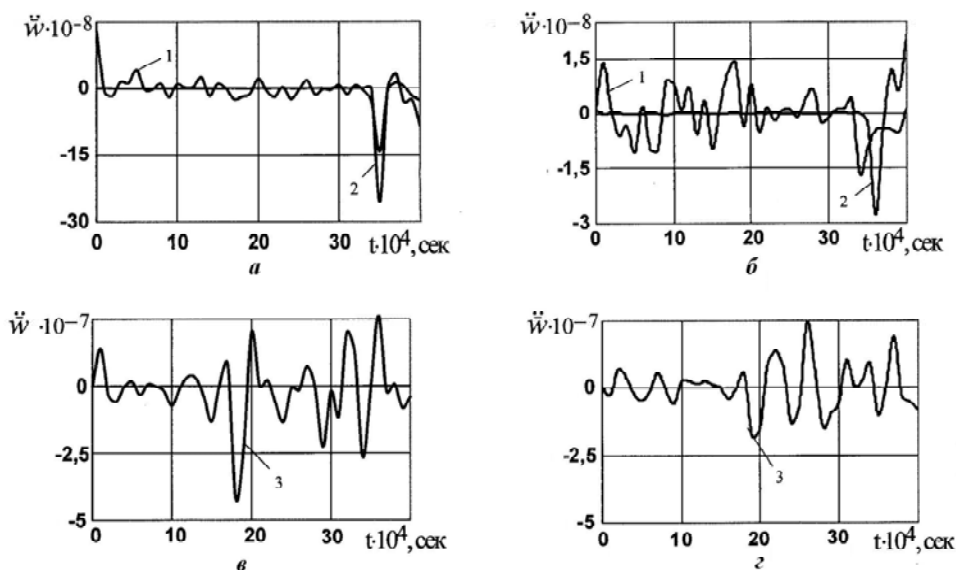


Рис. 2

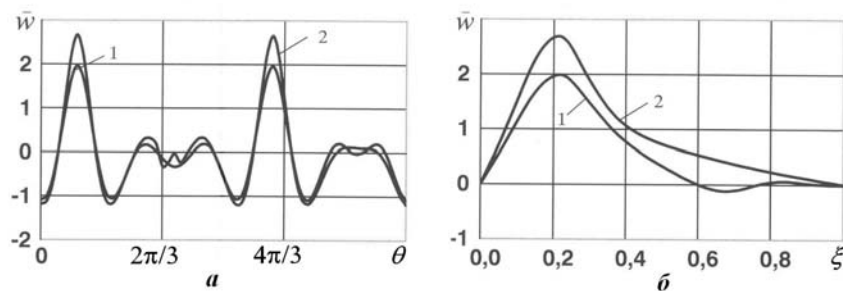


Рис. 3

Из графиков следует, что максимальные значения ускорений имеют место в моменты времени, соответствующие резкому изменению нагрузки; в данном случае при первом и втором вариантах нагружения при $\tau = 0$ и $\tau = 0,0035$ с – в точке 1.

В другие моменты времени, а также при третьем варианте нагружения, когда внешняя нагрузка меняется плавно, ускорения в данных точках – на один-два порядка меньше.

На рис. 3, а в момент времени $t = 0,0002$ с (для первого варианта нагрузки) и в момент времени $t = 0,0035$ с (для второго варианта нагрузки) показана форма дефор-

мирования оболочки в поперечном сечении $\xi = 0,2$. На рис. 3, б в те же моменты времени показана форма деформирования в продольных сечениях $\theta = \pi/5$ (кривая 1) и $\theta = 19\pi/15$ (кривая 2). Для третьего варианта нагрузки при $t = 0,0035$ с форма деформирования практически совпадает с кривыми 2 на рис. 3, а, б в указанных сечениях.

На рис. 4 приведены зависимости нормальных ускорений точек оболочки в поперечном сечении $\xi = 0,2$ (рис. 4, а) в моменты времени $t = 0$ (кривая 1) и $t = 0,0035$ (кривая 2) и в продольном сечении $\theta = 19\pi/15$ – в те же моменты времени.

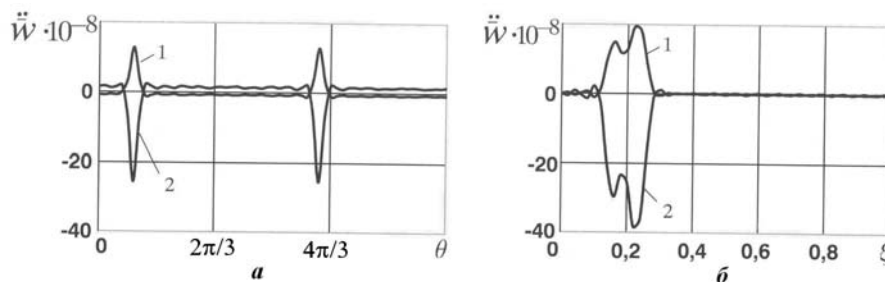


Рис. 4

Из графиков, приведенных на рис. 3, видно, что при всех видах нагружения прогиб оболочки достигает наибольших значений в местах приложения внешних нагрузок; деформирование оболочки в других ее точках может достигать величины того же порядка. Форма деформирования оболочки мало зависит от рассмотренных видов изменения нагрузки во времени. Нормальные ускорения (рис. 4), их максимальные величины локализованы в районе приложения внешних сил. В других точках эти ускорения – на порядок меньше.

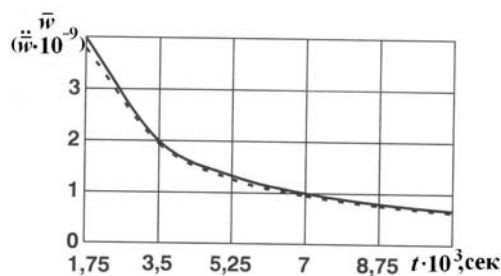


Рис. 5

Проведены расчеты зависимости максимальных значений прогиба и ускорения оболочки в зависимости от времени действия внешних сил t_n (рис. 5). Графики построены для точки с координатами $\xi = 0,22; \theta = \pi/5$ при первом варианте внешней нагрузки. Сплошная линия описывает изменение прогиба в момент времени $t = 0,0002$ с, пунктирная – ускорения в момент времени $t = 0$. Как

видно из графиков, закономерность их изменения практически одинакова. С увеличением времени действия внешних сил приведенные динамические характеристики уменьшаются, причем их уменьшение пропорционально уменьшению интегральной величины внешней силы, распределенной по заданной площадке контакта.

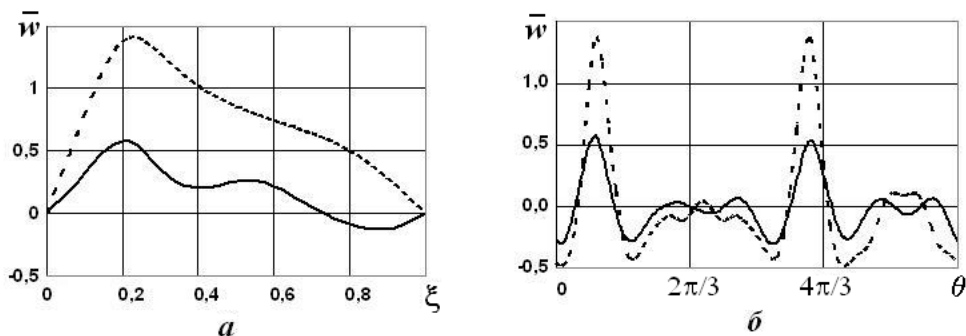


Рис. 6

На рис. 6 при действии постоянной во времени нагрузки (первый вариант внешних сил) и $t_n = 0,007$ с даны зависимости прогиба рассматриваемой оболочки (сплошные кривые) и неподкрепленной оболочки (пунктирные кривые), результаты расчета которой опубликованы ранее [10], в сечении $\theta = \pi/5$ (рис. 6, а) и в сечении $\xi = 0,2$ (рис. 6, б) в момент времени $t = 0,0048$ с. В данный момент времени имеет место одно из пиковых значений прогиба.

Как видно из графиков подкрепление оболочки значительно влияет на величину перемещений точек оболочки и на форму ее деформирования вдоль образующей. Не приводя графиков, укажем, что на ускорения точек срединной поверхности оболочки подкрепляющие ребра влияют в значительно меньшей мере. Максимальное ускорение гладкой оболочки в точках приложения нагрузки больше максимального ускорения в тех же точках ребристой оболочки при указанных выше параметрах подкрепления на 3,3%.

Отметим, что для вычисления размерных значений прогиба оболочки можно воспользоваться формулой $w = \frac{q_{03}(1-\nu^2)r^2}{Eh} \bar{w}$, для вычисления ускорений – формулой

$$\ddot{w} = \frac{q_{03}(1-\nu^2)r^2}{EhT^2} \ddot{\bar{w}}.$$

Заключение.

С целью моделирования динамики элементов конструкций в виде подкрепленных оболочек на упругом основании разработана методика и вычислительная программа для определения перемещений и ускорений точек срединной поверхности подкрепленной цилиндрической оболочки, шарнирно опертой на торцах, при действии локальных кратковременных нагрузок. На тестовом примере проведены исследования влияния локального кратковременного нагружения на параметры деформирования оболочки.

Получено, что перемещения оболочки достигают максимальных значений в местах приложения нагрузки и в промежутки времени, когда действуют внешние силы. При постоянном импульсе внешних сил величина максимального прогиба тем больше, чем больше максимальные значения этих сил. Ускорения точек срединной поверхности оболочки резко изменяются (часто меняют знак) даже при малом изменении времени. Максимальные значения ускорений локализованы в местах приложения внешних сил и в местах скачкообразного изменения последних во времени.

При постоянном импульсе внешних сил увеличение времени их действия приводит к уменьшению характеристик динамического деформированного состояния.

Подкрепление оболочки ребрами жесткости существенно влияет на прогибы оболочки и мало влияет на ускорения точек ее срединной поверхности.

Разработанная методика может быть использована для предварительных расчетов параметров деформирования элементов конструкций в виде подкрепленных цилиндрических оболочек, которые подвержены в процессе эксплуатации динамическим нагрузкам.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику та обчислювальну програму для дослідження динаміки підкріпленої циліндричної оболонки. Оболонка перебуває під дією локальних навантажень, які розподілені на малих площадках і змінюються на заданому короткому відтинку часу за лінійним законом. Поздовжні підкріплюючі елементи враховуються за конструктивно-ортотропною схемою, кільцеві ребра – за дискретною схемою. Для розв'язання задачі використано метод розкладу розв'язку за формами власних коливань. На тестовому прикладі досліджено вплив локального навантаження на параметри деформування оболонки. Дано висновки про вплив форми імпульсу, часу дії зовнішніх сил та підкріплення оболонки на її деформований стан при локальному навантаженні.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек.– К.: Наукдумка,1980.–368 с. – (Методы расчета оболочек: в 5-ти т.; Т.2).
2. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд.-полигр. центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
3. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд.-полигр. центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
4. *Cichocki K.* Effects of underwater blast loading on structures with protective elements // *Int. J. of Impact Engineering.* – 1999. – **22**, N 6. – P. 609 – 617.
5. *Lugovoi P.Z., Meish Yu.A.* Nonstationary Deformation of Longitudinally and Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 1. – P.62 – 72.
6. *Lugovoi, P.Z., Sirenko, V.N., Skosarenko, Yu.V., Batutina, T.Ya.* Mathematical Modeling of Cylindrical Adapter Dynamics Under the Action of Local Momentary Loads // *Science and Innovation.* – 2016. – **12**, N 3. – P. 35 – 42.
7. *Marconi F.* Investigation of the interaction of a blast wave with an internal structure // *AIAA Journal.* – 1994. – **32**, N 8. – P. 1561 – 1567.
8. *Qatu M.S.* *Vibrations of Laminated Shells and Plates.* – Elsevier, Amsterdam: 2004. – 406 p.
9. *Skosarenko Yu.V.* Stress – Strain State of Ribbed Cylindrical Shell Interaction with Elastic Foundation under Shot – Time Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 92 – 101.
10. *Timoshenko S.P., Young D.X., Weaver Jr.* *Vibration Problem in Engineering.* – New – York: John Wiley and Sons, 1974. – 472 p.

Поступила 02.11.2015

Утверждена в печать 29.11.2016

