

А. М. Багно

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА
ДИСПЕРСИЮ КВАЗИЛЭМБОВСКИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ
«СЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ – СЖИМАЕМЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ»

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

Abstract. A propagation of quasi-Lamb's waves is studied for an initially deformed compressible elastic layer interacting with a layer of an ideal compressible fluid. The results are obtained basing on the three-dimensional equations of linearized theory of elasticity of finite strains for the elastic layer and the three-dimensional linearized Euler's equations for the ideal compressible fluid. The dispersion curves for the quasi-Lamb's modes are constructed with the wide frequency range. An effect of initial stresses, thickness of elastic and fluid layers on the frequency spectrum of normal quasi-Lamb's waves is analyzed. The localization properties of the lower quasi-Lamb's modes in the elastic-fluid waveguides are studied. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

Key words: wave dispersion, compressible elastic layer, layer of ideal compressible fluid, initial stresses.

Введение.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и слоя жидкости, являются обобщением основательно исследованных основных типов акустических волн Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Интерес к таким задачам связан с тем, что указанные волновые процессы являются определяющими и широко используются в таких областях, как сейсмология, акустоэлектроника, гидроакустика, дефектоскопия, нетравматические и неразрушающие ультразвуковые методы контроля [13, 14, 18, 19, 21 – 25, 27 – 29 и др.]. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости, приведены в [1, 11, 20]. Значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета реальных свойств сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения. Они, как известно, возникают в результате перехода сред из одного агрегатного состояния в другое, при действии на тела полей различной физической природы, а также в результате технологических операций при изготовлении разнообразных материалов и деталей из них. Созданные целенаправленно или возникшие в результате технологических операций, они оказывают существенное влияние на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений, приведены в [3 – 12, 14, 17, 26].

Данная работа посвящена исследованию (в рамках уравнений трехмерной линеаризованной теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды) влияния начальных напряжений на скорости квазилэмбовских волн в предварительно деформированном сжимаемом упругом слое, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Вспользуемся подходом и постановками задач аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, предложенными в работах [3 – 6, 15 – 17]. Заметим, что в отличие от упругих тел, соотношения которых записаны в лагранжевых координатах, равенства для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, которые введены в естественном состоянии жидкости. Следует подчеркнуть, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуется распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому в дальнейшем не делаются различия между лагранжевыми и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

С учетом введенных допущений в рамках принятых моделей система исходных соотношений линеаризованной теории аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, взаимодействующими с идеальной сжимаемой жидкой средой, принимает такой вид [3 – 6, 15 – 17]:

1) сжимаемые упругие тела –

$$\left(\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha = 0, \quad z_k \in V_1;$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_1 \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3};$$

2) идеальная сжимаемая жидкость –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad z_k \in V_2;$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2;$$

$$p_{ij} = -\delta_{ij} p; \quad \tilde{P}_j = p_{ij} N_i^0, \quad z_k \in V_2.$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$, $z_k \in S$ и кинематические $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{v}$, ($z_k \in S$) граничные условия, задаваемые на поверхности контакта упругих тел и жидкости.

Введенный выше тензор $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$, зависящий от вида начального состояния и типа упругого потенциала материала твердого тела, приведен в работах [3, 4, 6, 16].

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем ($-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \leq z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$) и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем ($-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$). Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом случае во всех плоскостях, параллельных плоскости $oz_1 z_2$, явления происходят тождественным образом. Поэтому задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости $oz_1 z_2$.

§2. Методика решения.

Воспользуемся представлениями общих решений линеаризованных уравнений, полученными в работах [3 – 6, 15 – 17]. Для плоского случая, который рассматривается, общие решения имеют такой вид:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции χ_1 и χ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Данная задача характеризуется следующими динамическими

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h_1} = 0 \quad (2.1)$$

и кинематическим

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (2.2)$$

граничными условиями. Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора перемещений упругого тела \mathbf{u} ; λ_i – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей; a_{ij} и μ_{ij} – величины, которые определяются из уравнений состояния и зависят от вида упругого потенциала [4, 5, 7]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ ($s_{ii}^0 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0) / \lambda_i^2$) – начальные напряжения; ρ – плотность материала упругого слоя; v_i – компоненты вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; \tilde{Q}_j , \tilde{P}_i – составляющие напряжений в упругом теле и жидкости.

Далее параметры, характеризующие процесс распространения волн, разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в таком виде: $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$ ($j = 1, 2$), где k – волновое число; ω – круговая частота; $i^2 = -1$.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и уравнений движения упругого тела, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия

(2.1) – (2.2) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения и приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{lm} \left(c_\sigma, a_{ij}, \mu_{ij}, \sigma_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (2.3)$$

где c_σ – фазовая скорость нормальных волн в предварительно напряженном слое; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – скорость волны сдвига в материале упругого тела; μ – модуль сдвига материала упругого слоя; h_1 – толщина слоя жидкости; h_2 – толщина упругого слоя.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в рассматриваемой гидроупругой системе.

Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом слое и жидком слое граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе существенным является не только наличие жидкости, а также взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных границ и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе довольно сложного спектра мод.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.3) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (2.3) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. При $\rho_0 = 0$ равенство (2.3) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [7]. Если дополнительно устремить h_2 к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [9]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h_1 \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли [8]. Указанные частные случаи учитывают наличие начальных деформаций в упругом слое. Задачи, которые были рассмотрены в рамках этой модели, приведены в [3 – 6, 8 – 12, 16, 20, 26]. Если положить $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$, то получим равенства для подробно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли – Шольте и Лэмба [1].

§3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.3) решаем численно. При этом числовые расчеты проводим для *двух гидроупругих систем*. *Первая* состоит из органического стекла и воды, которая характеризуется следующими параметрами: упругий слой – $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$; слой жидкости – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$. *Вторая* система представляет собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры приняты такими: упругий слой – $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; слой жидкости – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$.

Заметим, что уравнение (2.3) выведено без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому оно имеет место для упругих потенциалов произвольной формы. При численной реализации вопрос о выборе конкретной формы упругого потенциала имеет самостоятельное, а также важное значение и существенным образом может повлиять на конечный результат. Как показано

в работах [3 – 7, 16, 19], для предварительно напряженных сжимаемых жестких материалов (сталь, оргстекло) закономерности, наблюдаемые экспериментально, могут быть правильно описаны теоретически только в рамках трехинвариантных упругих потенциалов. В связи с этим, в данной работе для оргстекла и стали использован простейший трехинвариантный потенциал в форме Мурнагана [3 – 7, 16, 19]. При рассмотрении конкретного примера и численного решения уравнения (2.3) учитывалось то, что оргстекло и сталь, не разрушаясь, не допускают больших деформаций. Поэтому коэффициенты уравнений состояния a_{ij} и μ_{ij} были определены в рамках линейного акустического приближения [3 – 7, 9]. С учетом этого постоянные Мурнагана для оргстекла и стали, через которые определяются величины уравнений состояния a_{ij} и μ_{ij} , приняты такими [3 – 7, 9]: оргстекло – $a = -3,91 \cdot 10^9$ Па; $b = -7,02 \cdot 10^9$ Па; $c = -1,41 \cdot 10^9$ Па, сталь 09Г2С – $a = -319 \cdot 10^9$ Па; $b = -303 \cdot 10^9$ Па; $c = -78,4 \cdot 10^9$ Па.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 – 17. На рис. 1 – 7 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла и воды.

На рис. 1 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) при отсутствии начальных деформаций [7]. Номерами n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s – соответственно, симметричные моды.

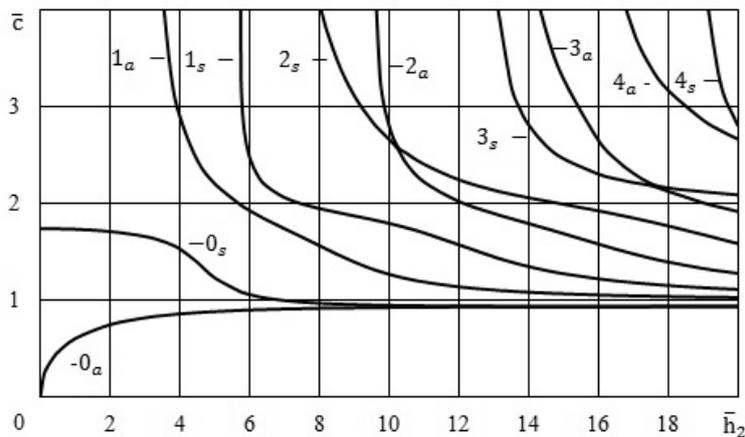


Рис. 1

На рис. 2 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для толстого жидкого слоя с толщиной \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$), равной 20, также при отсутствии начальных деформаций.

На рис. 3, 4 приведены зависимости нормированных величин продольных \bar{v}_{z_1} (рис. 3) и поперечных \bar{v}_{z_2} (рис. 4) смещений (скоростей $\partial u_i/\partial t$ и v_i) от безразмерной поперечной координаты \bar{z}_2 для поверхностной волны 1 (рис. 2). При нормировании величины указанных смещений отнесены к их наибольшим значениям $|\bar{v}_{z_1} \max|$ и $|\bar{v}_{z_2} \max|$. Графики, представленные на рис. 3, 4, отражают распределение смещений

(скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из органического стекла ($\bar{h}_2 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) и слоя воды ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}_1$). Они получены при частоте (толщине) \bar{h}_2 равной 20. При этом значение фазовой скорости моды 1 равно $\bar{c} = c/c_s = 0,77171$.

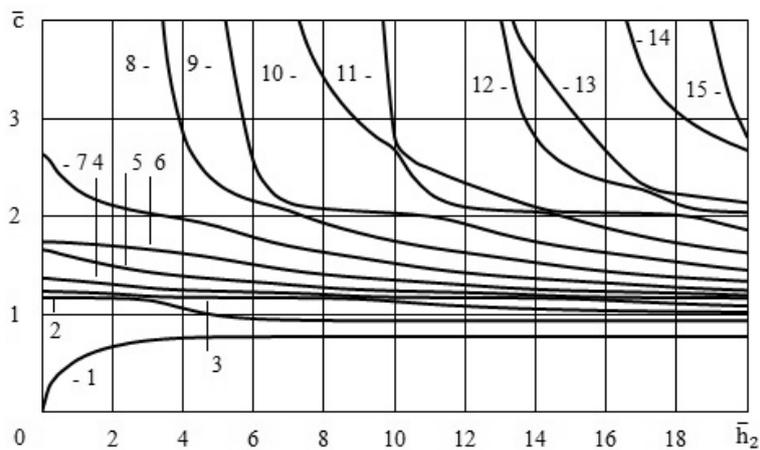


Рис. 2

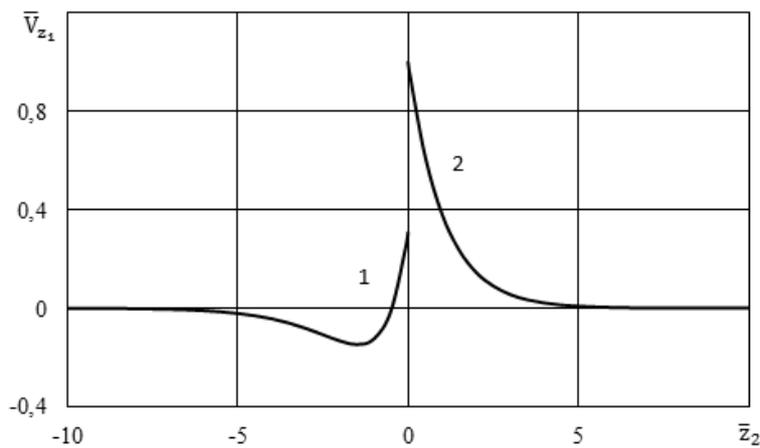


Рис. 3

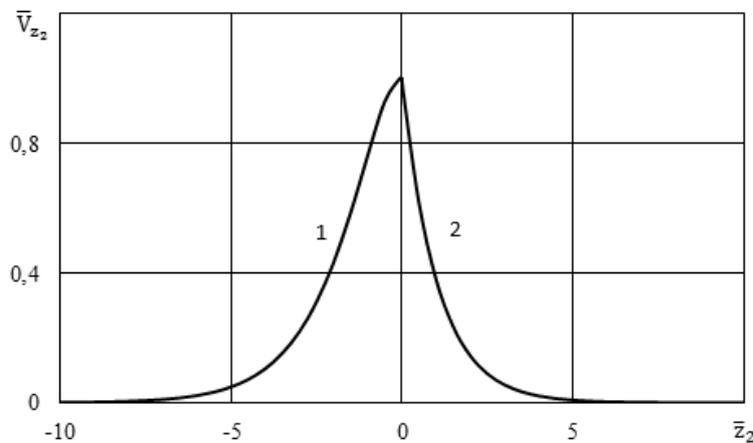


Рис. 4

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 5 – 7, на которых представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε ($c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$, c_σ – фазовая скорость мод в предварительно напряженном

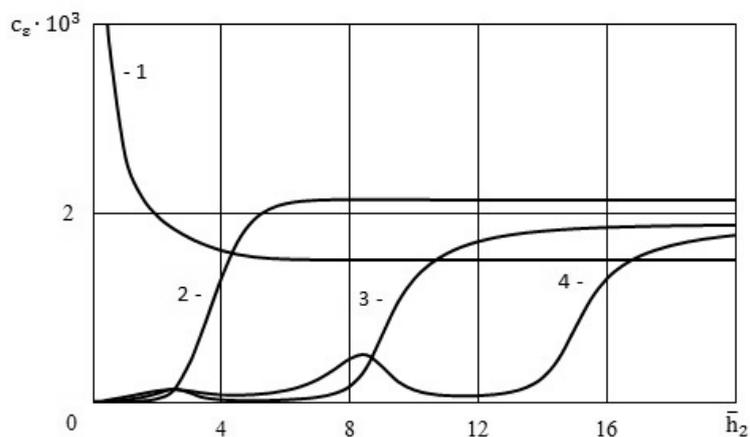


Рис. 5

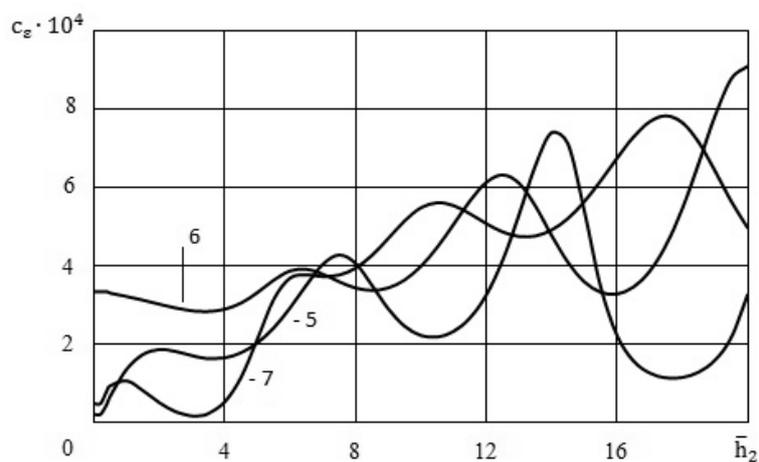


Рис. 6

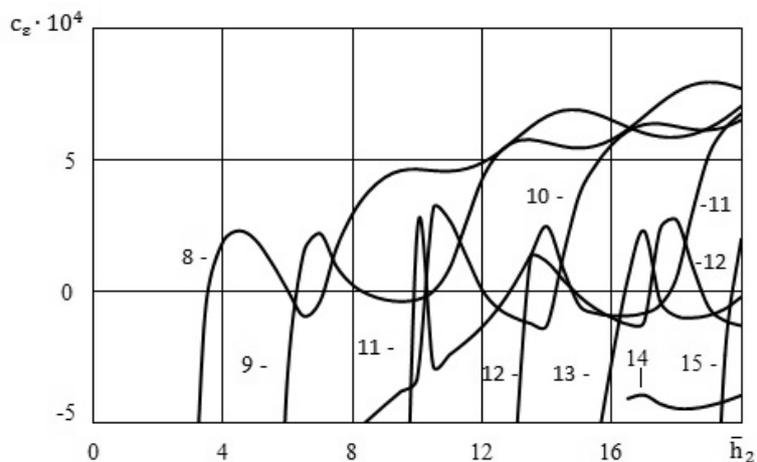


Рис. 7

слое, c – фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций) от толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этом рисунке приведены кривые для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого $\bar{h}_1 = 20$.

Из графиков, представленных на рис. 1 [7], следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба, распространяющейся вдоль нижней свободной поверхности слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,93356$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды, распространяющейся вдоль верхней свободной поверхности слоя, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,93356$) сверху. Скорости всех нормальных волн Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s [7].

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, показывают, что при возрастании толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,77171$) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,93356$) сверху. Квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела. При этом они распространяются в упругом слое в его толще. Отметим, что нагружение упругого слоя жидким слоем способствует увеличению числа нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе. При этом возникающие низшие моды имеют нулевые частоты запертия.

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 3, 4, следует, что движения моды 1 при $\bar{h}_2 = 20$ происходят как в упругом теле, так и в жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость. Заметим, что разрыв продольных смещений в упругом теле (кривая 1) и в жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ($\bar{z}_2 = 0$) (рис. 3) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости. Отметим также, что графики, приведенные на рис. 3 и 4, получены для первой низшей квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине) \bar{h}_2 , равной 20. При такой частоте, как показали проведенные вычисления, фазовая скорость первой моды лишь немного отличается от скорости волны Стоунли.

Из графиков, приведенных на рис. 5 – 7, следует, что начальное растяжение упругого слоя ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению фазовых скоростей мод 1 – 7. Скорости всех высших мод 8 – 15 в окрестности толщин упругого слоя, при которых они зарождаются, становятся меньше скоростей соответствующих мод в слое без начальных напряжений. Нетрудно видеть, что для мод, начиная с восьмой и далее для всех последующих, существуют упругие слои определенных толщин, при которых предварительные деформации не влияют на их фазовые скорости. В рассматриваемом здесь случае гидроупругой системы с толстым жидким слоем для каждой моды 8 – 10 имеются упругие слои трех таких толщин. Для следующих нормальных волн высокого порядка существуют упругие слои, имеющие пять таких толщин.

Графический материал результатов численных вычислений для гидроупругой системы «сталь 09Г2С – вода» представлен на рис. 8 – 17. На рис. 8 для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 при отсутствии начальных деформаций [7]. Номера n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s – соответственно, симметричные моды.

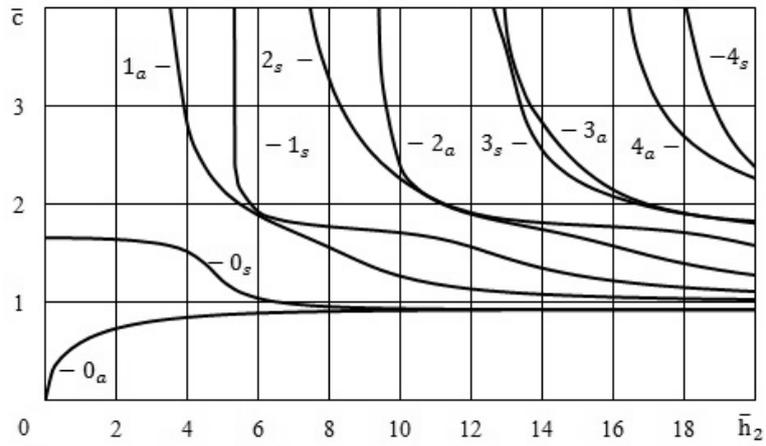


Рис. 8

На рис. 9 – 12 приведены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для толстого жидкого слоя с толщи-

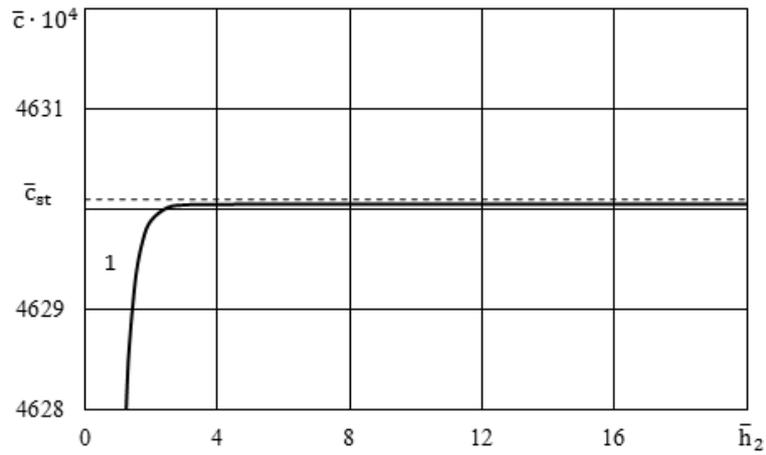


Рис. 9

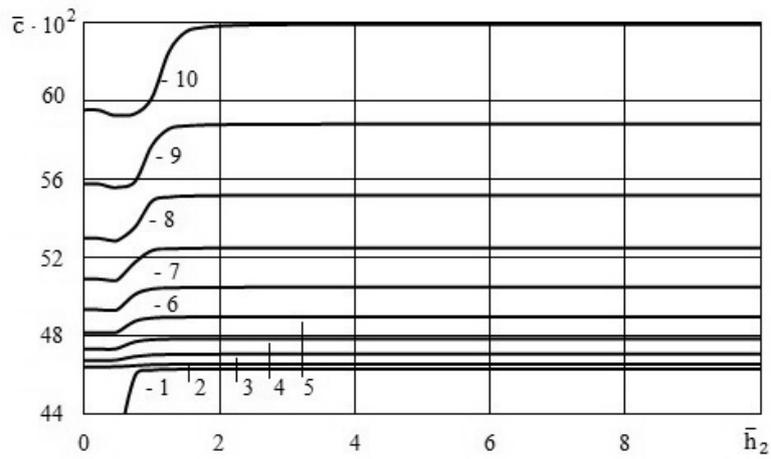


Рис. 10

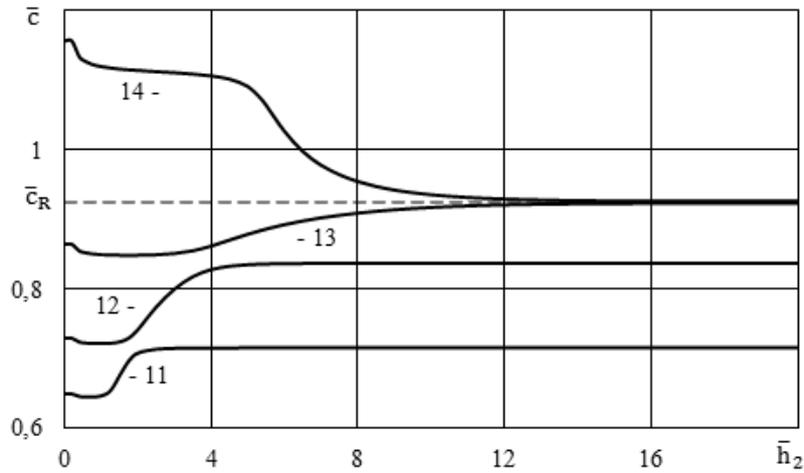


Рис. 11

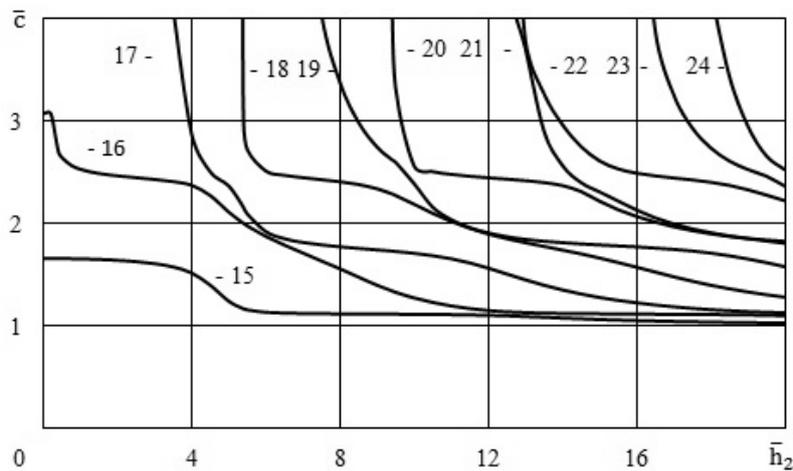


Рис. 12

ной \bar{h}_1 , равной 20, при отсутствии начальных деформаций. При этом на рис. 9, 10 приведены дисперсионные кривые для первых 10 мод. Дисперсионные кривые для мод с 11 по 24 показаны на рис. 11 и 12. Штриховыми линиями на рис. 9 и 11 отмечены асимптотики, к которым стремятся величины фазовых скоростей моды 1 (рис. 9), а также мод 13 и 14 (рис. 11).

На рис. 13, 14 приведены зависимости нормированных величин продольных \bar{V}_{z_1} (рис. 13) и поперечных \bar{V}_{z_2} (рис. 14) смещений (скоростей $\partial u_i / \partial t$ и v_i) от безразмерной поперечной координаты \bar{z}_2 для поверхностной моды 1 (рис. 9). При нормировании величины указанных смещений, как уже отмечалось ранее, отнесены к их наибольшим значениям $|\bar{V}_{z_1} \max|$ и $|\bar{V}_{z_2} \max|$. Графики, представленные на рис. 13, 14, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приповерхностных областях слоя из стали ($\bar{h}_2 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) и слоя воды ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}_1$). Они получены при частоте (толщине) \bar{h}_2 равной 20. При этом значение фазовой скорости моды 1 равно $\bar{c} = 0,463005$.

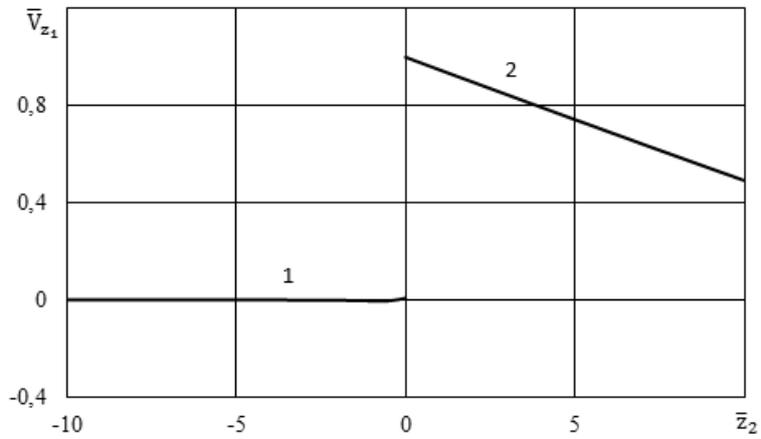


Рис. 13

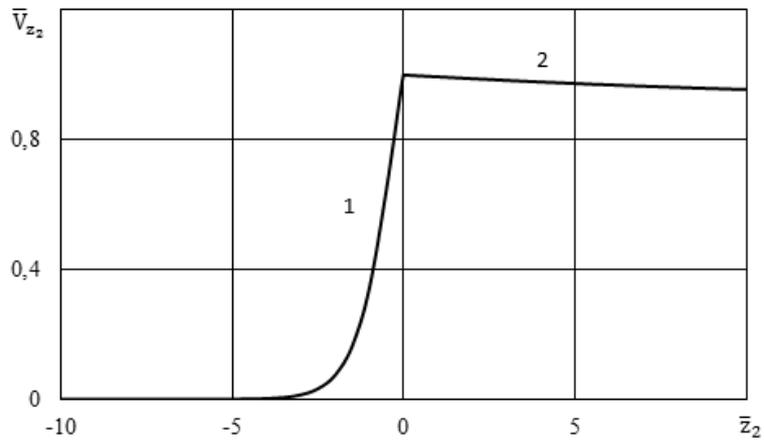


Рис. 14

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в системе «слой жидкости – упругий слой» иллюстрируют графики на рис. 15 – 17, где представлены зависимости относительных изменений величин фазо-

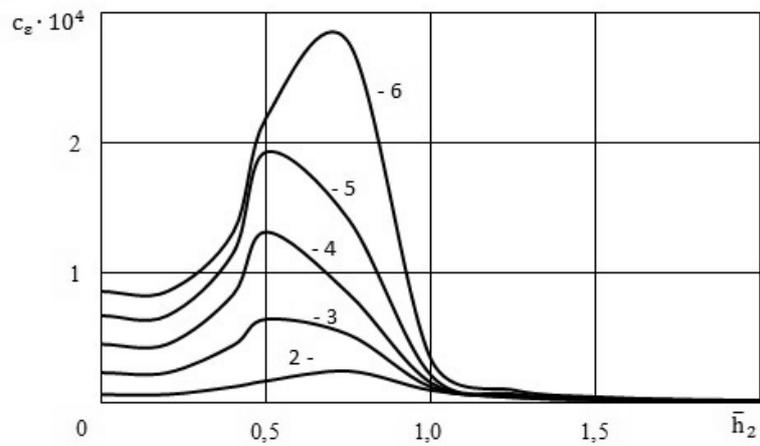


Рис. 15

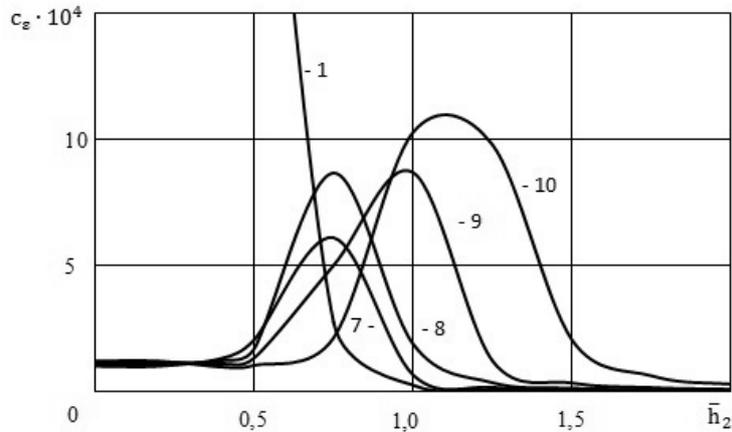


Рис. 16

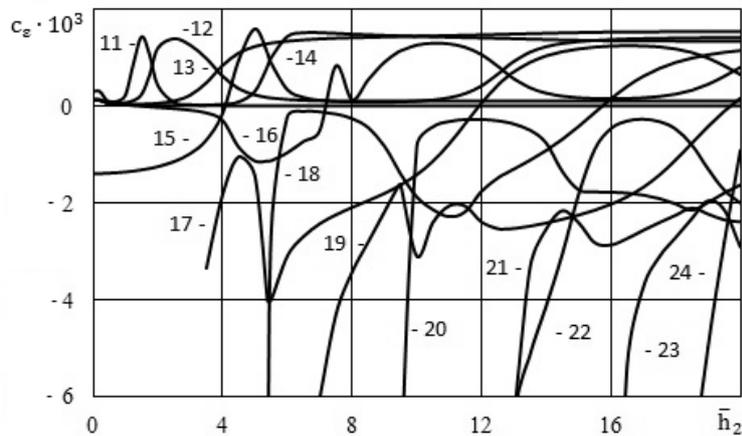


Рис. 17

вых скоростей c_e от толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках кривые соответствуют гидроупругому волноводу, толщина жидкого слоя которого \bar{h}_1 равняется 20. Зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_e от начального растяжения для мод со второй по шестую приведены на рис. 15. Влияние начальных напряжений на скорости мод 1, 7 – 10 отражают графики на рис. 16. Зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_e мод 11 – 24 от толщины упругого слоя \bar{h}_2 представлены на рис. 17.

Из графиков, представленных на рис. 8, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба, распространяющейся вдоль нижней свободной поверхности слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,92301$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды, распространяющейся вдоль верхней свободной поверхности слоя – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,92301$) сверху [7]. Скорости всех высших нормальных волн Лэмба при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 9, 10, показывает, что при возрастании толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды

стремится снизу к скорости волны Стоунли $\bar{c}_{st}(\bar{c}_{st} = 0,463005)$, которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде $\bar{a}_0(\bar{a}_0 = 0,463021)$. Величины фазовых скоростей мод 2 – 10 стремятся к скоростям волн, величины которых больше скорости волны звука в жидкости $\bar{a}_0(\bar{a}_0 = 0,463021)$, но меньше скорости квазирэлеевской волны $\bar{c}_R(\bar{c}_R = 0,924531)$. Характерной особенностью дисперсионных кривых этих нормальных волн является наличие у них нулевых частот запираения. Кроме того, по мере уменьшения длины волны и удаления от частот запираения они становятся почти бездисперсионными.

Из графиков рис. 11 следует, что скорость моды 13 с увеличением толщины упругого слоя \bar{h}_2 стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R = 0,924531$ снизу, а фазовая скорость моды 14 – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R сверху. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка с возрастанием толщины упругого слоя \bar{h}_2 стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

Из графиков амплитуд смещений (скоростей), приведенных на рис. 13, 14, видно, что глубина проникновения моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения ее в упругое тело. При этом движения в этой моде при $\bar{h}_2 = 20$ происходят, главным образом, в жидком слое. Разрыв продольных смещений в упругом теле (кривая 1) и в жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ($\bar{z}_2 = 0$) (рис. 13), как уже отмечалось, обусловлен тем, что жидкость является идеальной (невязкой). Графики, приведенные на рис. 13 и 14, как и в предыдущем гидроупругом волноводе, получены для первой низшей квазиповерхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине) \bar{h}_2 , равной 20. Как показали вычисления, при такой частоте величина фазовой скорости этой моды лишь незначительно отличается от величины скорости волны Стоунли.

Из графиков, приведенных на рис. 15 – 17 следует, что начальное растяжение упругого слоя ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению фазовых скоростей мод 1 – 14. Скорости всех высших мод 15 – 24 в окрестности толщин упругого слоя, при которых они зарождаются, становятся меньше соответствующих скоростей в слое без начальных напряжений. Как видно, для мод, начиная с 15 и дальше для всех последующих, существуют толщины упругих слоев, при которых предварительное деформирование не влияет на их фазовые скорости. В рассматриваемом здесь случае гидроупругой системы с толстым жидким слоем для каждой моды 15 – 24 существуют упругие слои одной такой толщины.

§5. Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.

Как показано в работе [7], в упругом волноводе, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше величин фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено также появление в упругом волноводе частот (толщин), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба.

В гидроупругих волноводах предварительное деформирование (растяжение) вызывает изменение критических частот и сдвиг дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, приводящее к появлению для ряда квазилэмбовских мод упругих слоев определенных толщин, при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины их фазовых скоростей.

В гидроупругой системе «оргстекло – вода» начальное растяжение вызывает смещение дисперсионных кривых мод в длинноволновую часть спектра и изменение их

конфигурации. Масштаб этих изменений зависит от номера моды. Для мод более высокого порядка эти изменения становятся более значительными. Это приводит к тому, что для низших мод существуют упругие слои одной такой толщины, при которой их фазовые скорости не зависят от начального растяжения. Для мод более высокого порядка количество упругих слоев с такой толщиной возрастает.

В случае гидроупругой системы «сталь – вода» предварительное растяжение также приводит к сдвигу дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра и изменению их конфигурации. В отличие от оргстекла и воды в этой гидроупругой системе начальное напряжение приводит к «растягиванию» дисперсионных кривых мод. Поэтому у мод независимо от их номера имеются упругие слои одной такой толщины, при которой их фазовые скорости не зависят от предварительного деформирования.

§6. Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах.

Как известно [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «оргстекло – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости $\bar{a}_0 (\bar{a}_0 = 1,152595)$ больше скорости квазирэлеевской волны ($\bar{c}_R (\bar{c}_R = 0,93356)$). Как следует из графиков, приведенных на рис. 3, 4, в данной гидроупругой системе это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностных областях упругого слоя и жидкости. Скорость второй моды 2, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R (\bar{c}_R = 0,93356)$ сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s . При этом с увеличением толщины в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толщине [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе низшие моды частично проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Графики, приведенные на рис. 9 – 12 для упруго-жидкостной системы «сталь – вода», показывают, что в гидроупругом волноводе при увеличении толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли $\bar{c}_{st} (\bar{c}_{st} = 0,463005)$ снизу. При этом в рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «сталь – вода» таковы, что скорость распространения звука в жидкости $\bar{a}_0 (\bar{a}_0 = 0,463021)$ меньше скорости квазирэлеевской волны $\bar{c}_R (\bar{c}_R = 0,924531)$. Как видно из рис. 13, 14, это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в жидкость больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого слоя. Это также относится и к модам 2 – 12, которые также распространяются в жидкости. Вследствие того, что ни одна из низших мод не проникает в твердое тело, поверхность упругого слоя, граничащая с жидкостью, остается свободной. Эту область занимает мода 13. Скорость этой моды, распространяющейся вдоль границы контакта

сред в приповерхностной области упругого слоя, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,924531$) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующего с жидкостью. Скорость моды 14, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,924531$) сверху. Скорости всех мод более высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела и, как указано выше, их движения локализуются в толще упругого слоя.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе не только первая мода, но и ряд низших мод, возникающих в результате взаимодействия упругого слоя с жидким слоем, не проникают в твердое тело и распространяются вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. Все остальные моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще. Скорости их с возрастанием толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела. В этом случае волноводом для распространения низших нормальных волн и переноса волновой энергии служат жидкий слой.

Отметим также, что наличие жидкого слоя приводит к появлению новых нормальных волн. Возникающие моды имеют нулевые частоты запириания. Воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Жидкость оказывает влияние на распределение мод среди сред. Локализация низших мод в системе «слой жидкости – упругий слой» зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием распределения низших нормальных волн в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в слое жидкости и квази-рэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

Заключение.

В рамках линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости даны постановка и решение задачи о распространении акустических волн в системе «слой идеальной сжимаемой жидкости – предварительно напряженный сжимаемый упругий слой». С использованием представлений общих решений получено дисперсионное уравнение в общем виде, независимое от вида упругого потенциала.

Численно с привлечением трехинвариантного упругого потенциала Мурнагана дан анализ влияния начальных напряжений, толщин слоев упругого тела и жидкости на фазовые скорости нормальных квазилэмбовских волн в широком диапазоне частот для двух гидроупругих систем, состоящих из органического стекла и воды, а также – из стали марки 09Г2С и воды. Установлено, что в гидроупругой системе «оргстекло – вода» начальное растяжение вызывает смещение дисперсионных кривых мод в длинноволновую часть спектра и изменение их конфигурации. При этом масштаб этих изменений зависит от номера моды. Для мод более высокого порядка эти изменения становятся более значительными. Это приводит к тому, что для низших мод существует по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от начального растяжения. У мод более высокого порядка количество упругих слоев с такими толщинами возрастает.

В случае гидроупругой системы «сталь 09Г2С – вода» предварительное растяжение также приводит к сдвигу дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра и изменению их конфигурации. В отличие от оргстекла и воды в этой гидроупругой системе начальное напряжение приводит к «растягиванию» дисперсионных кривых мод. Поэтому у мод независимо от их номера имеется по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от предварительного деформирования.

Показано также, что в гидроупругом волноводе с выбранными механическими параметрами системы ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$) и толстым жидким слоем произвольной заданной фиксированной толщины \bar{h}_1 при увеличении толщины упругого слоя \bar{h}_2 низшие моды частично проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Анализ числовых результатов также показал, что в упруго-жидкостной системе «сталь – вода» при $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ не только первая мода, но и ряд низших мод, возникших в результате взаимодействия упругого слоя с жидким слоем, не проникают в твердое тело и распространяются вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. Все остальные моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще. Скорости их с возрастанием толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела. В этом случае волноводом для распространения низших нормальных волн и переноса волновой энергии служит слой жидкости.

Полученные результаты позволяют устанавливать для волновых процессов пределы применимости моделей упругого тела, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, а также классической теории упругости.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення квазілембовських хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, який взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Результати отримано на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для пружного тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Побудовано дисперсійні криві для квазілембовських мод у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень, товщини пружного шару та шару рідини на частотний спектр нормальних квазілембовських хвиль у гідропружній системі. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілембовських мод в пружно-рідинних хвилеводах. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // *Акуст. журн.* – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.1. Общие вопросы. – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
8. *Жук А.П.* Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // *Прикл. механика.* – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
9. *Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P.* Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1979. – **15**, N 4. – P. 3 – 23.
10. *Bagno A.M.* The Dispersion Spectrum of a Wave Process in a System Consisting of an Ideal Fluid Layer and a Compressible Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 648 – 654.
11. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
12. *Bagno A.M., Guz A.N.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and Compressible Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 333 – 341.
13. *Drinkwater B.W., Wilcox P.D.* Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // *NDT & E International.* – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
14. *Gibson A., Popovics J.* Lamb wave basis for impact-echo method analysis // *J. Engineering Mechanics.* – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
15. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
16. *Guz A.N.* Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.

17. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
18. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // *J. Phys. Sci. and Appl.* – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
19. *Guz A. N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
20. *Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
21. *Jhang K.Y.* Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing.* – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
22. *Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C.* Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures.* – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
23. *Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H.* Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // *Int. J. of Plasticity.* – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
24. *Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K.* Ultrasonic Lamb wave tomography // *Inverse Problems.* – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
25. *Liu L., Ju Y.* A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // *NDT & E International.* – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
26. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // *Int. J. Non-Lin. Mech.* – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
27. *Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C. V.* Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (A₀) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // *Smart Materials and Structures.* – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
28. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design.* – 2012. – **35**, March. – P. 572 – 588.
29. *Spies M.* Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // *Ultrasonics.* – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 18.04.2016

Утверждена в печать 29.11.2016
