УДК 517.97

А. А. Ковалевский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

We prove two theorems which give the possibility of reducing a problem of the convergence of general characteristics of the Dirichlet variational problems in varying domains to a problem of the convergence of simpler characteristics of these problems. We describe the case where the convergence of simpler characteristics takes place.

Доведено дві теореми, що дозволяють зводити питання про збіжність загальних характеристик варіаційних задач Діріхле в змінних областях до питання збіжності більш простих характеристик цих задач. Описано ситуацію, в якій збіжність більш простих характеристик має місце.

Специальные локальные числовые характеристики вариационных задач Дирихле в областях $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \ldots$, введены и изучались в работах [1 – 4]. В терминах определенной сходимости таких характеристик в [1, 2] установлены условия сходимости последовательности решений вариационных задач Дирихле соответственно для квадратичных интегральных функционалов, заданных на пространствах $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega_s)$, и интегральных функционалов, заданных на пространствах $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s)$. В работах [3, 4] для общего случая интегральных функционалов $I_s \colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ показана тесная связь сходимости соответствующих числовых характеристик с Γ-сходимостью последовательности $\{I_s\}$, из которой, в свою очередь, следует сходимость последовательности решений вариационных задач Дирихле для функционалов I_s (см., например, [4], предложение 1).

В настоящей работе доказывается ряд результатов, сформулированных в [3, 4], где соответствующие доказательства были опущены в связи с ограничением объема публикаций. Речь идет о двух результатах, позволяющих сводить вопрос о сходимости общих характеристик, введенных в [3, 4], к вопросу о сходимости более простых характеристик (см. [4], теоремы 6 и 7), и о результате, описывающем ситуацию, в которой сходимость более простых характеристик имеет место (см. [4], теорема 8).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω; $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$; $k \in \mathbb{N}$.

Введем следующие обозначения:

$$P'_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\alpha| \leq k-1\}, \qquad P''_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\alpha| = k\};$$

$\mathbb{R}'_{n,k}$ ($\mathbb{R}''_{n,k}$) — пространство всех отображений $P'_{n,k}$ ($P''_{n,k}$) в $\mathbb{R}$; если $\xi \in \mathbb{R}'_{n,k}$, $\eta \in \mathbb{R}''_{n,k}$, то

$$|\xi| = \left(\sum_{\alpha \in P'_{n,k}} \xi^2_\alpha\right)^{1/2}, \quad |\eta| = \left(\sum_{\alpha \in P''_{n,k}} \eta^2_\alpha\right)^{1/2};$$

если G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{k,m}(G)$, то $\delta_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}'_{n,k}$ такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P'_{n,k}$ $(\delta_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$; $\nabla_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}''_{n,k}$ такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P''_{n,k}$ $(\nabla_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$. Если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\Omega^l = \left\{x\in\Omega:\ d(x,\partial\Omega) \ge \frac{1}{l}\right\}, \quad H^l = \{\eta\in\mathbb{R}''_{n,k}:\ |\eta|\le l\};$$

$$l_0 = \min\{l\in\mathbb{N}:\ \Omega^l \ne \varnothing\}.$$

Если $y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{N}$, то

$$Q_t(y) = \left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x_i-y_i| < \frac{1}{2t},\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

Если $s\in\mathbb{N}$, то p_s — отображение $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ в $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ такое, что для любого $u\in\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ $(p_s u)(x) = u(x)$, если $x\in\Omega_s$, и $(p_s u)(x) = 0$, если $x\in\Omega\setminus\Omega_s$.

Пусть $c\ge 1$ и $\{f_s\}$ — последовательность каратеодориевских функций на $\Omega\times\mathbb{R}''_{n,k}$, причем для любых $s\in\mathbb{N}$, $x\in\Omega$, $\eta,\eta'\in\mathbb{R}''_{n,k}$, $\tau\in[0,1]$ справедливы соотношения: $f_s(x,0)=0$,

$$c^{-1}|\eta|^m \le f_s(x,\eta) \le c(1+|\eta|)^m, \tag{1}$$

$$f_s(x,(1-\tau)\eta+\tau\eta') \le (1-\tau)f_s(x,\eta)+\tau f_s(x,\eta'). \tag{2}$$

Для произвольных $t,r,s\in\mathbb{N}$, $(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$ положим

$$V_{t,r,s}(y,\xi) = \left\{u\in\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s):\ \|\nabla_k u\|_{L^m(\Omega_s)} \le t^{k+1},\ \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |\delta_k(u-\xi)|^m\,dx \le \frac{1}{r}\right\}.$$

Определение 1. *Пусть* $t,r,s\in\mathbb{N}$, $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$. *Если* $V_{t,r,s}(y,\xi)=\varnothing$, *то положим* $F_{t,r,s}(y,\xi,\eta)=t$; *если же* $V_{t,r,s}(y,\xi)\ne\varnothing$, *то положим*

$$F_{t,r,s}(y,\xi,\eta) = t^n \inf_{u\in V_{t,r,s}(y,\xi)} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x,\eta+\nabla_k u)\,dx.$$

Для произвольных $t,r\in\mathbb{N}$ и $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$ положим

$$F'_{t,r}(y,\xi,\eta) = \varliminf_{s\to\infty} F_{t,r,s}(y,\xi,\eta), \quad F''_{t,r}(y,\xi,\eta) = \varlimsup_{s\to\infty} F_{t,r,s}(y,\xi,\eta).$$

Наконец, пусть для $t\in\mathbb{N}$ F'_t, F''_t — функции на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$ такие, что для любой тройки $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$

$$F'_t(y,\xi,\eta) = \sup_r F'_{t,r}(y,\xi,\eta), \quad F''_t(y,\xi,\eta) = \sup_r F''_{t,r}(y,\xi,\eta).$$

Величины $F_{t,r,s}(y,\xi,\eta)$ и в целом функции F'_t, F''_t являются определенными характеристиками вариационных задач Дирихле в областях Ω_s для функционалов с интегрантами $f_s(x,\nabla_k u)$. Равномерная сходимость последовательностей $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ на множествах $\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$ является необходимым, а в случае, когда $\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_s)\to 0$ при $s\to\infty$, и достаточным условием Γ-сходимости таких функционалов (см. [4], теоремы 3 и 4).

Пусть для $t\in\mathbb{N}$ g'_t, g''_t — функции на $\Omega\times\mathbb{R}$ такие, что для любой пары $(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$

$$g_t'(y,\xi) = F_t'(y,\xi,0), \qquad g_t''(y,\xi) = F_t''(y,\xi,0).$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_s) \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty, \tag{3}$$

$m=2$ и для любых $s\in\mathbb{N}$, $x\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}_{n,k}''$ справедливо равенство

$$f_s(x,\eta) = \sum_{\alpha,\beta\in P_{n,k}''} a_{\alpha\beta}(x)\,\eta_\alpha\,\eta_\beta, \tag{4}$$

где $a_{\alpha\beta}\in C(\overline{\Omega})$, $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ $(\forall\,\alpha,\beta\in P_{n,k}'')$. Пусть $b_1\ge 1$, g — функция на $\Omega\times\mathbb{R}$ такая, что для любой пары $(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$

$$0 \le g(y,\xi) \le b_1(1+|\xi|)^m; \tag{5}$$

f — функция на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{n,k}''$ такая, что для любой тройки $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{n,k}''$

$$f(y,\xi,\eta) = f_1(y,\eta) + g(y,\xi).$$

Пусть далее для любого $l\ge l_0$ последовательности $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ сходятся к функции g равномерно на $\Omega^l\times[-l,l]$.

Тогда для любого $l\ge l_0$ последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из (4) и равенства $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ $(\forall\,\alpha,\beta\in P_{n,k}'')$ вытекает, что для любых $x\in\Omega$, $\eta,\eta'\in\mathbb{R}_{n,k}''$

$$f_1(x,\eta+\eta') = f_1(x,\eta) + f_1(x,\eta') + 2\sum_{\alpha,\beta\in P_{n,k}''} a_{\alpha\beta}(x)\,\eta_\alpha\,\eta_\beta'. \tag{6}$$

Зафиксируем $l\ge l_0$ и произвольное $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функций $a_{\alpha\beta}$ найдется $\sigma>0$ такое, что для любых $x',x''\in\Omega^{2l}$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|\le\sigma$, и любого $\eta\in H^l$ справедливо неравенство

$$|f_1(x',\eta) - f_1(x'',\eta)| \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7}$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости последовательностей $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ к функции g на $\Omega^l\times[-l,l]$ существует $t'\in\mathbb{N}$ такое, что для любых $t\ge t'$ и $(y,\xi)\in\Omega^l\times[-l,l]$

$$|g_t'(y,\xi) - g(y,\xi)| \le \frac{\varepsilon}{4}, \tag{8}$$

$$|g_t''(y,\xi) - g(y,\xi)| \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

Выберем теперь $t_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такое, что $t_\varepsilon\ge\max\{nl,\, b_1(1+l)^m+\varepsilon,\, t',\, n\sigma^{-1}\}$, и зафиксируем $t\ge t_\varepsilon$ и $(y,\xi,\eta)\in\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$. Заметим, что в силу неравенства $t\ge nl$ справедливо включение $Q_t(y)\subset\Omega^{2l}$.

Пусть G — функционал на $W^{k,m}(\Omega)$ такой, что для любой функции $u\in W^{k,m}(\Omega)$

$$G(u) = 2 \sum_{\alpha, \beta \in P''_{n,k}} \eta_\beta \int_{Q_t(y)} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, dx .$$

Используя неравенства $t \geq t'$, (9), (5) и $t \geq b_1(1+l)^m + \varepsilon$, устанавливаем, что имеет место следующее предложение:

(*) *если* $r \in \mathbb{N}$, *то существует* $s^{(r)}$ *такое, что для любого* $s \geq s^{(r)}$ $V_{t,r,s}(y, \xi) \neq \varnothing$.

С помощью этого предложения получаем

$$\lim_{r \to \infty} F''_{t,r}(y, \xi, \eta) = F''_t(y, \xi, \eta), \qquad \lim_{r \to \infty} F'_{t,r}(y, \xi, 0) = g'_t(y, \xi). \tag{10}$$

Зафиксируем теперь $r \in \mathbb{N}$. Используя предложение (*), устанавливаем, что существуют возрастающие последовательности $\{s_i\}$, $\{s'_i\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого i $V_{t,r,s_i}(y, \xi) \neq \varnothing$, $V_{t,r,s'_i}(y, \xi) \neq \varnothing$,

$$F''_{t,r}(y, \xi, \eta) \leq F_{t,r,s_i}(y, \xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{4}, \qquad F'_t(y, \xi, \eta) \geq F_{t,r,s'_i}(y, \xi, \eta) - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

Пусть для любого i $u_{s_i} \in V_{t,r,s_i}(y, \xi)$, $v_{s'_i} \in V_{t,r,s'_i}(y, \xi)$, причем

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_{s_i}} f_1(x, \nabla_k u_{s_i}) \, dx \leq t^{-n} F_{t,r,s_i}(y, \xi, 0) + \frac{\varepsilon}{4} t^{-n}, \tag{12}$$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_{s'_i}} f_1(x, \eta + \nabla_k v_{s'_i}) \, dx \leq t^{-n} F_{t,r,s'_i}(y, \xi, \eta) + \frac{\varepsilon}{4} t^{-n}. \tag{13}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательности $\{p_{s_i} u_{s_i}\}$, $\{p_{s'_i} v_{s'_i}\}$ слабо сходятся в $W^{k,m}(\Omega)$ к некоторым функциям u^r, v^r. Для этих предельных функций, учитывая (3), получаем неравенства

$$\| \nabla_k u^r \|_{L^m(\Omega)} \leq t^{k+1}, \qquad \| \nabla_k v^r \|_{L^m(\Omega)} \leq t^{k+1}, \tag{14}$$

$$\int_{Q_t(y)} |u^r - \xi|^m \, dx \leq \frac{1}{r}, \qquad \int_{Q_t(y)} |v^r - \xi|^m \, dx \leq \frac{1}{r}. \tag{15}$$

Пусть $i \in \mathbb{N}$. Используя (6) и (7), для $x \in Q_t(y) \cap \Omega_{s_i}$ имеем

$$f_1(x, \eta + \nabla_k u_{s_i}(x)) \leq f_1(y, \eta) + f_1(x, \nabla_k u_{s_i}(x)) + \frac{\varepsilon}{4} + \\ + 2 \sum_{\alpha, \beta \in P''_{n,k}} a_{\alpha\beta}(x) \eta_\beta D^\alpha u_{s_i}(x), \tag{16}$$

аналогично для $x \in Q_t(y) \cap \Omega_{s'_i}$

$$f_1(x, \eta + \nabla_k v_{s'_i}(x)) \geq f_1(y, \eta) + f_1(x, \nabla_k v_{s'_i}(x)) - \frac{\varepsilon}{4} + \\ + 2 \sum_{\alpha, \beta \in P''_{n,k}} a_{\alpha\beta}(x) \eta_\beta D^\alpha v_{s'_i}(x). \tag{17}$$

Интегрируя неравенства (16) и (17) соответственно по $Q_t(y) \cap \Omega_{s_i}$ и $Q_t(y) \cap \Omega_{s'_i}$, затем используя неравенства (11)–(13), получаем

$$F''_{t,r}(y,\xi,\eta) \le f_1(y,\eta) + F_{t,r,s_i}(y,\xi,0) + \frac{3}{4}\varepsilon + t^n G(p_{s_i} u_{s_i}), \tag{18}$$

$$F'_t(y,\xi,\eta) \ge \left[f_1(y,\eta) - \frac{\varepsilon}{4}\right] t^n \operatorname{mes}(Q_t(y) \cap \Omega_{s'_i}) - \frac{\varepsilon}{2} + $$
$$+ F_{t,r,s'_i}(y,\xi,0) + t^n G(p_{s'_i} v_{s'_i}). \tag{19}$$

Используя (18), слабую сходимость $\{p_{s_i} u_{s_i}\}$ к u^r и (9), устанавливаем, что

$$F''_{t,r}(y,\xi,\eta) \le f(y,\xi,\eta) + \varepsilon + t^n G(u^r), \tag{20}$$

а используя (19), слабую сходимость $\{p_{s'_i} v_{s'_i}\}$ к v^r и (3), находим

$$F'_t(y,\xi,\eta) \ge f_1(y,\eta) + F'_{t,r}(y,\xi,0) - \frac{3}{4}\varepsilon + t^n G(v^r). \tag{21}$$

Итак, для любого $r \in \mathbb{N}$ имеются функции u^r, v^r, удовлетворяющие неравенствам (14), (15), (20), (21). Из (14) вытекает, что существуют возрастающая последовательность $\{r_i\} \subset \mathbb{N}$ и функции $u, v \in W^{k,m}(\Omega)$ такие, что $u^{r_i} \to u$, $v^{r_i} \to v$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Отсюда и из (15) следует, что $u = \xi$ и $v = \xi$ почти всюду на $Q_t(y)$. Тогда $G(u^{r_i}) \to 0$ и $G(v^{r_i}) \to 0$. Учитывая это, а также равенства (10), из (20), (21) выводим

$$F''_t(y,\xi,\eta) \le f(y,\xi,\eta) + \varepsilon, \tag{22}$$

$$F'_t(y,\xi,\eta) \ge f_1(y,\eta) + g'_t(y,\xi) - \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Из последнего неравенства и неравенства (8) получаем

$$F'_t(y,\xi,\eta) \ge f(y,\xi,\eta) - \varepsilon. \tag{23}$$

Неравенства (22), (23) и очевидное неравенство $F'_t(y,\xi,\eta) \le F''_t(y,\xi,\eta)$ позволяют заключить, что последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (3), $k = 1$, *для любого* $s \in \mathbb{N}$ $f_s = f_1$ *и выполняется условие: для любых* $x', x'' \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$|f_1(x',\eta) - f_1(x'',\eta)| \le \mu(|x' - x''|)(1 + |\eta|)^m, \tag{24}$$

где μ *— неубывающая непрерывная в нуле функция на* $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$.

Пусть $b_1 \ge 1$, g *— функция на* $\Omega \times \mathbb{R}$ *такая, что для любой пары* $(y,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* (5), f *— функция на* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *такая, что для любой тройки* $(y,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$f(y,\xi,\eta) = f_1(y,\eta) + g(y,\xi).$$

Пусть для любого $l \ge l_0$ *последовательности* $\{g'_t\}$, $\{g''_t\}$ *сходятся к функции* g *равномерно на* $\Omega^l \times [-l, l]$. *Тогда для любого* $l \ge l_0$ *последовательности* $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ *сходятся к функции* f *равномерно на* $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$.

Доказательство. Зафиксируем $l \ge l_0$ и произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon[16^m n c^4 b_1]^{-1}$ и $l_1 = 3l + 1$. Поскольку по условию теоремы последовательности $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ сходятся к функции g равномерно на $\Omega^{l_1}\times\times[-l_1, l_1]$, то существует $t'\in\mathbb{N}$ такое, что для любых $t\geq t'$ и $(y,\xi)\in\Omega^{l_1}\times\times[-l_1, l_1]$

$$|g_t'(y,\xi)-g(y,\xi)|\leq\varepsilon_1, \tag{25}$$

$$|g_t''(y,\xi)-g(y,\xi)|\leq\varepsilon_1. \tag{26}$$

Кроме того, в силу свойств функции μ найдется $t''\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, t\geq t'' \qquad \mu\left(\frac{n}{t}\right)\leq\varepsilon_1 l_1^{-m}. \tag{27}$$

Выберем теперь $t_\varepsilon\geq\max\{t', t'', nl, b_1(l_1+2)^m\}$ и зафиксируем $t\geq t_\varepsilon$ и $(y,\xi,\eta)\in\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$. Заметим, что неравенство $t\geq nl$ обеспечивает включение $Q_t(y)\subset\Omega$.

Используя неравенства $t\geq t'$, (26), (5) и $t\geq b_1 l_1^m$, устанавливаем, что имеет место предложение $(*)$ из доказательства теоремы 1. С помощью этого предложения получаем равенства (10). Положим $m_1=\min\left\{\dfrac{1}{m}, m-1\right\}$, $a=|\xi|+ + 1-|\operatorname{sign}\xi|$ и выберем $r'\in\mathbb{N}$ такое, что $r'\geq[\varepsilon_1^{-1}l_1^{m+1}t^n]^{2m/m_1}a^{-2m}$. В силу второго из равенств (10) найдется $r''\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $r\geq r''$

$$g_t'(y,\xi)\leq F_{t,r}'(y,\xi,0)+\varepsilon_1. \tag{28}$$

Зафиксируем натуральное число $r\geq r_0=\max(r', r'')$. В силу (25), (26) и (28) имеем

$$g(y,\xi)\leq F_{t,r}'(y,\xi,0)+2\varepsilon_1, \qquad F_{t,r}''(y,\xi,0)\leq g(y,\xi)+\varepsilon_1.$$

Из этих неравенств вытекает, что при $s\geq s'$

$$F_{t,r,s}(y,\xi,0)\geq g(y,\xi)-3\varepsilon_1, \tag{29}$$

$$F_{t,r,s}(y,\xi,0)\leq g(y,\xi)+2\varepsilon_1. \tag{30}$$

Положим

$$\xi_1=\xi(1-r^{-1/2m}), \qquad \sigma=ar^{-1/2m}(1+|\xi|+|\xi_1|)^{-1},$$

$$\xi_2=\xi_1+\sigma^{-1}(\xi-\xi_1).$$

Поскольку $(y,\xi_2)\in\Omega^{l_1}\times[-l_1,l_1]$, то в силу (26) при $s\geq s''$

$$F_{t,r,s}(y,\xi_2,0)\leq g(y,\xi_2)+2\varepsilon_1. \tag{31}$$

Зафиксируем $s\geq s_0=\max(s', s'')$. Из (30), (31), (5) и неравенства $t\geq \geq b_1(l_1+2)^m$ вытекает, что $V_{t,r,s}(y,\xi)\neq\varnothing$, $V_{t,r,s}(y,\xi_2)\neq\varnothing$. Тогда и $V_{t,r,s}(y,\xi_1)\neq\varnothing$. Действительно, взяв $u\in V_{t,r,s}(y,\xi)$, имеем: если $\xi>0$, то $\min\{u,\xi_1\}\in V_{t,r,s}(y,\xi_1)$, если $\xi<0$, то $\max\{u,\xi_1\}\in V_{t,r,s}(y,\xi_1)$. Если же $\xi=0$, то $0\in V_{t,r,s}(y,\xi_1)$. Покажем, что

$$F_{t,r,s}(y,\xi,0)\leq F_{t,r,s}(y,\xi_1,0)+b_1(l_1+2)^m r^{-1/2m}. \tag{32}$$

Пусть $\tau>0$ и для $j=1,2$ $u_j\in V_{t,r,s}(y,\xi_j)$, причем

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \nabla u_j)\,dx \le t^{-n} F_{t,r,s}(y, \xi_j, 0) + \tau t^{-n}. \tag{33}$$

Положим $w = (1-\sigma)u_1 + \sigma u_2$. Так как $\xi = (1-\sigma)\xi_1 + \sigma\xi_2$, то $w \in V_{t,r,s}(y, \xi)$. Используя (2), (33), (31) и (5), получаем

$$F_{t,r,s}(y, \xi, 0) \le t^n \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \nabla w)\,dx \le$$

$$\le F_{t,r,s}(y, \xi_1, 0) + b_1(l_1+2)^m r^{-1/2m} + \tau.$$

Отсюда, учитывая произвольность τ, выводим (32).

Далее, пусть $u \in V_{t,r,s}(y, \xi)$ такая, что

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \nabla u)\,dx \le t^{-n} F_{t,r,s}(y, \xi, 0) + r^{-1/2m} t^{-n}. \tag{34}$$

Используя это неравенство, а также неравенства (1), (30) и (5), устанавливаем, что

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |\nabla u|^m\,dx \le c b_1 l_1^m t^{-n}. \tag{35}$$

Введем множества

$$E_s' = \{x \in Q_t(y) \cap \Omega_s : \ (u(x) - \xi_1)\operatorname{sign}\xi < 0\},$$

$$E_s'' = [Q_t(y) \cap \Omega_s] \setminus E_s'.$$

В силу включения $u \in V_{t,r,s}(y, \xi)$ имеем

$$\operatorname{mes} E_s' \le a^{-m} r^{-1/2}. \tag{36}$$

Кроме того,

$$F_{t,r,s}(y, \xi_1, 0) \le t^n \int\limits_{E_s'} f_1(x, \nabla u)\,dx. \tag{37}$$

Действительно, если $\xi > 0$, то полагая $v = \min\{u, \xi_1\}$, имеем $v \in F_{t,r,s}(y, \xi_1)$ и, следовательно,

$$F_{t,r,s}(y, \xi_1, 0) \le t^n \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \nabla v)\,dx = t^n \int\limits_{E_s'} f_1(x, \nabla u)\,dx\,;$$

то же самое получаем, если $\xi < 0$ и $v = \max\{u, \xi_1\}$. Наконец, если $\xi = 0$, то и $\xi_1 = 0$. Тогда число $F_{t,r,s}(y, \xi_1, 0)$ равно 0 и, значит, не превышает правую часть (37). Таким образом, каково бы ни было ξ, неравенство (37) имеет место. Из (34), (32), (37) и (1) выводим

$$\int\limits_{E_s''} |\nabla u|^m\,dx \le c b_1 (2 l_1)^m r^{-1/2m} t^{-n}. \tag{38}$$

В силу включения $u \in V_{t,r,s}(y, \xi)$ имеем

$$t^{-n} F_{t,r,s}(y, \xi, \eta) \le \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \eta + \nabla u)\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{Q_t(y)} f_1(x, \eta)\,dx + \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_1(x, \nabla u)\,dx + A_s' + A_s'', \tag{39}$$

где

$$A'_s = \int\limits_{E'_s} |f_1(x, \eta + \nabla u) - f_1(x, \nabla u)|\, dx,$$

$$A''_s = \int\limits_{E''_s} |f_1(x, \eta + \nabla u) - f_1(x, \eta)|\, dx.$$

Используя неравенства (1), (2), (35), (36), (38) и учитывая выбор r, получаем

$$A'_s \le \frac{\varepsilon}{4} t^{-n}, \qquad A''_s \le \frac{\varepsilon}{4} t^{-n}. \tag{40}$$

Кроме того, в силу (24) и (27) имеем

$$\int\limits_{Q_t(y)} f_1(x, \eta)\, dx \le [f_1(y, \eta) + \varepsilon_1]\, t^{-n}. \tag{41}$$

Теперь из (39), используя (34), (30), (40) и (41), выводим $F_{t,r,s}(y, \xi, \eta) \le f(y, \xi, \eta) + \varepsilon$. Отсюда, учитывая произвольность $s \ge s_0$, получаем

$$F''_{t,r}(y, \xi, \eta) \le f(y, \xi, \eta) + \varepsilon. \tag{42}$$

Далее, используя определение функции F'_t, устанавливаем: существует возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любого i $s_i \ge s_0$ и

$$F_{t,r,s_i}(y, \xi, \eta) \le F'_t(y, \xi, \eta) + \varepsilon_1. \tag{43}$$

В силу изложенного выше для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $V_{t,r,s_i}(y, \xi) \ne \varnothing$. Пусть для любого $i \in \mathbb{N}$ $u_{s_i} \in V_{t,r,s_i}(y, \xi)$, причем

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_{s_i}} f_1(x, \eta + \nabla u_{s_i})\, dx \le t^{-n} F_{t,r,s_i}(y, \xi, \eta) + \varepsilon_1 t^{-n}. \tag{44}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{p_{s_i} u_{s_i}\}$ слабо сходится в $W^{1,m}(\Omega)$ к некоторой функции u^r. Для этой предельной функции, учитывая (3), получаем

$$\| \nabla u^r \|_{L^m(\Omega)} \le t^2, \qquad \int\limits_{Q_t(y)} |u^r - \xi|^m\, dx \le r^{-1}. \tag{45}$$

Пусть G — функционал на $W^{1,m}(\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$

$$G(u) = \sum_{j=1}^{n} \left| \int\limits_{Q_t(y)} \partial_j u\, dx \right|.$$

Докажем неравенство

$$f(y, \xi, \eta) \le F'_t(y, \xi, \eta) + 2^m c\, l_1^m t^n G(u^r) + \varepsilon. \tag{46}$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_{s_i}} |\eta + \nabla u_{s_i}|^m\, dx \le c^3 b_1 (2 l_1)^m t^{-n}. \tag{47}$$

Действительно, пусть u — функция из $V_{t,r,s_i}(y,\xi)$, для которой справедливо неравенство (35) (при $s = s_i$). Используя это неравенство, а также (44) и (1), получаем

$$c^{-1}\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_{s_i}}|\eta+\nabla u_{s_i}|^m\,dx \le \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_{s_i}} f_1(x,\eta+\nabla u)\,dx + \varepsilon_1 t^{-n} \le b_1 c^2(2l_1)^m t^{-n}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (47).

Пусть J_i — интеграл в левой части неравенства (44). Будем оценивать его снизу. Положим

$$E_i' = \{x\in Q_t(y)\cap\Omega_{s_i}\colon\ (u_{s_i}(x)-\xi_1)\operatorname{sign}\xi < 0\},$$
$$E_i'' = [Q_t(y)\cap\Omega_{s_i}]\setminus E_i'.$$

В силу включения $u_{s_i}\in V_{t,r,s_i}(y,\xi)$ имеем

$$\operatorname{mes} E_i' \le a^{-m} r^{-1/2}. \tag{48}$$

Обозначая через J_i', J_i'' интегралы функции $f_1(\cdot,\eta+\nabla u_{s_i}(\cdot))$ соответственно по E_i' и E_i'', имеем

$$J_i = J_i' + J_i''. \tag{49}$$

Пусть еще M_i — интеграл функции $|f_1(\cdot,\eta+\nabla u_{s_i}(\cdot)) - f_1(\cdot,\nabla u_{s_i}(\cdot))|$ по E_i'. Тогда

$$J_i' \ge \int\limits_{E_i'} f_1(x,\nabla u_{s_i})\,dx - M_i, \tag{50}$$

и для M_i, в силу (1), (2), (47), (48) и выбора r, имеет место оценка

$$M_i \le \frac{\varepsilon}{8}t^{-n}. \tag{51}$$

Заметим еще, что найдется $v\in V_{t,r,s_i}(y,\xi_1)$ такая, что

$$\int\limits_{E_i'} f_1(x,\nabla u_{s_i})\,dx = \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_{s_i}} f_1(x,\nabla v)\,dx. \tag{52}$$

Действительно, если $\xi=0$, то $v=0$; если $\xi>0$, то $v=\min\{u_{s_i},\xi_1\}$; если $\xi<0$, то $v=\max\{u_{s_i},\xi_1\}$. Теперь из (50)–(52) и включения $v\in V_{t,r,s_i}(y,\xi_1)$ выводим

$$J_i' \ge t^{-n}F_{t,r,s_i}(y,\xi_1,0) - \frac{\varepsilon}{8}t^{-n}.$$

Отсюда и из (32), (29) получаем

$$J_i' \ge g(y,\xi)\,t^{-n} - \frac{\varepsilon}{2}t^{-n}. \tag{53}$$

Перейдем к оценке снизу интеграла J_i''. Пусть φ_1 — функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что для любого $\eta'\in\mathbb{R}^n$ $\varphi_1(\eta') = f_1(y,\eta')$. Тогда существует функция $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$, выпуклая на $\mathbb{R}^n$ и такая, что для любого $\eta'\in\mathbb{R}^n$

$$|\varphi(\eta')-\varphi_1(\eta')| \le \varepsilon_1 l_1^{-m}(1+|\eta'|)^{m-1}. \tag{54}$$

При этом в силу (54) и (1) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\eta' \in \mathbb{R}^n$

$$|\partial_i \varphi(\eta')| \le 2^{2m+1} c (1 + |\eta'|)^{m-1}, \tag{55}$$

а вследствие гладкости и выпуклости функции φ для любых $\eta', \eta'' \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(\eta') - \varphi(\eta'') \ge \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi(\eta'') (\eta'_j - \eta''_j). \tag{56}$$

Используя неравенства (24), (27), (54) и (56), для произвольного $x \in E''_i$ получаем

$$f_1(x, \eta + \nabla u_{s_i}(x)) \ge f_1(y, \eta) - \varepsilon_1 + \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi(\eta) \partial_j u_{s_i}(x) -$$

$$- 2\varepsilon_1 l_1^{-m} (1 + |\eta + \nabla u_{s_i}(x)|)^m.$$

Интегрируя это неравенство по E''_i, затем используя (47) и (55), находим

$$J''_i \ge [f_1(y, \eta) - \varepsilon_1] \operatorname{mes} E''_i -$$

$$- 2^{m+2} c l_1^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{E''_i} \partial_j u_{s_i} \, dx \right| - \frac{\varepsilon}{4} t^{-n}. \tag{57}$$

В силу неравенств (47), (48) и выбора r

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{E''_i} \partial_j u_{s_i} \, dx \right| \le G(p_{s_i} u_{s_i}) + n c^3 b_1 l_1^{-m} \varepsilon_1 t^{-n}. \tag{58}$$

Из неравенств (57), (58) и очевидного неравенства

$$\operatorname{mes} E''_i \ge t^{-n} - \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_{s_i}) - a^{-m} r^{-1/2}$$

выводим

$$J''_i \ge f_1(y, \eta) t^{-n} - 2^m c l_1^m G(p_{s_i} u_{s_i}) - c l_1^m \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_{s_i}) - \frac{7}{16} \varepsilon t^{-n}.$$

Отсюда и из (53) и (49) получаем

$$J_i \ge f(y, \xi, \eta) t^{-n} - 2^m c l_1^m G(p_{s_i} u_{s_i}) - c l_1^m \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_{s_i}) - \frac{15}{16} \varepsilon t^{-n}.$$

Из этого неравенства и неравенств (44), (43) выводим

$$f(y, \xi, \eta) \le F'_t(y, \xi, \eta) + 2^m c l_1^m t^n G(p_{s_i} u_{s_i}) + c l_1^m t^n \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_{s_i}) + \varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого $i \in \mathbb{N}$, то, переходя в нем к пределу при $i \to \infty$ и учитывая при этом (3) и слабую сходимость $\{p_{s_i} u_{s_i}\}$ к u^r, получаем (46).

Итак, для любого $r \ge r_0$ справедливо неравенство (42) и имеется функция $u^r \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega)$, для которой справедливы неравенства (45), (46). Из (42) и первого из равенств (10) следует, что

$$F_t''(y, \xi, \eta) \le f(y, \xi, \eta) + \varepsilon, \tag{59}$$

а из (45) вытекает, что существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $r_i \ge r_0$ и функция $v \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $u^{r_i} \to v$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$ и $v = \xi$ почти всюду на $Q_t(y)$. Тогда $G(u^{r_i}) \to 0$. Отсюда и из (46) получаем

$$f(y, \xi, \eta) \le F_t'(y, \xi, \eta) + \varepsilon. \tag{60}$$

Неравенства (59), (60) позволяют заключить, что последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Теорема доказана.

Отметим, что идея использования в доказательстве теоремы 2 функций $\min\{u, \xi_1\}$, $\max\{u, \xi_1\}$ с $u \in V_{t,r,s}(y, \xi)$ и соответствующих множеств E_s', E_s'' вызвана некоторыми рассуждениями из [2].

Далее предполагаем следующее: $2 \le m < n$, $k = 1$; существуют конечные множества J_s, $s \in \mathbb{N}$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$, такие, что

$$\forall\, s \in \mathbb{N} \qquad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, r_s^j), \tag{61}$$

где $B(x_s^j, r_s^j)$ — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j.

Обозначим для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ через ρ_s^j расстояние от $B(x_s^j, r_s^j)$ до множества $\bigcup_{J_s \ni i \ne j} B(x_s^i, r_s^i) \cup \partial\Omega$. Будем предполагать, что

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} \rho_s^j = 0 \tag{62}$$

и существуют постоянные $\nu_1, \nu_2 \ge 1$ такие, что

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \quad \forall\, j \in J_s \qquad r_s^j \le \nu_1 \rho_s^j; \tag{63}$$

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^{m(n-m)/(m-1)} (\rho_s^j)^{-n/(m-1)} \le \nu_2. \tag{64}$$

Заметим, что

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \quad \forall\, j \in J_s \qquad B\left(x_s^j,\, r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j\right) \subset \Omega; \tag{65}$$

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, j, i \in J_s,\ j \ne i,$$

$$\mathring{B}\left(x_s^j,\, r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j\right) \cap \mathring{B}\left(x_s^i,\, r_s^i + \frac{1}{2}\rho_s^i\right) = \varnothing. \tag{66}$$

В силу (62)–(66) имеем

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^{n-m} < \infty, \qquad \lim_{s \to \infty} \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^n = 0. \tag{67}$$

Заметим, что в силу (61) и второго из соотношений (67) справедливо (3).

Для всякого открытого куба $Q \subset \Omega$ и любого $s \in \mathbb{N}$ положим $J_s(Q) = \{j \in J_s :\ x_s^j \in Q\}$.

Теорема 3. *Пусть для любых* $s \in \mathbb{N}$ *и* $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $f_s(x, \eta) = |\eta|^m$; h *— неотрицательная функция из* $C(\overline{\Omega})$ *такая, что для любого открытого куба* $Q \subset \Omega$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j\in J_s(Q)} (r_s^j)^{n-m} = \int_Q h\,dx\,; \tag{68}$$

g — функция на $\Omega\times\mathbb{R}$ такая, что для любой пары $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$

$$g(x,\xi) = \kappa_n \left(\frac{n-m}{m-1}\right)^{m-1} h(x)|\xi|^m,$$

где κ_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Тогда для любого $l\geq l_0$ последовательности $\{g_l'\}$, $\{g_l''\}$ сходятся к функции g равномерно на $\Omega^l\times[-l,l]$.

Доказательство. Положим

$$m_1 = \frac{n-m}{m-1}, \quad m_2 = \frac{2^{m_1}}{2^{m_1}-1},$$

$$\nu = \frac{4\nu_1+1}{4\nu_1+2}, \quad \nu' = \frac{6\nu_1+1}{6\nu_1+3}, \quad d = \operatorname{diam}\Omega.$$

В силу (65) имеем

$$\forall s\in\mathbb{N}, \quad \forall j\in J_s \quad 2r_s^j+\rho_s^j < d. \tag{69}$$

Положим для любого $s\in\mathbb{N}$

$$J_s' = \left\{j\in J_s\colon \left(1+\frac{1}{2\nu_1}\right)r_s^j \geq \frac{1}{2}\rho_s^j\left(\frac{\rho_s^j}{d}\right)^{m/2(n-m)}\right\},$$

$$J_s'' = J_s\setminus J_s'.$$

Используя (62)–(64), получаем

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j\in J_s'} (r_s^j)^{n-m} = 0. \tag{70}$$

Положим для любых $s\in\mathbb{N}$, $j\in J_s$

$$R_s^j = \max\left\{\left(1+\frac{1}{2\nu_1}\right)r_s^j,\ \frac{1}{2}\rho_s^j\left(\frac{\rho_s^j}{d}\right)^{m/2(n-m)}\right\}.$$

Из определения чисел R_s^j и (63), (69) вытекает, что для любых $s\in\mathbb{N}$ и $j\in J_s$

$$r_s^j < \nu' R_s^j < \nu R_s^j < R_s^j \leq r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j < d.$$

Положим для любого $s\in\mathbb{N}$

$$\sigma_s = \sum_{j\in J_s} (r_s^j)^{mm_1}(R_s^j)^{-m_1}.$$

В силу (62) и (64) имеем

$$\lim_{s\to\infty}\sigma_s = 0. \tag{71}$$

Положим для любых $s\in\mathbb{N}$, $j\in J_s$

$$a_s^j = [(r_s^j)^{-m_1} - d^{-m_1}]^{-1},$$

$$G_s^j = \overset{\circ}{B}(x_s^j, d) \setminus B(x_s^j, r_s^j), \qquad E_s^j = \overset{\circ}{B}(x_s^j, d) \setminus B(x_s^j, \nu' R_s^j).$$

Заметим, что если $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$, то $\Omega \subset \overset{\circ}{B}(x_s^j, d)$ и, следовательно, $\Omega_s \subset \subset G_s^j$.

Пусть теперь для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ u_s^j — функция на G_s^j такая, что для любого $x \in G_s^j$

$$u_s^j(x) = a_s^j\,[|x - x_s^j|^{-m_1} - d^{-m_1}].$$

Если $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$, то имеем

$$u_s^j \in C^1(\overline{G_s^j}),$$

$$\forall\, x \in G_s^j \qquad 0 < u_s^j(x) \le m_2 \left(\frac{r_s^j}{|x - x_s^j|} \right)^{m_1}; \tag{72}$$

$$\kappa_n (m_1 a_s^j)^{m-1} = \int\limits_{G_s^j} |\nabla u_s^j|^m\, dx \le \kappa_n (m_1 m_2)^{m-1} (r_s^j)^{n-m}; \tag{73}$$

$$\int\limits_{E_s^j} |\nabla u_s^j|^m\, dx \le c_0 (r_s^j)^{m m_1} (R_s^j)^{-m_1}, \tag{74}$$

где $c_0 > 1$ и зависит только от n, m, ν_1;

$$\forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(G_s^j) \qquad \int\limits_{G_s^j} |\nabla u_s^j|^{m-2} (\nabla u_s^j, \nabla v)\, dx = 0. \tag{75}$$

Кроме того, используя (73), (62), (63) и (68), устанавливаем, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{j \in J_s(Q)} \int\limits_{G_s^j} |\nabla u_s^j|^m\, dx = \kappa_n m_1^{m-1} \int\limits_Q h\, dx. \tag{76}$$

Далее, пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ ψ_s^j — функция из $C^1(\overline{G_s^j})$ такая, что $0 \le \psi_s^j \le 1$ на G_s^j, $\psi_s^j = 1$ на $G_s^j \cap B(x_s^j, \nu R_s^j)$, $\psi_s^j = 0$ на $G_s^j \setminus B(x_s^j, R_s^j)$, $|\nabla \psi_s^j| \le c_1 (R_s^j)^{-1}$ на G_s^j; χ_s^j — функция из $C^1(\overline{G_s^j})$ такая, что $0 \le \chi_s^j \le 1$ на G_s^j, $\chi_s^j = 1$ на $G_s^j \cap B(x_s^j, \nu' R_s^j)$, $\chi_s^j = 0$ на $G_s^j \setminus B(x_s^j, \nu R_s^j)$, $|\nabla \chi_s^j| \le c_2 (R_s^j)^{-1}$ на G_s^j (c_1, c_2 — положительные постоянные, зависящие только от n, ν_1).

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s = \sum_{j \in J_s} (u_s^j \psi_s^j)\Big|_{\Omega_s}.$$

Используя (72), (62), (65) и второе из соотношений (67), получаем

$$\lim_{s \to \infty} \|u_s\|_{L^m(\Omega_s)} = 0, \tag{77}$$

а используя (71)–(73), находим

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, \|\nabla u_s\|^m_{L^m(\Omega_s)} \le c_3\, \overline{\lim_{s \to \infty}} \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^{n-m}, \tag{78}$$

где $c_3 = \kappa_n (2 m_1 m_2)^{m-1}$.

С помощью (62)–(64), (71)–(74), (76) и первого из соотношений (67) устанавливаем, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$

$$\lim_{s \to \infty} \int\limits_{Q \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m \, dx \;=\; \varkappa_n \, m_1^{m-1} \int\limits_{Q} h \, dx \,. \tag{79}$$

Положим для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ и любых $t, r, s \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_{t,r,s}(Q) = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s) \colon \|\nabla v\|_{L^m(\Omega_s)} \le t^2, \int\limits_{Q \cap \Omega_s} |v|^m \, dx \le \frac{1}{r} \right\},$$

$$\Phi_{t,r,s}(Q) = \sup_{v \in \mathcal{V}_{t,r,s}(Q)} \left| \int\limits_{Q \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^{m-2} (\nabla u_s, \nabla v) \, dx \right|.$$

Покажем, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ и любых $t, r \in \mathbb{N}$

$$\varlimsup_{s \to \infty} \Phi_{t,r,s}(Q) \le c' r^{-1/m}, \tag{80}$$

где c' — положительная постоянная, зависящая только от n, m, ν_1, ν_2.

Пусть Q — открытый куб, содержащийся в Ω, $t, r \in \mathbb{N}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$J_s''(Q) = \left\{ j \in J_s \colon \; B\left(x_s^j, \, r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j\right) \subset Q \right\}.$$

В силу (62) и (64) существует $s_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \ge s_0$

$$\max_{j \in J_s} \rho_s^j \le 4^{-n} d, \qquad \sum_{j \in J_s} (r_s^j)^{m m_1} (\rho_s^j)^{-n/(m-1)} \le 2\nu_2. \tag{81}$$

Зафиксируем $s \ge s_0$, пусть $v \in \mathcal{V}_{t,r,s}(Q)$ и для любого $j \in J_s$ через v_s^j обозначим продолжение v нулем на G_s^j. Положим еще

$$\mu_s = \sum_{j \in J_s''(Q) \cap J_s''} \; \int\limits_{\overset{\circ}{B}(x_s^j, R_s^j) \setminus B(x_s^j, r_s^j)} |\psi_s^j \nabla u_s^j|^{m-2} (\psi_s^j \nabla u_s^j, \nabla v_s^j) \, dx \,.$$

Используя (70)–(73) и (62)–(64), устанавливаем, что

$$\left| \int\limits_{Q \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^{m-2} (\nabla u_s, \nabla v) \, dx \right| \le |\mu_s| + \left[\sum_{j \in J_s} (r_s^j)^{n-m} + t^{2m} + \sigma_s \right] \sigma_s', \tag{82}$$

где $\sigma_p' \to 0$ при $p \to \infty$.

Учитывая (75), получаем

$$|\mu_s| \le \sum_{j \in J_s''(Q) \cap J_s''} \; \int\limits_{\overset{\circ}{B}(x_s^j, R_s^j) \setminus B(x_s^j, \nu' R_s^j)} |\nabla u_s^j|^{m-1} |\nabla ((1 - \chi_s^j) v_s^j)| \, dx \,. \tag{83}$$

Из (83) и (74) выводим неравенство

$$|\mu_s| \le 2c_0 \sum_{j \in J_s''(Q) \cap J_s''} [(r_s^j)^{m m_1} (R_s^j)^{-m_1}]^{(m-1)/m} \times$$

$$\times \left[\; \int\limits_{\overset{\circ}{B}(x_s^j, R_s^j) \setminus B(x_s^j, \nu' R_s^j)} \left\{ |\nabla v|^m + \left(\frac{c_2}{R_s^j} \right)^m |v|^m \right\} dx \right]^{1/m}. \tag{84}$$

Пусть $j \in J_s''$. Поскольку $s \geq s_0$, то в силу первого из неравенств (81) $R_s^j < \frac{1}{2}\left(r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j\right)$. Тогда, используя лемму 1.4 [5, с. 299], получаем

$$\int\limits_{\mathring{B}(x_s^j, R_s^j) \setminus B(x_s^j, \nu' R_s^j)} |v|^m \, dx \leq$$

$$\leq c_4 \int\limits_{\mathring{B}(x_s^j, r_s^j + \frac{1}{2}\rho_s^j) \setminus B(x_s^j, r_s^j)} \left\{ (R_s^j)^m |\nabla v|^m + \left(\frac{R_s^j}{\rho_s^j}\right)^n |v|^m \right\} dx, \tag{85}$$

где $c_4 > 1$ и зависит только от n, m, ν_1. Неравенства (84), (85) и второе из неравенств (81) позволяют заключить, что

$$|\mu_s| \leq 2c_0(1 + c_2 c_4) t^2 \sigma_s^{(m-1)/m} + 4c_0 c_2 c_4 \nu_2 r^{-1/m}. \tag{86}$$

Из (82) и (86), используя первое из соотношений (67) и (71), выводим (80).

Перейдем к непосредственному доказательству утверждения теоремы. Зафиксируем $l \geq l_0$ и $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции h на Ω^{2l} существует $\tau > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega^{2l}$, $|x' - x''| \leq \tau$, справедливо неравенство

$$|h(x') - h(x'')| \leq \varepsilon [4\kappa_n n^m l^m]^{-1}. \tag{87}$$

Пусть $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\varphi_0 = 1$ на $Q_2(0)$, $\varphi_0 = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus Q_1(0)$; $\mu = \max\limits_{i=\overline{0,n}} \max\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi_0|$. Выберем $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $t_0 > \max\{2nl, n\tau^{-1}, \mu l(2 + c_5 + \operatorname{mes}\Omega)\}$, где c_5 — правая часть неравенства (78), и зафиксируем произвольные $t \in \mathbb{N}$, $t \geq t_0$, и $(y, \xi) \in \Omega^l \times [-l, l]$. Пусть φ — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ $\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{t}{2}(x - y)\right)$.

Рассмотрим последовательность функций $v_s = \xi(1 - u_s)\varphi|_{\Omega_s}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in \mathring{W}^{1,m}(\Omega_s)$. Кроме того, в силу (77), (78) и выбора t_0 имеем

$$\lim_{s \to \infty} \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |v_s - \xi|^m \, dx = 0, \qquad \overline{\lim_{s \to \infty}} \|\nabla v_s\|_{L^m(\Omega_s)} < t^2.$$

Из этих соотношений вытекает, что справедливо предложение:

(i) *если* $r \in \mathbb{N}$, *то существует* $s_r \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\forall s \geq s_r$ $v_s \in V_{t,r,s}(y, \xi)$.

Используя это предложение и (79), (87), получаем неравенство

$$g_t''(y, \xi) \leq g(y, \xi) + \varepsilon. \tag{88}$$

Покажем теперь, что

$$g_t'(y, \xi) \geq g(y, \xi) - \varepsilon. \tag{89}$$

Прежде всего, используя предложение (i), устанавливаем, что

$$\lim_{r \to \infty} F_{t,r}'(y, \xi, 0) = g_t'(y, \xi). \tag{90}$$

В силу (79) и (87) существует $s' \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \geq s'$

$$\int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m \, dx \geq \kappa_n m_1^{m-1} h(y) t^{-n} - \frac{\varepsilon}{2} t^{-n} l^{-m}. \tag{91}$$

Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$ и произвольное $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \max(s', s_r)$. Используя предложение (i) и (91), получаем $F_{t,r,s}(y, \xi, 0) \geq g(y, \xi) - 2ml^m t^n \times \Phi_{t,r,s}(Q_t(y)) - \varepsilon$. Отсюда и из (80), (90) выводим неравенство (89), которое вместе с неравенством (88) позволяет заключить, что последовательности $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ сходятся к функции g равномерно на $\Omega^l \times [-l, l]$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что условия (62) – (64) совпадают с соответствующими условиями из [6], где изучалась сходимость решений задач Дирихле в перфорированных областях для нелинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида второго порядка.

1. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 614–629.
2. *Панкратов Л. С.* Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей. – Харьков, 1987. – 18 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 11-87).
3. *Ковалевский А. А.* О Г-сходимости интегральных функционалов, связанной с вариационной задачей Дирихле в переменных областях // Докл. НАН Украины. – 1992. – № 12. – С. 5–9.
4. *Ковалевский А. А.* Г-сходимость интегральных функционалов и вариационная задача Дирихле в переменных областях // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1236–1254.
5. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
6. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.

Получено 17.07.2000