УДК 517.946

И. И. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We investigate the continuity of solutions of quasilinear parabolic equations near nonsmooth boundary of a cylindrical domain. As a special case, one can consider the equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = 0$ with the p-Laplace operator Δp. We prove a sufficient condition of the regularity of boundary point in terms of C_p-capacity.

Досліджується неперервність розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь біля негладкої границі циліндричної області. Як частинний випадок можна розглядати рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = 0$ з оператором p-Лапласа Δp. Доведено достатню умову регулярності граничної точки в термінах C_p-ємності.

1. Введение. Изучается поведение решений вблизи негладкой границы цилиндрической области для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = b\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (x, t) \in \Omega_T \equiv \Omega \times (0, T). \quad (1.1)$$

Гельдеровость решений уравнения (1.1) внутри Ω_T, а также вплоть до достаточно гладкой границы области Ω_T была доказана Е. Ди Бенедетто [1, 2]. В случае линейного роста коэффициентов $a_i(x, t, u, \xi)$, $i = 1, \dots, N$, гельдеровость решений получена в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. [3]).

Для уравнения теплопроводности вопрос о непрерывности решений вплоть до границы был рассмотрен А. Н. Тихоновым [4].

Для квазилинейного параболического уравнения с линейным ростом коэффициентов достаточное условие регулярности граничной точки получено Н. Эклундом [5], В. П. Цимером [6]. Необходимое условие регулярности граничной точки получено И. В. Скрыпником [7].

В данной работе устанавливается достаточное условие регулярности граничной точки для области Ω_T, совпадающее с условием регулярности граничной точки для уравнения вида p-Лапласа. Получена также оценка модуля непрерывности решения уравнения (1.1) вблизи граничной точки области Ω_T.

2. Доказательство основной теоремы при предполагаемых априорных оценках. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в R^N. Будем изучать поведение решений уравнения (1.1) в точках $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ в предположениях, что функции $a_i(x, t, u, v)$, $i = 1, \dots, N$, $b(x, t, u, v)$ определены при $x \in R^N$, $t \in (0, T)$, $u \in R^1$, $v \in R^N$, удовлетворяют условию Каратеодори, существуют производные $\frac{\partial a_i(x, t, u, v)}{\partial v_j}$, $\frac{\partial a_i(x, t, u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i(x, t, u, v)}{\partial x_j}$ и выполняются неравенства

$$C_0 |v|^{p-2} |\xi|^2 \le \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i(x, t, u, v)}{\partial v_j} \xi_i \xi_j \le C_1 |v|^{p-2} |\xi|^2, \quad p > 2, \qquad (2.1)$$

$$|b(x,t,u,v)| + |a_i(x,t,u,v)| + \left|\frac{\partial a_i(x,t,u,v)}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial a_i(x,t,u,v)}{\partial x}\right| \le$$
$$\le C_1\left(|v|^{p-1}+1\right), \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{1,N}. \tag{2.2}$$

Отметим, что из неравенств (2.1), (2.2) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}[\,a_i(x,t,u,v) - a_i(x,t,u,w)\,](v-w)_i \ge$$
$$\ge \tilde{C}_0[|v|+|w|]^{p-2}|v-w|^2 - \tilde{C}_1[|v|+|w|]^{p-2}|u-\rho|^2, \tag{2.3}$$

справедливое для любых $u, \rho \in R^1$, $v, w \in R^N$ с некоторыми постоянными $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, зависящими лишь от C_0, C_1, N, p.

Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x,t) \in V_{2,p}(\Omega_T) \cap L_\infty(\Omega_T)$ такую, что при всех $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,p}(\Omega_T)$ выполнено тождество

$$\int_\Omega u(x,t_2)\psi(x,t_2)\,dx - \int_\Omega u(x,t_1)\psi(x,t_1)\,dx +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\left\{-u(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - b\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi\right\}dx\,dt = 0, \tag{2.4}$$

для всех $0 \le t_1 < t_2 < T$. Используемые здесь пространства $V_{2,p}(\Omega_T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,p}(\Omega_T)$ определены, например, в [3].

Замечание 2.1. В случае, если $b(x,t,u,v)$ не зависит от v, не требуется дифференцируемости коэффициентов $a_i(x,t,u,v)$ и вместо (2.1) требуем

$$\sum_{i=1}^{N}[\,a_i(x,t,u,v) - a_i(x,t,\rho,w)\,](v_i - w_i) \ge$$
$$\ge C_0[|v|+|w|]^{p-2}|v-w|^2 - C_1[|v|+|w|]^{p-2}|u-\rho|^2 \tag{2.5}$$

для $(x,t) \in \Omega_T$, $v, w \in R^N$, $u, \rho \in R^1$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ — регулярная граничная точка области Ω_T для уравнения (1.1), если для любого определенного в Ω_T решения $u(x,t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию*

$$\varphi(x,t)[\,u(x,t) - f(x,t)\,] \in \overset{\circ}{V}_{2,p}(\Omega_T) \tag{2.6}$$

с функцией $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}_T) \cap W^{1,1}_p(\Omega_T)$ и бесконечно дифференцируемой функцией $\varphi(x,t)$, равной единице в окрестности (x_0,t_0), выполнено равенство

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\(x,t)\in\Omega_T}} = f(x_0,t_0). \tag{2.7}$$

Для формулировки условия регулярности граничной точки напомним определение понятия емкости. Обозначим для ограниченного множества $E \subset R^N$ через $\mathfrak{M}(E)$ множество функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^N)$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) \ge 1$, $x \in E$.

Определение 2.2. *Емкостью множества* E *называется следующее число:*

$$C_p(E) = \inf\left\{ \int_{R^N} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^p dx,\ \varphi(x) \in \mathfrak{M}(E) \right\}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы* $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ *была регулярной граничной точкой области* Ω_T *для уравнения* (1.1), *достаточно, чтобы*

$$\int_0 \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)} \frac{dr}{r} = \infty, \tag{2.8}$$

где $B(x_0, r)$ — *шар радиуса* r *с центром в точке* x_0.

Зафиксируем точку $(x_0, t_0) \in S_T \equiv \partial\Omega \times (0, T)$ и рассмотрим цилиндр

$$Q_R^{(\varepsilon)} \equiv B(x_0, R) \times (t_0 - R^{p-\varepsilon}, t_0),$$

$0 < t_0 - R^{p-\varepsilon} < t_0 < T$, число ε определим позже.

Определим

$$\mu^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_R^{(\varepsilon)} \cap \Omega_T} u, \quad \mu^- = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_R^{(\varepsilon)} \cap \Omega_T} u, \tag{2.9}$$

$$\mu_f^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_R^{(\varepsilon)} \cap S_T} f, \quad \mu_f^- = \operatorname*{ess\,inf}_{Q_R^{(\varepsilon)} \cap S_T} f. \tag{2.10}$$

Определим также ω

$$\operatorname*{ess\,osc}_{Q_R^{(\varepsilon)} \cap \Omega_T} u \le \omega \le 2 \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_T} |u|.$$

Для натурального числа s_*, которое определим позже, положим

$$\theta(R) = \left(\frac{2^{s_*}}{\omega\Delta(R)}\right)^{p-2}, \quad \Delta(R) = \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{R^{N-p}} \right\}^{1/(p-1)}, \tag{2.11}$$

и рассмотрим цилиндр

$$Q(R, \theta(R)) \equiv B(x_0, R) \times (t_0 - \theta(R)R^p, t_0); \tag{2.12}$$

если $\left(\frac{\omega\Delta(R)}{2^{s_*}}\right)^{p-2} \ge R^\varepsilon$, то имеет место включение $Q(R, \theta(R)) \subset Q_R^{(\varepsilon)}$. Внутри цилиндра $Q(R, \theta(R))$ рассмотрим цилиндры вида

$$Q(R, \eta(R)) \equiv B(x_0, R) \times (\bar{t} - \eta(R)R^p, \bar{t}), \tag{2.13}$$

$\bar{t} \le t_0$, $\bar{t} - \eta(R)R^p \ge t_0 - \theta(R)R^p$,

$$\eta(R) = \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)}\right)^{p-2}, \quad s_0 < s_*, \tag{2.14}$$

где s_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\frac{2\mu^+}{2^{s_0}} \le$ $\le \delta$, δ — достаточно малое число, зависящее лишь от N, p, C_0, C_1.

Используя некоторые вспомогательные решения, в следующем пункте доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнена оценка*

$$\left(\frac{\omega\Delta(R)}{2^{s_*}}\right)^{p-2} \ge R^\varepsilon. \tag{2.15}$$

Тогда если

$$\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0}} \geq \mu_f^+, \tag{2.16}$$

то

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in Q(8R,\eta(R))\colon u(x,t)\geq \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \leq$$
$$\leq (1-\alpha)\operatorname{meas} Q(8R,\eta(R)) \quad \forall\, Q(8R,\eta(R))\subset Q(8R,\theta(R)). \tag{2.17}$$

либо если

$$\mu^- - \frac{\omega}{2^{s_0}} \leq \mu_f^-, \tag{2.18}$$

то

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in Q(8R,\eta(R))\colon u(x,t)\leq \mu^- + \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \leq$$
$$\leq (1-\alpha)\operatorname{meas} Q(8R,\eta(R)) \quad \forall\, Q(8R,\eta(R))\subset Q(8R,\theta(R)) \tag{2.19}$$

с некоторым числом $0<\alpha<1$ *и натуральным числом* $s_0<s_1<s_*$, *не зависящим от* ω, R, s_*.

Использовав рассуждения, аналогичные [2, с. 168 – 175], докажем такую теорему.

Теорема 2.3. *Предположим, что выполнены неравенства* (2.15), (2.16). *Тогда для всех* $(x,t)\in B(x_0,R/2)\times\left(t_0-\beta\eta(R)(R/2)^p,t_0\right)$ *выполняется неравенство*

$$u(x,t) \leq \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_*+1}}\Delta(R), \tag{2.20}$$

где β — *некоторое число, зависящее лишь от* N, p, C_0, C_1.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены неравенства* (2.15), (2.18). *Тогда для всех* $(x,t)\in B(x_0,R/2)\times\left(t_0-\beta\eta(R)(R/2)^p,t_0\right)$ *выполнено неравенство*

$$u(x,t) \geq \mu^- + \frac{\omega}{2^{s_*+1}}\Delta(R).$$

Из теорем 2.3, 2.4 теперь можно получить условие непрерывности решения уравнения (1.1) в точке $(x_0,t_0)\in S_T$.

Отметим, что расходимость интеграла (2.8) эквивалентна расходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Delta(R_i) = \infty, \tag{2.21}$$

где $R_i = R^{(1)}/C^i$, $i=1,2,\ldots$, $R^{(1)}>0$, $C>1$, — некоторые фиксированные числа.

В силу расходимости ряда (2.21) выберем достаточно малое число R так, чтобы

$$\frac{\left(R^{(1)}\right)^{\varepsilon/(p-2)}}{\Delta\left(R^{(1)}\right)} \leq \left(R^{(1)}\right)^{\varepsilon/2}, \tag{2.22}$$

где $R^{(1)} = 8R$.

Так же из (2.21) следует, что для любого натурального $i \geq 1$ найдется натуральное число j такое, что

$$\frac{(R_{i+j})}{\Delta(R_i)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^j. \tag{2.23}$$

Положим

$$C = \beta^{-1/p} \frac{2^3}{\left(1-1/2^{s_*+1}\right)^{(p-2)/p}}, \quad R_0 = R^{(1)}. \tag{2.24}$$

Определим подпоследовательность $\{j\}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\Delta\left(R_{i_{j+1}}\right)}{\Delta\left(R_{i_j}\right)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{i_{j+1}-i_j} \tag{2.25}$$

и для любого $i_j \leq i \leq i_{j+1}-1$

$$\frac{\Delta(R_i)}{\Delta\left(R_{i_j}\right)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-i_j}. \tag{2.26}$$

Положим также

$$\omega_{i_{j+1}} = \left(1-\frac{\Delta\left(R_{i_j}\right)}{2^{s_*+1}}\right)\omega_{i_j}, \quad \omega_{i_0} = \omega. \tag{2.27}$$

В силу расходимости ряда (2.21) ряд $\sum_{i_j} \Delta\left(R_{i_j}\right)$ также расходится, в противном случае

$$\sum_i \Delta(R_i) = \sum_{i_j} \sum_{k=i_j}^{i_{j+1}-1} \Delta(R_k) \leq 2\sum_{i_j} \Delta(R_{i_j}) < \infty,$$

что противоречит (2.21).

Неравенство (2.23) обеспечивает вложение

$$Q\left(R_{i_{j+1}}, \theta(R_{i_j+1})\right) \subset Q\left(R_{i_j}, \theta(R_{i_j})\right).$$

Из теоремы 2.3 следует либо

$$\omega_{i_j} \leq \frac{2^{s_*}}{\Delta\left(R_{i_j}\right)} \leq R_{i_j}^{\varepsilon/2} 2^{s_*}, \tag{2.28}$$

либо

$$\operatorname*{ess\,osc}_{Q\left(R_{i_j}, \theta(R_{i_j})\right)} u \leq \operatorname*{ess\,osc}_{Q\left(R_{i_j}, \theta(R_{i_j})\right)} f, \tag{2.29}$$

либо

$$\operatorname*{ess\,osc}_{Q\left(R_{i_{j+1}}, \theta(R_{i_{j+1}})\right)} u \leq \left(1-\frac{\Delta\left(R_{i_j}\right)}{2^{s_*+1}}\right)\omega_{i_j}. \tag{2.30}$$

Из неравенства (2.30) вытекает, что для достаточно большого n

$$\operatorname*{ess\,osc}_{Q(R_n, \theta(R_n))} u \leq \omega \exp\left(-2^{-s_*-1} \sum_{i_j=1}^{n} \Delta\left(R_{i_j}\right)\right). \tag{2.31}$$

Таким образом, теорема 2.1 доказана.

3. Оценки вспомогательных решений. Определим $Q_1 = (B(x_0, 8R) \setminus E_R) \times \times \left(\bar{t} - \eta(R)(8R)^p, \bar{t} - \frac{1}{2}\eta(R)(8R)^p\right)$, $Q_2 = B(x_0, 8R) \times \left(\bar{t} - \frac{1}{2}\eta(R)(8R)^p, \bar{t}\right)$, $E_R = B(x_0, R) \setminus \Omega$. В области Q_1 определим функцию $v_R(x, x_0; t, \bar{t}; \omega)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, \mu^+ - u, -u_x) = 0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$v_R\left(x, x_0; \bar{t} - \eta(R)(8R)^p, \bar{t}; \omega\right), \qquad x \in B(x_0, 8R) \setminus E_R, \tag{3.2}$$

$$v_R(x, x_0; t, \bar{t}; \omega) = 0, \qquad (x, t) \in \partial B(x_0, 8R) \times \times \left(\bar{t} - \eta(R)(8R)^p, \bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p\right), \tag{3.3}$$

$$v_R(x, x_0; t, \bar{t}; \omega) = \frac{\omega}{2^{s_0}}, \qquad (x, t) \in \partial E_R \times \times \left(\bar{t} - \eta(R)(8R)^p, \bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p\right). \tag{3.4}$$

В области Q_2 определим функцию $w_R(x, x_0; t, \bar{t}; \omega)$ как решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям

$$w_R\left(x, x_0; \bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p, \bar{t}; \omega\right), \qquad x \in E_R, \tag{3.5}$$

$$w_R\left(x, x_0; \bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p, \bar{t}; \omega\right) = v_R\left(x, x_0; \bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p, \bar{t}; \omega\right), \quad x \in B(x_0, R) \setminus E_R, \tag{3.6}$$

$$w_R(x, x_0; t, \bar{t}; \omega) = 0, \qquad (x, t) \in \partial B(x_0, 8R) \times \left(\bar{t} - \frac{\eta(R)}{2}(8R)^p, \bar{t}\right). \tag{3.7}$$

Без ограничения общности считаем, что $x_0 = 0$, $\bar{t} = \eta(R)(8R)^p$, и для упрощения записи положим $B_R = B(0, R)$, $v(x, t) = v_R\left(x, 0; t, \eta(R)(8R)^p; \omega\right)$, $w(x, t) = w_R\left(x, 0; t, \eta(R)(8R)^p; \omega\right)$, а также $t_0 = \eta(R)(8R)^p$. Будем предполагать далее, что выполнены неравенства (2.15), (2.16) и $R < 1$ — достаточно малое число, которое определим ниже. В дальнейшем через γ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от N, p, C_0, C_1.

Лемма 3.1. *Имеют место оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2} \int_{B_{8R} \setminus E_R} v^2(x, t)\, dx + \int_0^{t_0/2} \int_{B_{8R} \setminus E_R} \left|\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}\right|^p dx\, d\tau \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2 \Delta(R) R^N, \tag{3.8}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<t_0} \int_{B_{8R}} w^2(x, t)\, dx + \int_{t_0/2}^{t_0} \int_{B_{8R}} \left|\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial x}\right|^p dx\, d\tau \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2 \Delta(R) R^N. \tag{3.9}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}(E_R)$ подмножество $\tilde{\mathfrak{M}}(E_R)$, образованное функциями с носителями, содержащимися в B_{2R}.

Легко проверяется (см. [8, с. 304]), что

$$\inf\left\{\int_{R^N}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^p dx,\quad \varphi(x)\in\tilde{\mathfrak{M}}(E_R)\right\}\le \gamma C_p(E_R).$$

Подставив в соответствующее интегральное тождество функцию $\psi = v - \frac{\omega}{2^{s_0}}\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in\tilde{\mathfrak{M}}(E_R)$, $\varphi(x)=1$, $x\in E_R$, получим

$$\int_{B_{8R}\setminus E_R} v^2(x,t)\,dx + \iint_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le \frac{\omega}{2^{s_0}}\int_{B_{8R}\setminus E_R} v(x,t)\varphi\,dx +$$
$$+\gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^p t_0\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^p dx +$$
$$+\gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}t_0\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|dx + \gamma\int_0^{t_0/2}\int_{B_{8R}\setminus E_R} dx\,dt = \sum_{j=1}^4 I_j. \tag{3.10}$$

Имеем

$$I_1 \le \frac{1}{2}\int_{B_{8R}\setminus E_R} v^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\int_{B_{8R}\setminus E_R}\varphi^2 dx,$$

$$I_2 \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^N,$$

$$I_3 \le I_2 + \gamma t_0 R^N = I_2 + \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\left(\frac{2^{s_0}}{\Delta(R)\omega}\right)^2 R^p\Delta(R)R^N \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^N,$$

последнее неравенство получено в силу (2.15).

Неравенство

$$I_4 = \gamma t_0 R^N \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^N$$

получено также из (2.15).

Собирая последние неравенства, из (3.10) получаем (3.8). Для доказательства (3.9) подставим в соответствующее интегральное тождество функцию

$$\psi(x,t) = w(x,t).$$

После очевидных преобразований получим

$$\sup_{t_0/2<t<t_0}\int_{B_{8R}} w^2(x,t)\,dx + \iint_{Q_2}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \int_{B_{8R}\setminus E_R} v^2\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx + \iint_{Q_2} dx\,dt.$$

Оцениваем первое слагаемое в правой части с помощью (3.8); второе слагаемое оценивается с использованием (2.15). Таким образом, лемма 3.1 доказана.

Введем обозначения

$$g(x,t) = \big(u(x,t)+v(x,t)-\mu^+\big)_+,\qquad (x,t)\in Q_1\cap\Omega_T,$$
$$\rho(x,t) = \big(u(x,t)+w(x,t)-\mu^+\big)_+,\qquad (x,t)\in Q_2\cap\Omega_T.$$

Продолжим эти функции равенствами

$$g(x,t) = 0 \quad\text{при}\quad (x,t)\notin Q_1\cap\Omega_T,$$
$$\rho(x,t) = 0 \quad\text{при}\quad (x,t)\notin Q_2\cap\Omega_T,$$

использовав при этом равенство (2.16).

Лемма 3.2. *Справедливы оценки*

$$\max_{0\le t\le t_0/2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g^2(x,t)\,dx+\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx\,dt\le \gamma R^{1/p}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^N, \tag{3.11}$$

$$\iint\limits_{Q_2}\left|\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|^p dx\,dt\le \gamma R^{1/p}\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2\Delta(R)R^N. \tag{3.12}$$

Доказательство. Неравенство (3.11) получается подстановкой функции $g(x,t)$ в интегральное тождество для $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Складывая полученные равенства, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g^2(x,t)\,dx&+\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\right|dx\,dt\le\\
&\le\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}(|u_x|+|v_x|)^{p-2}g^2(x,t)\,dx\,dt+\\
&+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left(1+|u_x|^{p-1}+|v_x|^{p-1}\right)g(x,t)\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Далее

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}(|u_x|+|v_x|)^{p-2}g(x,\tau)\,dx\,d\tau\le\\
&\le\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^{p-2}g^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}|v_x|^{p-2}g^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\le\\
&\le\frac{1}{16}\tilde C_0\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}g^p(x,\tau)\,dx\,d\tau+\\
&+\gamma\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau\right)^{(p-2)/p}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}g^p\,dx\,d\tau\right)^{2/p}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left(1+|u_x|^{p-1}+|v_x|^{p-1}\right)g(x,\tau)\,dx\,d\tau\le\\
&\le\frac{1}{16}\tilde C_0\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left[g(x,\tau)+g^p(x,\tau)\right]dx\,d\tau+\\
&+\gamma\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau\right)^{(p-1)/p}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}g^p\,dx\,d\tau\right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Оценивая правые части (3.14) и (3.15), используя лемму 3.1 и неравенство (2.15), из (3.13) получаем (3.11).

Неравенство (3.12) доказывается аналогичным образом, при этом используется также оценка (3.11).

Обозначим $v_\mu(x,t)=\min\{v(x,t),\mu\}$, $\mu<\omega/2^{s_0}$.

Лемма 3.3. *Справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2} \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial v_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le \gamma\mu\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^N, \tag{3.16}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<t_0} \int\limits_{B_{8R}} w_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_{t_0/2}^{t_0} \int\limits_{B_{8R}} \left|\frac{\partial w_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le \gamma\mu\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^N. \tag{3.17}$$

Доказательство. Подставив в соответствующее интегральное тождество функцию $v_\mu(x,t)-\mu\varphi(x)$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v_\mu^2(x,t)\,dx + \tilde{C}_0\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial v_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le$$

$$\le \mu \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v(x,t)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \gamma\mu\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1}\right)dx\,d\tau \le \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v(x,t)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \gamma\mu\left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p\right)dx\,d\tau\right)^{(p-1)/p}. \tag{3.18}$$

Оценивая каждое слагаемое в правой части (3.18) и используя неравенства (3.11) и (2.15), получаем (3.16).

Неравенство (3.17) доказывается аналогично (3.16) подстановкой в соответствующее интегральное тождество функции $w_\mu(x,t)$. При этом используется также оценка (3.16).

Лемма 3.4. *Справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2} \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^{t_0/2} \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial g_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le \gamma\mu R^{1/p}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^N, \tag{3.19}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0/2<t<t_0} \int\limits_{B_{8R}} \rho_\mu^2(x,t)\,dx + \int\limits_{t_0/2}^{t_0} \int\limits_{B_{8R}} \left|\frac{\partial \rho_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^p dx\,d\tau \le \gamma\mu R^{1/p}\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)R^N. \tag{3.20}$$

Доказательство. Подставим в интегральные тождества для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ функцию $g_\mu(x,t)$. Складывая полученные равенства, находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} g_\mu^2(x,t)\,dx + \tilde{C}_0\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} \left|\frac{\partial}{\partial x}g_\mu(x,\tau)\right|^p dx\,d\tau \le$$

$$\le \gamma\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} (|u_x|+|v_x|)^{p-2} g_\mu^2(x,\tau)\,dx\,d\tau +$$

$$+ \gamma\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} (1+|u_x|+|v_x|)^{p-1} g_\mu(x,\tau)\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \gamma\left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left[\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p\right]dx\,d\tau\right)^{(p-2)/p} \times$$

$$\times\left(\int_0^t \int_{B_{8R}\setminus E_R} g_\mu^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right)^{2/p} + \gamma\int_0^t \int_{B_{8R}\setminus E_R} g_\mu(x,\tau)\,dx\,d\tau \,+$$

$$+\left(\int_0^t \int_{B_{8R}\setminus E_R}\left[\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^p + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p\right]dx\,d\tau\right)^{(p-1)/p}\left(\int_0^t \int_{B_{8R}\setminus E_R} g_\mu^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right)^{1/p}. \quad (3.21)$$

Оценивая каждое слагаемое в правой части (3.21), используя леммы 3.1, 3.2 и неравенство (2.15), получаем (3.19).

Неравенство (3.20) доказывается аналогично, при этом используется также неравенство (3.19).

Лемма 3.5. *Справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\ge 4R,\ 0<t<t_0/2} v(x,t) + \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\ge 4R,\ t_0/2<t<t_0} w(x,t) \le \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R), \quad (3.22)$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\le 8R,\ 7t_0/12<t<t_0} w(x,t) \le \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}2^{-s_0\frac{p-2+N(p-2)/p}{p-1+N(p-2)/p}}\Delta(R), \quad (3.23)$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|\ge 4R,\ 0<t<t_0/2}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right| + \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\ge 4R,\ t_0/2<t<t_0}\left|\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right| \le \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{\Delta(R)}{R}. \quad (3.24)$$

Доказательство. Докажем неравенство (3.22). Остальные неравенства доказываются аналогично. Рассмотрим две числовые последовательности $\rho_i^{(1)} = 8R(1+2^{-i})/3$, $\rho_i^{(2)} = 8R(3-2^{-i})/3$, $i = 1, 2, \ldots$. Определим последовательность функций $\xi_i(x)\in C_0^\infty(R^N)$,

$$\xi_i(x) = 1, \quad x\in G_i = \left\{\rho_i^{(1)}\le|x|\le\rho_i^{(2)}\right\},$$

$$\xi_i(x) = 0, \quad x\notin G_{i+1}, \quad \left|\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x}\right| \le \frac{\gamma 2^i}{R}.$$

Подставляя в соответствующее интегральное тождество функцию $[v(x,t)]^l\xi_i^k(x)$, $l,k>0$, имеем

$$I_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<t_0/2}\int_{B_{8R}\setminus E_R}[v(x,t)]^{l+1}\xi_i^k(x)\,dx + \iint_{Q_1}[v(x,\tau)]^{l-1}|v_x|^p\,\xi_i^k(x)\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{\gamma 2^{ip}}{R^p}\iint_{Q_1}[v(x,\tau)]^{l-1+p}\,\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,d\tau + \gamma\iint_{Q_1}v^{l-1}(x,\tau)\xi_i^k(x)\,dx\,d\tau. \quad (3.25)$$

Аналогичным образом, подставляя в соответствующее интегральное тождество функцию $[w(x,t)]^l\xi_i^k(x)$, находим

$$I_2 = \operatorname*{esssup}_{t_0/2<t<t_0}\int_{B_{8R}}[w(x,t)]^{l+1}\xi_i^k(x)\,dx + \iint_{Q_2}w^{l-1}|w_x|^p\xi_i^k(x)\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \int_{B_{8R}\setminus E_R}\left[v\left(x,\frac{t_0}{2}\right)\right]^{l+1}\xi_i^k(x)\,dx + \frac{\gamma 2^{ip}}{R^p}\iint_{Q_2}w^{l+p-1}\,\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,d\tau \,+$$

$$+\ \gamma\iint_{Q_2}w^{l-1}(x,\tau)\xi_i^k(x)\,dx\,d\tau. \quad (3.26)$$

Объединив неравенства (3.25), (3.26), получим

$$I_1 + I_2 \le \gamma 2^{ip}\left(1+\frac{\mu_{i+1}^p}{R^p}\right)\left\{\iint_{Q_1}v^{l-1}\,\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,d\tau + \iint_{Q_2}w^{l-1}\,\xi_i^{k-p}(x)\,dx\,d\tau\right\}.$$

$$I_1 + I_2 \le \gamma\left[1 + \frac{\mu_{j+1}^p}{R^p} + \gamma\left(\frac{\omega\Delta(R)}{2^{s_0}}\right)^{p-1}\frac{1}{R^p}\mu_{j+1}\right]\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{Q_1} g^{l-1}(x,\tau)\xi_j^{k-p}(x)\,dx\,d\tau + \iint\limits_{Q_2} \rho^{l-1}(x,\tau)\xi_j^{k-p}(x)\,dx\,d\tau\right\}. \qquad (3.34)$$

Используя итерационный метод Мозера, отсюда имеем

$$\mu_j^{2p+N} \le \gamma 2^{j\gamma}\mu_{j+1}^{p-2}\left\{1 + \frac{\mu_{j+1}^p}{R^p} + \gamma\left(\frac{\omega\Delta(R)}{R^p}\right)^{p-1}\frac{\mu_{j+1}}{R^p}\right\}^{(N+p)/p}\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{G_{j+1}\times(0,t_0/2)} g^p(x,\tau)\,dx\,d\tau + \iint\limits_{G_{j+1}\times(t_0/2,t_0)} \rho^p(x,\tau)\,dx\,d\tau\right\}. \qquad (3.35)$$

Исходя из (3.35), используя лемму 3.4, аналогично доказательству леммы 3.5 доказываем лемму 3.6.

Лемма 3.7. *Существуют число* $0 < \alpha < 1$ *и натуральное число* $s_0 < s_1 < < s_*$, *не зависящее от* w, R, s_*, *такие, что выполняется либо*

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(0,\frac{t_0}{2}\right):\ v(x,t) \le \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \le (1-\alpha)\operatorname{meas}K_R\frac{t_0}{2}, \qquad (3.36)$$

либо

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(\frac{t_0}{2},t_0\right):\ w(x,t) \le \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \le (1-\alpha)\operatorname{meas}K_R\frac{t_0}{2}. \qquad (3.37)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^N)$, $\varphi(x)=1$ при $|x|\le 5R$, $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge 6R$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\le\frac{\gamma}{R}$. Подставив в соответствующие интегральные тождества функции $v-\frac{\omega}{2^{s_0}}\varphi(x)$, $w-\frac{\omega}{2^{s_0}}\varphi(x)$, получим

$$\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2\left(0,\frac{t_0}{2}\right)dx + \tilde{C}_0\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le 2\frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\varphi(x)v\left(0,\frac{t_0}{2}\right)dx +$$

$$+ \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1}|\varphi_x|\,dx\,dt + \gamma\iint\limits_{Q_1}dx\,dt + \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_1}|\varphi_x|\,dx\,dt,$$

$$\int\limits_{B_{8R}} w^2\left(x,\frac{5}{6}t_0\right)dx - \int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v^2\left(x,\frac{t_0}{2}\right)dx + \tilde{C}_0\int\limits_{t_0/2}^{5t_0/6}\int\limits_{B_{8R}}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le 2\frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\varphi(x)\left[w\left(x,\frac{5}{6}t_0\right) - v\left(x,\frac{t_0}{2}\right)\right]dx + 2\frac{\omega}{2^{s_0}}\int\limits_{E_R}\varphi(x)w\left(x,\frac{5}{6}t_0\right)dx +$$

$$+ \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_2}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{p-1}|\varphi_x|\,dx\,dt + \gamma\iint\limits_{Q_2}dx\,dt + \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\iint\limits_{Q_2}|\varphi_x|\,dx\,dt.$$

Складывая два последних неравенства, имеем

$$\iint\limits_{Q_1} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx\,dt \le \frac{\omega}{2^{s_0}}\gamma \int\limits_{B_{8R}} w\left(x, \frac{5}{6}t_0\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\left\{\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1} dx\,dt + \int\limits_{t_0/2}^{5t_0/6}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{p-1} dx\,dt\right\} +$$

$$+ \gamma\left(1 + \frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\right)t_0 R^N. \tag{3.38}$$

В силу неравенства (3.23) имеем

$$\frac{\omega}{2^{s_0}}\gamma \int\limits_{B_{8R}} w\left(x, \frac{5}{6}t_0\right)\varphi(x)\,dx \le \gamma\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^2 2^{-s_0(p-2+N(p-2)/p)/(p-1+N(p-2)/p)}\Delta(R)R^N. \tag{3.39}$$

Далее

$$\gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-1} dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\left(\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}|v_x|^p (v+R)^{-\delta p/(p-1)}\,dx\,dt\right)^{(p-1)/p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}(v+R)^{\delta p}\,dx\,dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\left(\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{4R\le|x|\le 7R}(v+R)^{\delta p}\,dx\,dt\right)^{1/p} \times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{4R\le|x|\le 7R}\Big\{(v+R)^{p-\delta p/(p-1)}|\xi_x|^p +\right.$$

$$\left. + (v+R)^{1-\delta p/(p-1)}|\xi_x| + v^p R^{-\delta p/(p-1)}\Big\}\,dx\,dt\right)^{(p-1)/p}. \tag{3.40}$$

Последнее неравенство в (3.40) получено подстановкой в соответствующее интегральное тождество функции

$$[v(x,t)+R]^{1-\delta p/(p-1)}\xi^p(x), \quad 0 < \delta < \frac{p-1}{p},$$

$$\xi(x)\in C_0^\infty(R^N), \quad \xi(x) = 1 \quad \text{при} \quad 5R \le |x| \le 6R,$$

$$\xi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \le 4R, \quad |x| \ge 7R,$$

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| \le \frac{\gamma}{R}, \quad 0 \le \xi(x) \le 1.$$

Далее, воспользовавшись неравенством (3.22) и неравенством Юнга, из неравенства (3.40) получим

$$\gamma\frac{\omega}{2^{s_0}}\frac{1}{R}\int\limits_0^{t_0/2}\int\limits_{5R\le|x|\le 6R}|v_x|^{p-1}\,dx\,dt \le$$

$$\leq \gamma \frac{\omega}{2^{s_0}} \frac{1}{R} \left\{ \iint\limits_{v < \omega\Delta(R)/2^{s_1}} v^{\delta p}\, dx\, dt + \iint\limits_{v > \omega\Delta(R)/2^{s_1}} v^{\delta p}\, dx\, dt + \gamma t_0 R^N R^{\delta p} \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \iint\limits_{v < \omega\Delta(R)/2^{s_1}} v^{p - \delta p/(p-1)}\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{v > \omega\Delta(R)/2^{s_1}} v^{p - \delta p/(p-1)}\, dx\, dt + \gamma t_0 R^{N - \delta p/(p-1) + p} \right\}^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq \gamma \frac{\omega}{2^{s_0}} \frac{1}{R^p} \left[\frac{\omega}{2^{s_0}} \Delta(R) \right]^{p-1} \left\{ R^N t_0 2^{(s_0 - s_1)\delta p} + \gamma t_0 R^{N + \delta p} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)} \right)^{\delta p} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{meas}\left\{ K_R \times \left(0, \frac{t_0}{2}\right) : v > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \frac{R^N t_0 2^{s_0(p - \delta p')}}{2^{s_1(p - \delta p/(p-1))}} + t_0 R^{N + p - \delta p/(p-1)} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega} \right)^{p - \delta p'} \frac{1}{\Delta(R)^{p - \delta p'}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{meas}\left\{ K_R \times \left(0, \frac{t_0}{2}\right) : v > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} \right\}^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p \frac{1}{R^p} (\Delta(R))^{p-1} \operatorname{meas}\left\{ K_R \times \left(0, \frac{t_0}{2}\right) : v > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} +$$

$$+ \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p (\Delta(R))^{p-1} R^{N-p} t_0 \left\{ \frac{1}{2^{(s_1 - s_0)\delta p}} + R^{\delta p} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)} \right)^{\delta p} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{(s_1 - s_0)(p - \delta p/(p-1))}} + R^{p - \delta p/(p-1)} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)} \right)^{p - \delta p/(p-1)} \right\}. \tag{3.41}$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$\gamma \frac{\omega}{2^{s_0}} \frac{1}{R} \int\limits_{t_0/2}^{5t_0/6} \int\limits_{5R \leq |x| \leq 6R} |w_x|^{p-1}\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p \frac{1}{R^p} (\Delta(R))^{p-1} \operatorname{meas}\left\{ K_R \times \left(\frac{t_0}{2}, \frac{5}{6} t_0 \right) : w > \frac{\omega}{2^{s_1}} \Delta(R) \right\} +$$

$$+ \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p (\Delta(R))^{p-1} R^{N-p} t_0 \left\{ \frac{1}{2^{(s_1 - s_0)\delta p}} + R^{\delta p} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)} \right)^{\delta p} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{(s_1 - s_0)(p - \delta p/(p-1))}} + R^{p - \delta p/(p-1)} \left(\frac{2^{s_0}}{\omega\Delta(R)} \right)^{p - \delta p/(p-1)} \right\}. \tag{3.42}$$

Левая часть неравенства (3.38) оценивается снизу

$$\iint\limits_{Q_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^p dx\, dt \geq \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p t_0 C_p(E_R) = \gamma \left(\frac{\omega}{2^{s_0}} \right)^p (\Delta(R))^{p-1} R^{N-p} t_0. \tag{3.43}$$

Из неравенств (3.38) – (3.43), используя (2.15) и выбирая достаточно большим натуральное число s_1, получаем

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(0,\frac{t_0}{2}\right):\, v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} +$$
$$+\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(\frac{t_0}{2},t_0\right):\, w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \geq \gamma_1^{-1}(8R)^N\frac{t_0}{2}, \quad (3.44)$$

где $\gamma_1=\gamma_1(\gamma,s_0)$.

Возможны два случая: либо

(i) $\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(0,\frac{t_0}{2}\right):\, v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \leq \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}(8R)^N\frac{t_0}{2}$,

либо

(ii) $\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(\frac{t_0}{2},t_0\right):\, v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} > \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}(8R)^N\frac{t_0}{2}$.

В случае (i) из неравенства (3.44) получаем

$$\operatorname{meas}\left\{(x,t)\in K_R\times\left(\frac{t_0}{2},\frac{5}{6}t_0\right):\, w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_1}}\Delta(R)\right\} \geq \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}(8R)^N\frac{t_0}{2},$$

и тем самым неравенство (3.37) выполнено при $\alpha=\frac{\gamma_1^{-1}}{2}$. В случае (ii) получаем неравенство (3.36). Таким образом, лемма 3.7 доказана.

Используя леммы 3.6, 3.7 для каждого цилиндра $Q\,(8R,\eta\,(R))\subset Q\,(8R,\theta(R))$ и выбирая R настолько малым, чтобы

$$\gamma R^{1/\left(p^2+N(p-1)\right)}2^{s_1-s_0} \leq \frac{1}{2},$$

получаем теорему 2.2.

1. *E. Di Benedetto.* On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ann. sci. norm. supér. Pisa Cl. Sci. Ser. IV, XIII. – 1986. – P. 487 – 535.
2. *E. Di Benedetto.* Degenerate parabolic equations. – New York: Springer-Verlag, 1993.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Тихонов А. Н.* Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. Моск. ун-та, секция А. – 1938. – **1**, вып. 9. – С. 1 – 49.
5. *Eklund N.* Boundary behavior of solutions of parabolic equations with dis continuous coefficients // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 788 – 792.
6. *Ziemer W. P.* Behavior of the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations // J. Different. Equat. – 1980. – **35**, № 3. – P. 291 – 305.
7. *Скрыпник И. В.* Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 7. – С. 3 – 22.
8. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990.

Получено 17.07.2000