

# Свойства акустических осей в триклинных средах

*Ю. В. Роганов<sup>1</sup>, А. Стовас<sup>2</sup>, В. Ю. Роганов<sup>3</sup>, 2019*

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Киев, Украина

<sup>2</sup>Норвежский университет, Тронхейм, Норвегия

<sup>3</sup>Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 28 марта 2019 г.

Запропоновано метод отримання співвідношень для визначення положення акустичних осей у триклинному середовищі і залежностей між ними. Доведено, що ці співвідношення лінійно незалежні над полем дійсних чисел. Однак будь-яке співвідношення алгебрично залежить від будь-яких двох інших співвідношень. Досліджено також взаємозв'язок отриманих співвідношень зі співвідношеннями, виведеними у раніших роботах. Виведені формули визначають, як змінюються ці співвідношення при поворотах навколо осей системи координат. Доведено, що виконання п'яти співвідношень необхідно і достатньо для визначення всіх акустичних осей у заданій системі координат. Показано, що акустична вісь у заданому фазовому напрямку існує тоді і тільки тоді, якщо два спеціальні вектори розмірності п'ять колінеарні. Для орторомбічного середовища ці співвідношення подано у явному вигляді однорідними многочленами шостого степеня від компонент вектора фазового напрямку і третього степеня від коефіцієнтів пружності. У площинах симетрії тільки два співвідношення не дорівнюють тотожно нулю. Теорію продемонстровано на двох прикладах анізотропних середовищ. У першому прикладі, для триклинного середовища, показано положення 16 акустичних осей як точки перетину графіків трьох співвідношень на площині (кут з вертикаллю, азимут). У цьому випадку 6 точок відповідають перетинанню листів фазових швидкостей  $P$  і  $S_1$  хвиль, а 10 точок — перетинанню листів  $S_1$  і  $S_2$  хвиль. Другий приклад демонструє визначення всіх акустичних осей в орторомбічному середовищі на підставі виведених співвідношень. Для другого прикладу графіки співвідношень наведено тільки в першому квадранті, оскільки вони симетричні відносно координатних площин.

**Ключові слова:** триклинне середовище, акустична вісь, сингулярний напрямок, поверхня повільності.

**Введение.** Акустическими осями (сингулярными направлениями) называются направления, вдоль которых совпадают листы поверхности медленности, или фазовых скоростей. Наличие акустических осей присуще многим анизотропным средам и приводит к осложнению волновых полей в окрестности акустических осей: векторы поляризации быстро изменяют направления [Shuvalov, 1998] и появляются сингулярные точки [Alshits, Lothe, 1979], на волновом фронте возникают каустики и коническая рефракция [Kim et al., 1993].

Акустические оси могут группироваться в линию (при наличии осевой симметрии) либо распределяться дискретно по поверхности медленности [Vavryšuk, 2005]. Квадраты фазовых скоростей удовлетворяют полиномиальному уравнению Кристоффеля, дискриминант которого полностью контролирует положение акустических осей [Fedorov, 1968]. Однако изучение положений дискретно расположенных

акустических осей с помощью одного уравнения неудобно, поскольку одно уравнение должно понижать размерность с двух (поверхность медленности) до нуля (акустическая ось). В связи с этим используются системы уравнений. Выполнение каждого уравнения определяет свою линию на поверхности медленности, а их пересечения определяют акустические оси. А. Г. Хаткевич вывел систему трех уравнений, определяющих акустические оси для триклинной среды при определенном выборе системы координат [Khatkevich, 1962]. Акустические оси для орторомбической среды, не находящиеся в плоскостях симметрии, определяются системой трех линейных уравнений относительно квадратов медленностей [Musgrave, 1995; Schoenberg, Helbig, 1997]. Максимальное количество акустических осей в триклинной, моноклинной, орторомбической и тригональной средах равно 16, в тетрагональной — 13, кубической — 7, трансверсально-изотропной — 1 или бесконечно много [Holm, 1992; Darinskii, 1994; Boulanger, Hayes, 1998; Vavryčuk, 2005].

Следует отметить, что поверхность медленности для триклинной среды определяется многочленом 6-й степени от трех переменных, а поверхность групповых скоростей намного более сложная [Grechka, 2017].

**Теория.** Акустические оси (сингулярные направления) в анизотропной среде характеризуются тем, что вдоль них совпадают фазовые скорости различных типов волн. Учитывая, что квадраты фазовых скоростей вдоль направления  $\mathbf{n} = (n_p)$  являются собственными числами симметрической матрицы Кристоффеля  $a_{ij} = \sum_{p,q} c_{pijq} \times n_p n_q$ , совпадение фазовых скоростей означает наличие кратных собственных чисел этой матрицы. В сферической системе координат

$$n_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_3 = \cos \theta, \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол с вертикалью,  $\varphi$  — азимут.

Число  $\lambda$  является собственным числом симметрической матрицы  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  тогда и только тогда, если матрица  $\mathbf{F} = (f_{ij}) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  вырождена, где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Число  $\lambda$  является кратным собственным значением матрицы  $\mathbf{A}$  тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $\mathbf{F}$  меньше ее размерности не меньше чем на 2.

Пусть  $A_{ij}$  и  $F_{ij}$  означают алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  и  $f_{ij}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{F}$  соответственно. Обозначим  $\hat{\mathbf{A}} = (A_{ij})^T$  и  $\hat{\mathbf{F}} = (F_{ij})^T$  соответствующие присоединенные матрицы. Матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  и  $\hat{\mathbf{F}}$  также являются симметрическими.

Матрица  $\mathbf{A}$  имеет кратное собственное значение  $\lambda$  тогда и только тогда, когда  $\hat{\mathbf{F}} = 0$ . Вычисления показывают, что  $F_{ij} = a_{ij}\lambda + A_{ij}$  при  $i \neq j$  и  $F_{ii} = \lambda^2 - (a_{mm} + a_{nn}) \times \lambda + A_{ii}$ , где  $m$  и  $n$  — пара дополнительных чисел к  $i$ , т. е.  $m \neq i$  и  $n \neq i$  и  $1 \leq i, m, n \leq 3$ .

Следовательно, условие  $\hat{\mathbf{F}} = 0$  равносильно системе уравнений

$$a_{ij}\lambda = -A_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad (2)$$

$$\lambda^2 - (a_{mm} + a_{nn})\lambda + A_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (3)$$

Вместо соотношений (3) будем использовать соотношения  $F_{ii} = F_{jj}$ , представленные в виде

$$(a_{ii} - a_{jj})\lambda = A_{jj} - A_{ii}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (4)$$

Выполнение уравнений (2), (4) равносильно тому, что матрица  $\hat{\mathbf{F}}$  является ска-

лярной. При  $\hat{\mathbf{F}} \neq 0$  эта матрица невырожденная и, следовательно, матрица  $\mathbf{A}$  также является скалярной. В этом случае она имеет трехкратное собственное значение. Следовательно, выполнение системы уравнений (2), (4) всегда равносильно наличию кратных корней у матрицы  $\mathbf{A}$  [Norris, 1985].

Введем векторы  $\mathbf{v}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ A_{ij} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ii} - a_{jj} \\ A_{ii} - A_{jj} \end{pmatrix}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , и  $2 \times 6$  матрицу:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{23}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{13}, \mathbf{w}_{23}). \quad (5)$$

Система уравнений (2), (4) имеет решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы  $\mathbf{B}$  коллинеарные, т. е.  $\text{rank } \mathbf{B} \leq 1$ . Поскольку  $\mathbf{w}_{13} = \mathbf{w}_{12} + \mathbf{w}_{23}$ , критерием кратности собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  является коллинеарность пяти векторов  $\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{23}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{23}$ . Приравнивая нулю  $2 \times 2$ -миноры матрицы  $\mathbf{B}$  с исключенным столбцом  $\mathbf{w}_{13}$ , получим 10 соотношений, обеспечивающих кратность собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ . Семь из этих миноров определяют многочлены  $R_i$  из статьи [Alshits, Lothe, 1979]:

$$\begin{aligned} R_1 &= \det(\mathbf{v}_{23}, \mathbf{v}_{13}) = a_{11} a_{13} a_{23} - a_{12} a_{13}^2 + a_{12} a_{23}^2 - a_{13} a_{22} a_{23}, \\ R_2 &= \det(\mathbf{v}_{23}, \mathbf{v}_{12}) = a_{11} a_{12} a_{23} - a_{12}^2 a_{13} - a_{12} a_{23} a_{33} + a_{13} a_{23}^2, \\ R_3 &= \det(\mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{12}) = -a_{12}^2 a_{23} + a_{12} a_{13} a_{22} - a_{12} a_{13} a_{33} + a_{13}^2 a_{23}, \\ R_4 &= \det(\mathbf{v}_{23}, \mathbf{w}_{13}) = \det(\mathbf{v}_{23}, \mathbf{w}_{12}) + \det(\mathbf{v}_{23}, \mathbf{w}_{23}) = a_{11}^2 a_{23} - \\ &- a_{11} a_{12} a_{13} - a_{11} a_{22} a_{23} - a_{11} a_{23} a_{33} + a_{12}^2 a_{23} + a_{12} a_{13} a_{33} + a_{22} a_{23} a_{33} - a_{23}^3, \\ R_5 &= \det(\mathbf{v}_{13}, \mathbf{w}_{23}) = -a_{11} a_{13} a_{22} + a_{11} a_{13} a_{33} + a_{12}^2 a_{13} - a_{12} a_{22} a_{23} + a_{12} a_{23} a_{33} - \\ &- a_{13}^3 + a_{13} a_{22}^2 - a_{13} a_{22} a_{33}, \\ R_6 &= \det(\mathbf{w}_{23}, \mathbf{v}_{12}) = a_{11} a_{12} a_{22} - a_{11} a_{12} a_{33} - a_{12}^3 + \\ &+ a_{12} a_{13}^2 - a_{12} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{33}^2 + a_{13} a_{22} a_{23} - a_{13} a_{23} a_{33}, \\ R_7 &= \det(\mathbf{w}_{23}, \mathbf{w}_{12}) = a_{11}^2 a_{22} - a_{11}^2 a_{33} - a_{11} a_{12}^2 + a_{11} a_{13}^2 - a_{11} a_{22}^2 + \\ &+ a_{11} a_{23}^2 + a_{12}^2 a_{22} - a_{13}^2 a_{33} + a_{22}^2 a_{33} - a_{22} a_{23}^2 - a_{22} a_{33}^2 + a_{23}^2 a_{33}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти многочлены линейно независимы над полем действительных чисел  $\mathbf{R}$ , поскольку многочлены  $R_i$  содержат одночлены, не входящие в другие многочлены  $R_j$  ( $j \neq i$ ). Такими, например, являются одночлены  $b_i$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11} a_{13} a_{23}, \quad b_2 = a_{11} a_{12} a_{23}, \quad b_3 = a_{12} a_{13} a_{22}, \quad b_4 = a_{23}^3, \quad b_5 = a_{13}^3, \\ b_6 &= a_{12}^3, \quad b_7 = a_{12}^2 a_{22}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что выражения  $R_i$  являются кубическими однородными многочленами от элементов  $a_{ij}$  матрицы Кристоффеля. В свою очередь, элементы матрицы Кристоффеля  $a_{ij}$  являются квадратными однородными многочленами от переменных  $n_1, n_2, n_3$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11} n_1^2 + c_{66} n_2^2 + c_{55} n_3^2 + 2c_{16} n_1 n_2 + 2c_{15} n_1 n_3 + 2c_{56} n_2 n_3, \\ a_{22} &= c_{66} n_1^2 + c_{22} n_2^2 + c_{44} n_3^2 + 2c_{26} n_1 n_2 + 2c_{46} n_1 n_3 + 2c_{24} n_2 n_3, \\ a_{33} &= c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2 + c_{33} n_3^2 + 2c_{45} n_1 n_2 + 2c_{35} n_1 n_3 + 2c_{34} n_2 n_3, \\ a_{12} &= c_{16} n_1^2 + c_{26} n_2^2 + c_{45} n_3^2 + 2d_{12} n_1 n_2 + 2d_{14} n_1 n_3 + 2d_{25} n_2 n_3, \\ a_{13} &= c_{15} n_1^2 + c_{46} n_2^2 + c_{35} n_3^2 + 2d_{14} n_1 n_2 + 2d_{13} n_1 n_3 + 2d_{36} n_2 n_3, \\ a_{23} &= c_{56} n_1^2 + c_{24} n_2^2 + c_{34} n_3^2 + 2d_{25} n_1 n_2 + 2d_{36} n_1 n_3 + 2d_{23} n_2 n_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $d_{12} = c_{12} + c_{66}$ ,  $d_{13} = c_{13} + c_{55}$ ,  $d_{14} = c_{14} + c_{56}$ ,  $d_{23} = c_{23} + c_{44}$ ,  $d_{25} = c_{25} + c_{46}$ ,  $d_{36} = c_{36} + c_{45}$ .

Следовательно, многочлены  $R_i$  являются однородными степени 6 относительно  $n_p$ . Если многочлен  $R_i$  не равен тождественно нулю, его графиком является линия на плоскости  $(\theta, \varphi)$ . Пересечения этих линий задают направления акустических осей.

Из соотношения  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}$  следует, что при  $i \neq j$  справедливы равенства

$$a_{li} A_{lj} + a_{2i} A_{2j} + a_{3i} A_{3j} = 0, \quad a_{1j} A_{li} + a_{2j} A_{2i} + a_{3j} A_{3i} = 0, \quad (9)$$

вычитая которые, получаем три тождества:

$$\det(\mathbf{w}_{12}, \mathbf{v}_{12}) = R_1, \quad \det(\mathbf{w}_{13}, \mathbf{v}_{13}) = R_2, \quad \det(\mathbf{w}_{23}, \mathbf{v}_{23}) = R_3. \quad (10)$$

Равенства (10) позволяют исключить миноры  $\det(\mathbf{w}_{12}, \mathbf{v}_{12})$ ,  $\det(\mathbf{w}_{13}, \mathbf{v}_{13})$  и  $\det(\mathbf{w}_{23}, \mathbf{v}_{23})$  из условий коллинеарности столбцов матрицы  $\mathbf{B}$ .

Следовательно, оставшиеся 7 миноров, представленные многочленами  $R_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , из (6), образуют полную линейно-независимую систему. Однако каждую акустическую ось можно определить пересечением только двух некоторых линий  $R_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Этот факт объясняется тем, что любой многочлен  $R_i$  линейно зависит от любых двух других многочленов с коэффициентами из кольца многочленов  $\mathbf{R}[a_{ij}]$ .

Для получения таких линейных соотношений между  $R_i$  рассмотрим матрицу  $\mathbf{C}$  размером  $3 \times 6$ , имеющую ранг, не превосходящий 2, повторив верхнюю строку матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{11} - a_{22} & a_{11} - a_{33} & a_{22} - a_{33} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{13} & \mathbf{v}_{23} & \mathbf{w}_{12} & \mathbf{w}_{13} & \mathbf{w}_{23} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Разложив  $3 \times 3$  миноры матрицы (11) по первой строке, получим искомые соотношения. Например,  $R_i$ ,  $i = 3, \dots, 7$  можно выразить через  $R_1, R_2$ , используя соотношения (6) и следующие равенства [Khatkevich, 1962; Alshits, Lathe, 1979]:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{13} & \mathbf{v}_{23} \end{vmatrix} &= a_{12} |\mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{23}| - a_{13} |\mathbf{v}_{12} \mathbf{v}_{23}| + a_{23} |\mathbf{v}_{12} \mathbf{v}_{13}| = \\ &= -a_{12} R_1 + a_{13} R_2 - a_{23} R_3 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{11} - a_{33} \\ \mathbf{v}_{13} & \mathbf{v}_{23} & \mathbf{w}_{13} \end{vmatrix} &= a_{13} |\mathbf{v}_{23} \mathbf{w}_{13}| - a_{23} |\mathbf{v}_{13} \mathbf{w}_{13}| + (a_{11} - a_{33}) |\mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{23}| = \\ &= a_{13} R_4 + a_{23} R_2 - (a_{11} - a_{33}) R_1 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{22} - a_{33} \\ \mathbf{v}_{13} & \mathbf{v}_{23} & \mathbf{w}_{23} \end{vmatrix} &= a_{13} |\mathbf{v}_{23} \mathbf{w}_{23}| - a_{23} |\mathbf{v}_{13} \mathbf{w}_{23}| + (a_{22} - a_{33}) |\mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{23}| = \\ &= -a_{13} R_3 - a_{23} R_5 + (a_{33} - a_{22}) R_1 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{22} - a_{33} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{23} & \mathbf{w}_{23} \end{vmatrix} &= a_{12} |\mathbf{v}_{23} \mathbf{w}_{23}| - a_{23} |\mathbf{v}_{12} \mathbf{w}_{23}| + (a_{22} - a_{33}) |\mathbf{v}_{12} \mathbf{v}_{23}| = \\ &= -a_{12} R_3 + a_{23} R_6 + (a_{33} - a_{22}) R_2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} - a_{22} & a_{22} - a_{33} \\ \mathbf{v}_{12} & \mathbf{w}_{12} & \mathbf{w}_{23} \end{vmatrix} &= a_{12} |\mathbf{w}_{12} \mathbf{w}_{23}| - (a_{11} - a_{22}) |\mathbf{v}_{12} \mathbf{w}_{23}| + (a_{22} - a_{33}) |\mathbf{v}_{12} \mathbf{w}_{12}| = \\ &= -a_{12} R_7 + (a_{11} - a_{22}) R_6 + (a_{33} - a_{22}) R_1 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Докажем, что выполнение только пяти равенств  $R_1 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 0$  необходимо и достаточно, чтобы матрица  $\mathbf{A}$  имела кратное собственное значение в любой системе координат.

Необходимость утверждения следует из определения выражений  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , которые равны 0 при коллинеарности столбцов матрицы  $\mathbf{B}$  из (5). Достаточность доказывается перебором следующих случаев и уточнением соотношений:

- 1)  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$  — контролирует коллинеарность только соотношение  $R_7 = 0$ ;
- 2)  $a_{12} = a_{13} = 0$ ,  $a_{23} \neq 0$  — соотношения  $R_4 = 0$ ,  $R_7 = 0$ ;
- 3)  $a_{12} = a_{23} = 0$ ,  $a_{13} \neq 0$  — соотношения  $R_5 = 0$ ,  $R_7 = 0$ ;
- 4)  $a_{13} = a_{23} = 0$ ,  $a_{12} \neq 0$  — соотношения  $R_6 = 0$ ,  $R_7 = 0$ ;
- 5)  $a_{12} = 0$ ,  $a_{13} \neq 0$ ,  $a_{23} \neq 0$ . В этом случае  $R_2 = a_{13} a_{23}^2 \neq 0$  и из соотношения (13) следует, что  $R_1 \neq 0$  или  $R_4 \neq 0$ , т. е. коллинеарности нет на основе критерия  $R_1 = 0$ ,  $R_4, \dots, R_7 = 0$ ;
- 6)  $a_{13} = 0$ ,  $a_{12} \neq 0$ ,  $a_{23} \neq 0$ . В этом случае  $R_3 = -a_{12}^2 a_{23} \neq 0$  и из соотношения (14) следует, что  $R_1 \neq 0$  или  $R_5 \neq 0$ , т. е. коллинеарности нет на основе критерия  $R_1 = 0$ ,  $R_4, \dots, R_7 = 0$ ;
- 7)  $a_{23} = 0$ ,  $a_{12} \neq 0$ ,  $a_{13} \neq 0$ . В этом случае  $R_1 = -a_{12} a_{13}^2 \neq 0$ , т. е. коллинеарности нет на основе критерия  $R_1 = 0$ ,  $R_4, \dots, R_7 = 0$ ;
- 8)  $a_{12} \neq 0$ ,  $a_{13} \neq 0$ ,  $a_{23} \neq 0$ . В этом случае из условия  $R_1 = 0$ ,  $R_4 = \dots = R_7 = 0$  и соотношений (13), (14) следует, что  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 0$ , т. е. выполняется полная система  $R_1 = \dots = R_7 = 0$  для наличия коллинеарности.

Покажем, что среди соотношений  $R_1 = 0, R_4 = \dots = R_7 = 0$  нет лишних. Для этого рассмотрим пять матриц,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

все собственные числа  $\lambda_i$  которых различные и при этом для матрицы  $\mathbf{A}_i$  только одно соотношение  $R_i \neq 0$ , а другие  $R_j = 0$  при  $j \neq i, j = 1, 4, 5, 6, 7$ :

$$\mathbf{A}_1: R_1 = -4, \quad R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4 - 2\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4 + 2\sqrt{2};$$

$$\mathbf{A}_4: R_4 = 3, \quad R_1 = R_5 = R_6 = R_7 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4;$$

$$\mathbf{A}_5: R_5 = 3, \quad R_1 = R_4 = R_6 = R_7 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4;$$

$$\mathbf{A}_6: R_6 = -1, \quad R_1 = R_4 = R_5 = R_7 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4;$$

$$\mathbf{A}_7: R_7 = -2, \quad R_1 = R_4 = R_5 = R_6 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Действительно, если игнорировать соотношение  $R_i = 0$ , приходим к выводу, что матрица  $\mathbf{A}_i$  имеет кратные собственные числа, поскольку  $R_j = 0$  при  $j \neq i$ . Это противоречие показывает, что необходимо учитывать все пять соотношений.

Для среды с орторомбической симметрией при условии  $d_{12} \neq 0, d_{13} \neq 0$  и  $d_{23} \neq 0$  акустические оси, не находящиеся в плоскостях симметрии, можно определить из уравнений  $F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0$ , которые сводятся к линейным соотношениям относительно квадратов компонент вектора медленности  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^T$  [Schoenberg, Helbig, 1997]:

$$m_{12} = c_{55}s_1^2 + c_{44}s_2^2 + \left( c_{33} - \frac{d_{13}d_{23}}{d_{12}} \right) s_3^2 - 1 = 0, \quad (17)$$

$$m_{13} = c_{66}s_1^2 + \left( c_{22} - \frac{d_{12}d_{23}}{d_{13}} \right) s_2^2 + c_{44}s_3^2 - 1 = 0, \quad (18)$$

$$m_{23} = \left( c_{11} - \frac{d_{12}d_{13}}{d_{23}} \right) s_1^2 + c_{66}s_2^2 + c_{55}s_3^2 - 1 = 0. \quad (19)$$

Из соотношений (17)–(19) следует, что внутри каждого октанта может быть не более одной акустической оси. Отметим, что выражения  $m_{12}, m_{13}, m_{23}$  связаны с многочленами  $R_i$  и собственным значением  $\lambda$  матрицы  $\mathbf{A}$  формулами

$$R_1 = \lambda a_{13}a_{23}(m_{23} - m_{13}), \quad R_2 = \lambda a_{12}a_{23}(m_{23} - m_{12}), \quad R_3 = \lambda a_{12}a_{13}(m_{13} - m_{12}). \quad (20)$$

В приложении 1 приведены формулы  $R_i$  для орторомбической среды, явно выраженные через компоненты направляющего вектора  $\mathbf{n} = (n_j)$ , и коэффициенты упругости  $c_{mn}$ .

В плоскостях симметрии положение акустической оси можно определить одним уравнением относительно  $\operatorname{tg} \theta$ , где  $\theta$  — угол с вертикалью. Например, в плоскости  $p_2 = 0$  выполняется уравнение [Schoenberg, Helbig, 1997]

$$m_2 = (c_{55} - c_{66})(c_{11} - c_{66}) \operatorname{tg}^4 \theta + \left[ (c_{33} - c_{44})(c_{11} - c_{66}) + (c_{55} - c_{44})(c_{55} - c_{66}) - d_{13}^2 \right] \operatorname{tg}^2 \theta + (c_{33} - c_{44})(c_{55} - c_{44}) = 0. \quad (21)$$

В этом случае в плоскостях симметрии все выражения  $R_i$  тождественно равны 0, кроме  $R_5$  и  $R_7$ , определяющих акустические оси (см. приложение 1):

$$R_5 = n_3^6 d_{13} \operatorname{tg} \theta m_2, \quad R_7 = -n_3^6 \left[ (c_{11} - c_{55}) \operatorname{tg}^2 \theta - (c_{33} - c_{55}) \right] m_2. \quad (22)$$

Другой подход к изучению сингулярных направлений предложил Норрис [Norris, 2004]. Этот подход основан на приведенной ниже теореме и подчеркивает тензорный характер исследуемых выражений.

**Теорема** [Norris, 2004]. Симметрическая матрица  $\mathbf{A}$  имеет кратное собственное значение тогда и только тогда, когда для любого вектора  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$  выполняется равенство  $\det(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}, \mathbf{A}^2\mathbf{m}) = 0$ .

Действительно, матрицу  $\mathbf{A}$  можно привести к диагональному виду  $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . В этой системе координат теорема следует из равенств

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}, \mathbf{A}^2\mathbf{m}) &= \det \begin{pmatrix} m_1 & \lambda_1 m_1 & \lambda_1^2 m_1 \\ m_2 & \lambda_2 m_2 & \lambda_2^2 m_2 \\ m_3 & \lambda_3 m_3 & \lambda_3^2 m_3 \end{pmatrix} = m_1 m_2 m_3 \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \\ &= m_1 m_2 m_3 (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned}$$

Поскольку  $\det(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}, \mathbf{A}^2\mathbf{m}) = \sum \Psi_{pqr} m_p m_q m_r$ ,  $p \leq q \leq r$ , то коэффициенты  $\Psi_{pqr} = \Psi_{pqr}(a_{ij})$  являются тензором 3-го ранга и определяют систему 10 уравнений для акустических осей. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \Psi_{111} &= -R_3, \quad \Psi_{112} = -2R_2 - R_5, \quad \Psi_{122} = 2R_3 + R_4, \quad \Psi_{113} = 2R_1 + R_6, \quad \Psi_{123} = -R_7, \\ \Psi_{133} &= R_3 - R_4, \quad \Psi_{222} = R_2, \quad \Psi_{223} = R_1 - R_6, \quad \Psi_{233} = -R_2 + R_5, \quad \Psi_{333} = -R_1. \end{aligned} \quad (23)$$

На векторном пространстве, порожденном выражениями  $R_i$ , действует группа  $SO_3(\mathbf{R})$  и образует 7-мерное неприводимое представление. Под действием подгруппы вращений относительно фиксированной оси векторное пространство расщепляется на прямую сумму трех двухмерных и 1-го одномерного инвариантных подпространств [Norris, 2004]. В частности, справедливы формулы для поворотов на углы  $\varphi$  относительно осей  $OX_i$  системы координат:

$$\begin{aligned} R_3^\varphi &= R_3, \\ R_6^\varphi + 2R_1^\varphi \pm i(R_5^\varphi + 2R_2^\varphi) &= (R_6 + 2R_1 \pm i(R_5 + 2R_2)) \exp(\pm i\varphi), \\ R_3^\varphi + 2R_4^\varphi \pm iR_7^\varphi &= (R_3 + 2R_4 \pm iR_7) \exp(\mp 2i\varphi), \end{aligned}$$

$$OX_1 - 2R_1^\varphi - R_6^\varphi \pm i(2R_2^\varphi - R_5^\varphi) = (2R_1 - R_6 \pm i(2R_2 - R_5)) \exp(\mp 3i\varphi), \quad (24)$$

$$R_2^\varphi = R_2,$$

$$R_6^\varphi - R_1^\varphi \pm i(2R_3^\varphi + R_4^\varphi) = (R_6 - R_1 \pm i(2R_3 + R_4)) \exp(\pm i\varphi),$$

$$R_2^\varphi + 2R_5^\varphi \pm iR_7^\varphi = (R_2 + 2R_5 \pm iR_7) \exp(\pm 2i\varphi),$$

$$OX_2 - R_6^\varphi + 3R_1^\varphi \pm i(2R_3^\varphi - R_4^\varphi) = (R_6 + 3R_1 \pm i(2R_3 - R_4)) \exp(\pm 3i\varphi), \quad (25)$$

$$R_1^\varphi = R_1,$$

$$R_2^\varphi - R_5^\varphi \pm i(R_4^\varphi - R_3^\varphi) = (R_2 - R_5 \pm i(R_4 - R_3)) \exp(\mp i\varphi),$$

$$R_1^\varphi + 2R_6^\varphi \pm iR_7^\varphi = (R_1 + 2R_6 \pm iR_7) \exp(\mp 2i\varphi),$$

$$OX_3 - 3R_2^\varphi + R_5^\varphi \pm i(3R_3^\varphi + R_4^\varphi) = (3R_2 + R_5 \pm i(3R_3 + R_4)) \exp(\mp 3i\varphi). \quad (26)$$

В статье [Vavryšuk, 2005] показано, что максимальное количество акустических осей для триклинной среды равно 16 и приведен пример среды с таким их количеством. Следуя рассуждениям автора, для определения максимального количества акустических осей допустим, что вектор медленности  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^T$  соответствует сингулярному направлению. В этом случае матрица  $b_{ij} = c_{mijn} s_m s_n - \delta_{ij}$  имеет ранг 1, т.е. имеет вид  $(g_i g_j)$ , где  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$  — некоторый вектор и  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Следовательно, справедлива система шести уравнений  $c_{mijn} s_m s_n = g_i g_j + \delta_{ij}$  относительно шести неизвестных  $s_1, s_2, s_3, g_1, g_2, g_3$ . Уравнения имеют степень 2. По теореме Безу [Shafarevich, 2010] эта система может иметь максимально  $2^6 = 64$  корня. Однако векторы  $\pm \mathbf{s}$  и  $\pm \mathbf{g}$  определяют одно направление. Следовательно, максимальное количество акустических осей не больше  $64/4 = 16$ .

### Численные примеры

Рассмотрим два примера расчета положения акустических осей на основе соотношений (6). В первом примере используются коэффициенты упругости  $\mathbf{C}_{\text{TRICL}}$  для триклинной среды из статьи [Vavryšuk, 2005], а во втором — коэффициенты упругости  $\mathbf{C}_{\text{ORTHO}}$  для стандартной орторомбической среды из статьи [Schoenberg, Helbig, 1997], где

$$\mathbf{C}_{\text{TRICL}} = \begin{pmatrix} 137 & 52 & 57 & -13 & 32 & -20 \\ & 147 & 18 & -6 & 20 & -9 \\ & & 100 & 22 & -15 & 5 \\ & & & 52 & 26 & -7 \\ & & & & 75 & -40 \\ & & & & & 30 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{ORTHO}} = \begin{pmatrix} 9 & 3,6 & 2,25 & 0 & 0 & 0 \\ & 9,84 & 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5,9375 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 1,6 & 0 \\ & & & & & 2,182 \end{pmatrix}. \quad (27)$$



На рис. 1 показаны графики кривых  $R_i(\theta, \varphi) = 0$ ,  $i = 1, 3, 7$ , для триклинной среды с параметрами  $\mathbf{C}_{\text{TRICL}}$ . Кружочками и ромбиками отмечены точки  $(\theta, \varphi)$ , через которые проходят все три кривые. Подставляя полученные углы  $(\theta, \varphi)$  в соотношения (1), можно убедиться, что матрица Кристоффеля при этих углах имеет двукратное собственное значение. В рассматриваемом примере ромбиками отмечены шесть точек пересечения листов фазовых скоростей  $qP$  с  $S_1$ , а кружочками — 10 точек пересечения листов  $S_1$  с  $S_2$ . Координаты этих точек пересечения определяют направления 16 акустических осей. Все акустические оси являются стабильными, так как пересечения кривых остаются при любом малом возмущении коэффициентов упругости. Следует отметить, что для коэффициентов упругости из матрицы  $\mathbf{C}_{\text{TRICL}}$  только три соотношения  $R_i(\theta, \varphi) = 0$ ,  $i = 1, 3, 7$ , полностью определяют все акустические оси. Графики остальных соотношений  $i = 2, 4, 5, 6$  также проходят через отмеченные ромбиками и кружочками точки, но не показаны на рис. 1.

Поскольку для орторомбической среды кривые  $R_i(\theta, \varphi) = 0$  зеркально симметричны относительно прямых  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pm 90^\circ$ , то направления акустических осей достаточно найти внутри первого квадранта и на его границах. Для рассматриваемого примера с параметрами упругости из матрицы  $\mathbf{C}_{\text{ORTHO}}$  графики кривых  $R_i(\theta, \varphi) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , в первом квадранте  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ,  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$  показаны на рис. 2. В первом квадранте, включая его границы, находятся четыре акустических оси. Следовательно, общее количество акустических осей для данной среды равно 10 [Schoenberg, Helbig, 1997]. На рис. 3 изображены графики поверхностей  $y = R_i(\theta, \varphi)$  при  $y \geq 0$ .

**Выводы.** В статье разработан метод получения соотношений, описывающих положение акустических осей в триклинной среде и зависимостей между ними. Определено изменение соотношений при поворотах относительно осей системы координат. Показано, что выполнение пяти соотношений необходимо и достаточно для описания всех акустических осей в любой фиксированной системе координат. Теория продемонстрирована на двух примерах триклинной и орторомбической среды.

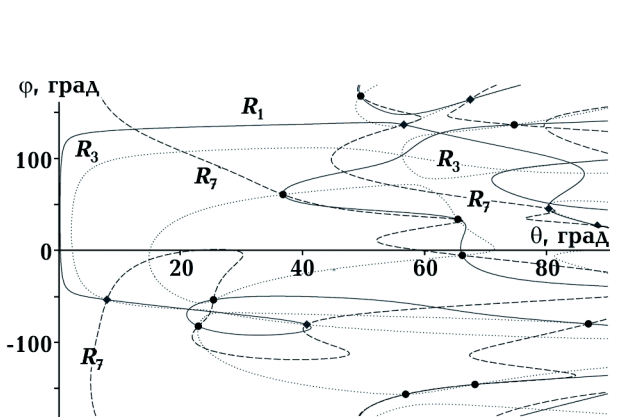


Рис. 1. Графики соотношений  $R_i(\theta, \varphi) = 0$ ,  $i = 1, 3, 7$ , для триклинной среды с параметрами  $\mathbf{C}_{\text{TRICL}}$ . Ромбиками и кружочками отмечены точки пересечения листов фазовых скоростей  $qP$  с  $S_1$  и  $S_1$  с  $S_2$  соответственно.

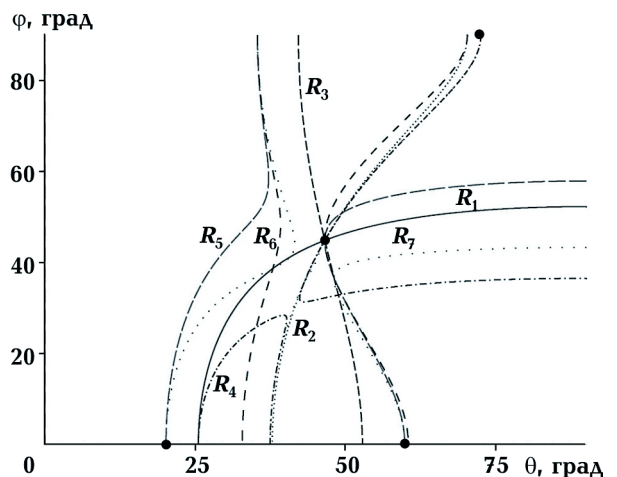


Рис. 2. Графики соотношений  $R_i(\theta, \varphi) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , для орторомбической среды с параметрами  $\mathbf{C}_{\text{ORTHO}}$ . Положения четырех акустических осей отмечены черными кружочками.

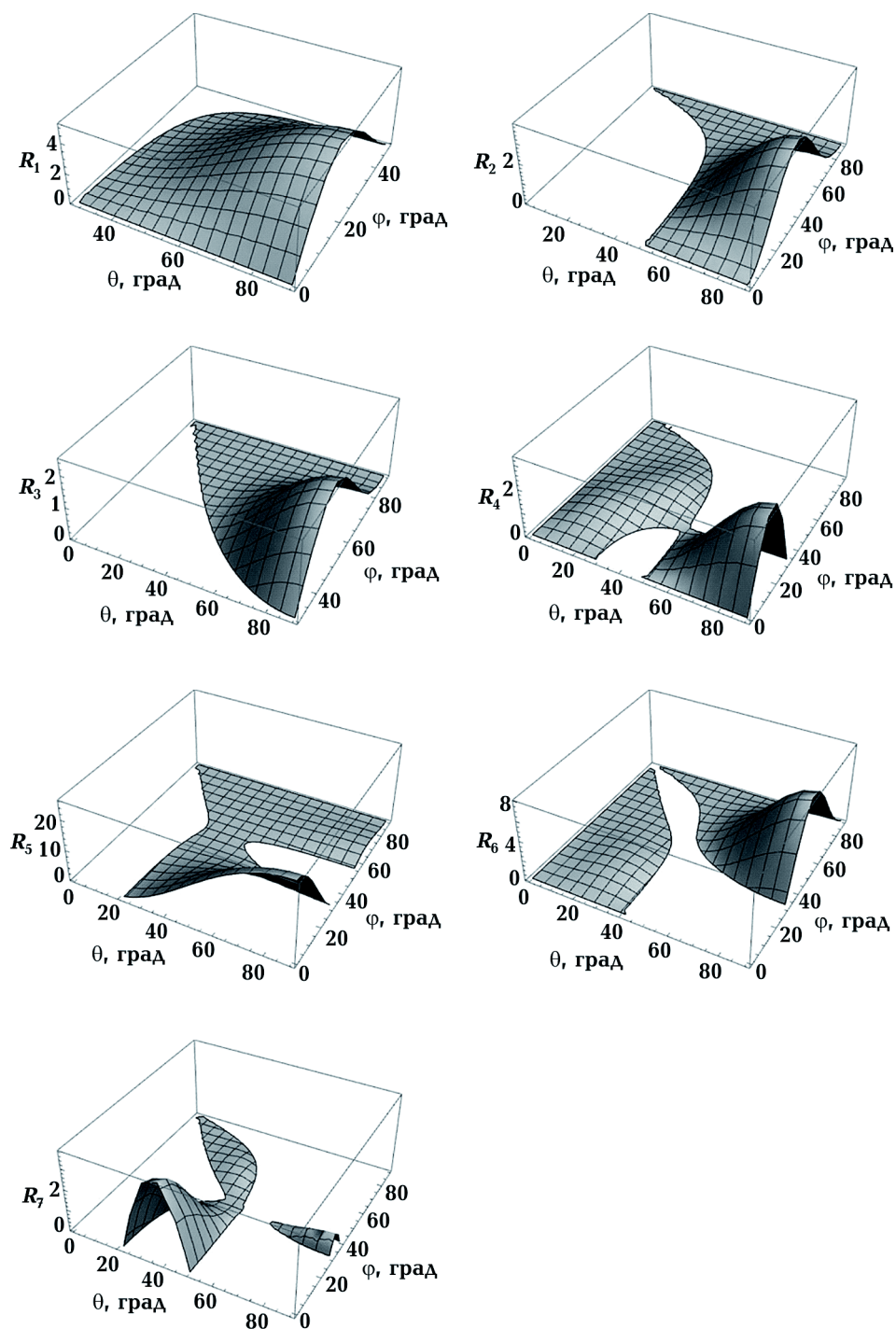


Рис. 3. Поверхности  $R_i(\theta, \varphi)$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , в первом октанте для орторомбической среды с параметрами  $\mathbf{C}_{\text{ОРТНО}}$ .

Для орторомбической среды соотношения  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , явно выражаются через компоненты направляющего вектора  $\mathbf{n} = (n_j)$ , а коэффициенты упругости  $c_{mn}$  — однородными многочленами шестой степени от  $n_j$  и третьей степени от  $c_{mn}$ :

$$R_1 = n_1 n_2 n_3^2 (r_{11} n_1^2 + r_{12} n_2^2 + r_{13} n_3^2),$$

$$R_2 = n_1 n_2^2 n_3 (r_{21} n_1^2 + r_{22} n_2^2 + r_{23} n_3^2),$$

$$R_3 = n_1^2 n_2 n_3 (r_{31} n_1^2 + r_{32} n_2^2 + r_{33} n_3^2),$$

$$R_4 = n_2 n_3 (r_{41} n_1^4 + r_{42} n_2^4 + r_{43} n_3^4 + r_{44} n_1^2 n_2^2 + r_{45} n_1^2 n_3^2 + r_{46} n_2^2 n_3^2),$$

$$R_5 = n_1 n_3 (r_{51} n_1^4 + r_{52} n_2^4 + r_{53} n_3^4 + r_{54} n_1^2 n_2^2 + r_{55} n_1^2 n_3^2 + r_{56} n_2^2 n_3^2),$$

$$R_6 = n_1 n_2 (r_{61} n_1^4 + r_{62} n_2^4 + r_{63} n_3^4 + r_{64} n_1^2 n_2^2 + r_{65} n_1^2 n_3^2 + r_{66} n_2^2 n_3^2),$$

$$R_7 = r_{71} n_1^6 + r_{72} n_2^6 + r_{73} n_3^6 + r_{74} n_1^4 n_2^2 + r_{75} n_1^4 n_3^2 + r_{76} n_2^4 n_3^2 + r_{77} n_1^2 n_2^4 +$$

$$+ r_{78} n_1^2 n_3^4 + r_{79} n_2^2 n_3^4 + r_{710} n_1^2 n_2^2 n_3^2,$$

где

$$r_{11} = d_{13} (d_{23} (c_{11} - c_{66}) - d_{12} d_{13}), \quad r_{12} = -d_{23} (d_{23} (c_{22} - c_{66}) - d_{12} d_{23}),$$

$$r_{13} = (c_{55} - c_{44}) d_{12} d_{23},$$

$$r_{21} = d_{12} (d_{23} (c_{11} - c_{55}) - d_{12} d_{13}), \quad r_{22} = -(c_{44} - c_{66}) d_{12} d_{23},$$

$$r_{23} = -d_{23} (d_{12} (c_{33} - c_{55}) - d_{13} d_{23}),$$

$$r_{31} = -(c_{55} - c_{66}) d_{12} d_{13}, \quad r_{32} = d_{12} (d_{13} (c_{22} - c_{44}) - d_{12} d_{23}),$$

$$r_{33} = -d_{13} (d_{12} (c_{33} - c_{44}) - d_{13} d_{23}),$$

$$r_{41} = (c_{11} - c_{55}) ((c_{11} - c_{66}) d_{23} - d_{12} d_{13}), \quad r_{42} = (c_{22} - c_{66}) (c_{44} - c_{66}) d_{23},$$

$$r_{43} = -(c_{33} - c_{55}) (c_{55} - c_{44}) d_{23},$$

$$r_{44} = -d_{23} ((c_{11} - c_{66}) (c_{44} - c_{66}) + (c_{22} - c_{66}) (c_{11} - c_{55})) + (c_{44} - c_{66}) d_{12} d_{13} + d_{12}^2 d_{23},$$

$$r_{45} = d_{23} ((c_{11} - c_{55}) (c_{55} - c_{44}) - (c_{33} - c_{55}) (c_{11} - c_{66})) + (c_{33} - c_{55}) d_{12} d_{13},$$

$$r_{46} = -d_{23} ((c_{55} - c_{44}) (c_{44} - c_{66}) - (c_{22} - c_{66}) (c_{33} - c_{55})) - d_{23}^3,$$

$$\begin{aligned}
 r_{51} &= (c_{11} - c_{66})(c_{55} - c_{66})d_{13}, \quad r_{52} = (c_{22} - c_{44})((c_{22} - c_{66})d_{13} - d_{12}d_{23}), \\
 r_{53} &= (c_{33} - c_{44})(c_{55} - c_{44})d_{13}, \\
 r_{54} &= -((c_{11} - c_{66})(c_{22} - c_{44}) + (c_{22} - c_{66})(c_{55} - c_{66}))d_{13} + (c_{55} - c_{66})d_{12}d_{23} + d_{12}^2d_{13}, \\
 r_{55} &= ((c_{11} - c_{66})(c_{33} - c_{44}) + (c_{55} - c_{44})(c_{55} - c_{66}))d_{13} + d_{13}^3, \\
 r_{56} &= -((c_{22} - c_{44})(c_{55} - c_{44}) + (c_{22} - c_{66})(c_{33} - c_{44}))d_{13} + (c_{33} - c_{44})d_{12}d_{23}, \\
 r_{61} &= -(c_{11} - c_{55})(c_{55} - c_{66})d_{12}, \quad r_{62} = -(c_{22} - c_{44})(c_{44} - c_{66})d_{12}, \\
 r_{63} &= (c_{33} - c_{44})((c_{33} - c_{55})d_{12} - d_{12}d_{23}), \\
 r_{64} &= ((c_{11} - c_{55})(c_{22} - c_{44}) + (c_{44} - c_{66})(c_{55} - c_{66}))d_{12} - d_{12}^3, \\
 r_{65} &= ((c_{33} - c_{55})(c_{55} - c_{66}) - (c_{33} - c_{44})(c_{11} - c_{55}))d_{12} - (c_{55} - c_{66})d_{13}d_{23} + d_{13}^2d_{12}, \\
 r_{66} &= -(c_{22} - c_{44})(c_{33} - c_{55}) + (c_{44} - c_{66})(c_{33} - c_{44})d_{12} + (c_{22} - c_{44})d_{13}d_{23}, \\
 r_{71} &= -(c_{11} - c_{55})(c_{11} - c_{66})(c_{55} - c_{66}), \quad r_{72} = (c_{22} - c_{44})(c_{22} - c_{66})(c_{44} - c_{66}), \\
 r_{73} &= (c_{33} - c_{44})(c_{33} - c_{55})(c_{55} - c_{44}), \\
 r_{74} &= -(c_{22} - c_{66})(c_{55} - c_{66})^2 + 2(c_{44} - c_{66})(c_{55} - c_{66})(c_{11} - c_{66}) + (c_{22} - c_{44})(c_{11} - c_{66})^2 - \\
 &\quad - (c_{11} - c_{66})d_{12}^2, \\
 r_{75} &= (c_{33} - c_{55})(c_{55} - c_{66})^2 - 2(c_{55} - c_{44})(c_{55} - c_{66})(c_{11} - c_{55}) - (c_{33} - c_{44})(c_{11} - c_{55})^2 + \\
 &\quad + (c_{11} - c_{55})d_{13}^2, \\
 r_{76} &= -(c_{33} - c_{44})(c_{44} - c_{66})^2 - 2(c_{55} - c_{44})(c_{44} - c_{66})(c_{22} - c_{44}) + (c_{33} - c_{55})(c_{22} - c_{44})^2 - \\
 &\quad - (c_{22} - c_{44})d_{23}^2, \\
 r_{77} &= (c_{11} - c_{66})(c_{44} - c_{66})^2 - 2(c_{44} - c_{66})(c_{55} - c_{66})(c_{22} - c_{66}) - (c_{11} - c_{55})(c_{22} - c_{66})^2 + \\
 &\quad + (c_{22} - c_{66})d_{12}^2, \\
 r_{78} &= -(c_{11} - c_{55})(c_{55} - c_{44})^2 + 2(c_{55} - c_{44})(c_{55} - c_{66})(c_{33} - c_{55}) + (c_{11} - c_{66})(c_{33} - c_{55})^2 - \\
 &\quad - (c_{33} - c_{55})d_{13}^2, \\
 r_{79} &= (c_{22} - c_{44})(c_{55} - c_{44})^2 + 2(c_{55} - c_{44})(c_{44} - c_{66})(c_{33} - c_{44}) - (c_{22} - c_{66})(c_{33} - c_{44})^2 + \\
 &\quad + (c_{33} - c_{44})d_{23}^2,
 \end{aligned}$$

$$r_{710} = 2 \left[ (c_{44} - c_{66})(c_{11}c_{33} + c_{22}c_{55}) - (c_{55} - c_{66})(c_{22}c_{33} + c_{11}c_{44}) + (c_{55} - c_{44}) \times \right. \\ \left. \times (c_{11}c_{22} + c_{33}c_{66}) - (c_{55} - c_{44})(c_{44} - c_{66})(c_{55} - c_{66}) \right] - (c_{44} - c_{66})d_{13}^2 + \\ + (c_{55} - c_{66})d_{23}^2 - (c_{55} - c_{44})d_{12}^2.$$

### Список литературы

- Al'shits, V.I., & Lothe, J. (1979). Elastic waves in triclinic crystals. I, II, III. *Sov. Phys. Crystallogr.*, 24, 387—392, 393—398, 644—648.
- Boulanger, Ph., Hayes, M. (1998). Acoustic axes for elastic waves in crystals: Theory and applications. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 454, 2323—2346. doi: 10.1098/rspa.1998.0261.
- Darinskii, B.M. (1994). Acoustic axes in crystals. *Sov. Phys. Crystallogr*, 39(5), 773—780.
- Fedorov, F.I. (1968). *Theory of Elastic Waves in Crystals*. New York: Plenum Press, 375 p.
- Grechka, V. (2017). Algebraic degree of a general group-velocity surface. *Geophysics*, 82(4), WA45—WA53. doi: <https://doi.org/10.1190/geo2016-0523.1>.
- Holm, P. (1992). Generic elastic media. *Physica Scripta*, 44, 122—127. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/1992/T44/019>.
- Khatkevich, A. G. (1962). The acoustic axis in crystals. *Sov. Phys. Crystallogr.*, 7, 601—604.
- Kim, K. Y., Sachse, W., & Every, A. G. (1993). Focusing of acoustic energy at the conical point in zinc. *Physical Review Letters*, 70, 3443—3446. doi: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3443>.
- Musgrave, M.J.P. (1985). Acoustic axes in orthorhombic media. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 401, 131—143. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0091>.
- Norris, A.N. (2004). Acoustic axes in elasticity. *Wave Motion*, 40(4), 315—328. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.005>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*, 62(6), 1954—1974. doi: <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.
- Shafarevich, I.R. (2010). *Basic Algebraic Geometry* 1. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 310 p. doi: 10.1007/978-3-642-37956-7.
- Shuvalov, A.L. (1998). Topological features of the polarization fields of plane acoustic waves in anisotropic media. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 454, 2911—2947. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0286>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. doi: <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.

# Properties of acoustic axes in triclinic media

*Yu. V. Roganov, A. Stovas, V. Yu. Roganov, 2019*

We developed a method of obtaining relationships that describe the position of the acoustic axes in a triclinic medium and the dependencies between them. It is proved that these relations are linearly independent in real number system. However, any relationship algebraically depends on other two relationships. The relation between derived relationships and those obtained in earlier papers is also investigated. The formulae defining the change of these relationships when rotating around the axes of the coordinate system are derived. It is proved that the fulfillment of five relations is necessary and sufficient for the definition of all acoustic axes in a given coordinate system. It is shown that the acoustic axis in a given phase direction exists if and only if the specified two vectors of dimension five are collinear. For an orthorhombic medium, these relations are represented in an explicit form by homogeneous polynomials of the sixth degree in the components of the phase direction vector and the third degree in the stiffness coefficients. It is shown that in symmetry planes, only two of these relations are not identically equal to zero. The theory is illustrated in two numerical examples of anisotropic media. In the first example, for a triclinic medium, the positions of the sixteen acoustic axes are shown as the intersection points of the graphs of three relationships on the plane (phase polar and azimuth angles). In this case, six points correspond to the intersections of  $P$  and  $S_1$  phase velocities sheets, and ten points correspond to the intersections of  $S_1$  and  $S_2$  phase velocities sheets. The second example demonstrates the definition of all acoustic axes in an orthorhombic medium based on the derived relationships. To illustrate this example, we consider only one quadrant due to symmetry with respect to symmetry planes.

**Key words:** triclinic medium, acoustic axis, singular direction, slowness surface.

## References

- Al'shits, V.I., & Lothe, J. (1979). Elastic waves in triclinic crystals. I, II, III. *Sov. Phys. Crystallogr.*, 24, 387—392, 393—398, 644—648.
- Boulanger, Ph., Hayes, M. (1998). Acoustic axes for elastic waves in crystals: Theory and applications. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 454, 2323—2346. doi: 10.1098/rspa.1998.0261.
- Darinskii, B.M. (1994). Acoustic axes in crystals. *Sov. Phys. Crystallogr*, 39(5), 773—780.
- Fedorov, F.I. (1968). *Theory of Elastic Waves in Crystals*. New York: Plenum Press, 375 p.
- Grechka, V. (2017). Algebraic degree of a general group-velocity surface. *Geophysics*, 82(4), WA45—WA53. doi: <https://doi.org/10.1190/geo2016-0523.1>.
- Holm, P. (1992). Generic elastic media. *Physica Scripta*, 44, 122—127. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/1992/T44/019>.
- Khatkevich, A.G. (1962). The acoustic axis in crystals. *Sov. Phys. Crystallogr.*, 7, 601—604.
- Kim, K.Y., Sachse, W., & Every, A.G. (1993). Focusing of acoustic energy at the conical point in zinc. *Physical Review Letters*, 70, 3443—3446. doi: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3443>.

- Musgrave, M.J.P. (1985). Acoustic axes in orthorhombic media. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 401, 131—143. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0091>.
- Norris, A.N. (2004). Acoustic axes in elasticity. *Wave Motion*, 40(4), 315—328. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.005>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*, 62(6), 1954—1974. doi: <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.
- Shafarevich, I.R. (2010). *Basic Algebraic Geometry* 1. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 310 p. doi: 10.1007/978-3-642-37956-7.
- Shuvalov, A.L. (1998). Topological features of the polarization fields of plane acoustic waves in anisotropic media. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 454, 2911—2947. doi: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0286>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. doi: <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.