УДК 517.947

В. П. Бурский, Т. В. Штепина
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О СПЕКТРЕ ЭКВИВАРИАНТНОГО РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ШАРЕ

We study relation between the correctness of equivariant problem for the Poisson equation in a ball and a spectrum of its generating operator.

Вивчається зв'язок між коректністю еквіваріантної задачі для рівняння Пуассона у кулі та спектра оператора, що її породжує.

В настоящей работе изучается связь корректности эквивариантной граничной задачи для уравнения Пуассона в шаре и спектра ею порожденного оператора. Показано, как именно условие корректности отсекает возможность появления точек непрерывного спектра оператора эквивариантной граничной задачи. Схема изложения такая же, как и в работе [1]. В [2, 3] можно найти необходимые сведения из теории расширений и краевых задач. Отметим работы [4, 5], в которых исследовались граничные задачи для уравнения Пуассона, а также работу [6], где рассматриваются общие эквивариантные задачи.

1. Пространство Коши и корректные граничные задачи. Пусть область $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — единичный шар и оператор Лапласа Δ, первоначально заданный на пространстве $C_0^\infty(\Omega)$, порождает минимальный оператор L_0, определяемый как замыкание оператора Δ в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2$, и максимальный оператор $L = L_0^*$ сопряжением в пространстве $L_2(\Omega)$. Области определения $D(L_0)$, $D(L)$ этих операторов являются гильбертовыми пространствами в норме графика и $D(L_0)$ — замкнутое подпространство в $D(L)$. Заметим, что в нашей ситуации пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $D(L)$ и выполнено условие Вишика: оператор $L_0 : D(L_0) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный. Введем пространство Коши $C(L) = D(L)/D(L_0)$ и отображение факторизации $\Gamma : D(L) \to C(L)$.

Однородной граничной задачей [3] называются соотношения

$$Lu = f, \qquad \Gamma u \in B, \tag{1}$$

где B — линейное подпространство в пространстве Коши, определяющее граничную задачу. Задача (1) называется корректной, если оператор $L_B = L|_{D(L_B)}$, $D(L_B) = \Gamma^{-1}B$ является разрешимым расширением оператора L_0, т. е. если оператор $L_B : D(L_B) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный обратный (который является правым обратным к L). Заметим, что выполнение условия Вишика равносильно сюръективности оператора $L : D(L) \to L_2(\Omega)$. При этом корректность граничной задачи (1) означает разложение пространства Коши в прямую сумму $C(L) = \Gamma(\ker L) \oplus B$. В работах одного из авторов (см., например, [7]) пространство Коши $C(L)$ для общего дифференциального оператора характеризуется с помощью набора L-следов, который в нашем случае имеет вид $L_0 u = u|_{\partial\Omega} \in H^{(-1/2)}(\partial\Omega)$, $L_1 u = -u'_\nu|_{\partial\Omega} \in H^{(-3/2)}(\partial\Omega)$ и имеют место включения

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega) \subset C(L) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega) \oplus H^{-3/2}(\partial\Omega).$$

В терминах L-следов записывается также следующее условие связи следов функций из ядра $\ker L$.

Утверждение 1. *Для того чтобы набор $(u_0, u_1) \in C(L)$ L-следов некоторой функции u из пространства $D(L)$ был набором L-следов решения* *уравнения* $L\,u = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой гладкой функции* $v \in \ker L$ *было выполнено условие*

$$\langle u_0, v'_\nu|_{\partial\Omega}\rangle + \langle u_1, v|_{\partial\Omega}\rangle = 0.$$

2. Эквивариантные граничные задачи. Пусть G — некоторая группа Ли, в частности, дискретная, действующая в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Это означает, что имеется группа диффеоморфизмов

$$U_g : \overline{\Omega} \ni x \to gx = U_g(x) \in \overline{\Omega}$$

области $\overline{\Omega}$ на себя, гладко зависящих от элемента группы G, и отображение $g \to U_g$ — гомоморфизм групп. При этом сужение диффеоморфизмов U_g на границу $\partial\Omega$ индуцирует гладкое действие группы G на границе $\partial\Omega$. Действие группы G на области $\overline{\Omega}$ порождает представление группы G в функциональных пространствах: $(T(g)u)(x) = u(g^{-1}x)$ (гомоморфизм группы G в группу обратимых операторов). Такое представление индуцируется на пространствах $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $H^{(m)}(\partial\Omega)$, $H^{(-m)}(\partial\Omega)$ и др.

Если действие группы G сохраняет объем области Ω, то скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ инвариантно относительно действия группы G, и поэтому представление группы G в этом пространстве унитарно. Пусть дифференциальная операция Δ инвариантна относительно действия группы G, т. е. $T(g)\Delta u = \Delta T(g)u$. Тогда пространства $D(L)$, $D(L_0)$, $C(L)$, $\ker L$ инвариантны относительно действия группы G.

Граничную задачу (1), порожденную подпространством $B \subset C(L)$, назовем G-инвариантной, если пространство B инвариантно относительно указанного действия группы G.

Будем считать, что действие группы на границе области Ω транзитивно, т. е. для любых двух точек x, y из $\partial\Omega$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $gx = y$. В этом случае если группа G компактна (и непрерывна), то, как известно (см., например, [8 – 10]), гильбертово пространство представления, состоящее из функций на $\partial\Omega$, разлагается в прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств, в которых индуцируются неприводимые представления группы G. А если группа G еще и коммутативна, то неприводимые представления одномерны.

Пусть пространством представления группы G является пространство Коши $C(L)$ и для компактной группы имеем разложения

$$C(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \tilde{C}^k, \quad C(\ker L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus C^k(\ker L), \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus B^k.$$

Если наша G-инвариантная граничная задача корректна, то из разложения в прямую сумму $C(L) = C(\ker L) \oplus B$ следует разложение в прямую сумму

$$C^k = C^k(\ker L) \oplus B^k = \sum_l \tilde{C}_l^k$$

с конечномерными проекторами $\Pi^k : C^k \to C^k(\ker L)$ вдоль B^k и теперь проверка корректности G-инвариантной граничной задачи может быть сведена к проверке двух свойств: 1) $C^k(\ker L) \cap B^k = 0$; 2) $\exists\, \kappa > 0 \ \forall\, k \ \|\Pi^k\|_{C^k} < \kappa$.

Обозначим через L_λ оператор $L + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — максимальный оператор операции $\Delta + \lambda^2$. Заметим, что пространство Коши $C(L_\lambda)$ не зависит от λ. Действительно, норма графика $\|\cdot\|_{L+\lambda^2}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_L$, поэтому

$C(L_\lambda) = D(L+\lambda^2)/D(L_0+\lambda^2) = D(L)/D(L_0) = C(L)$ в силу того, что $D(L) = D(L+\lambda^2)$, $D(L_0) = D(L_0+\lambda^2)$. Не зависят от λ и пространства C^k и B^k, но зависят от λ пространства $C^k(\ker L_\lambda)$. В этом случае при некоторых значениях λ пересечение $C^k(\ker L_\lambda) \cap B^k$ не тривиально. Каждое такое $-\lambda^2$ является собственным значением оператора L_B, а каждый вектор $v \in C^k(\ker L_\lambda) \cap \cap B^k$ — соответствующим собственным вектором.

В настоящей работе будем рассматривать случай специальной ортогональной группы $G = SO(n, \mathbb{R})$. Это компактная некоммутативная группа Ли.

Оператор Лапласа Δ инвариантен относительно действия группы G, равно как и область Ω. Рассмотрим задачу (1). Будем считать, что эта граничная задача G-инвариантна и корректна. Наша цель — исследование спектра оператора L_B, поэтому будем изучать ту же граничную задачу для уравнения Гельмгольца

$$L_\lambda v = Lv + \lambda^2 v = g, \qquad \Gamma v \in B \tag{2}$$

с комплексным λ. Однако вначале изучим пространство Коши $C(L)$ этого оператора и его подпространство $C(\ker L)$.

3. Пространство Коши оператора Гельмгольца. Ядро оператора Гельмгольца граничной задачи состоит из собственных функций максимального оператора L, отвечающих собственному значению $-\lambda^2$ и принадлежащих пространству $\Gamma^{-1}B$. Пространство $C(\ker L_\lambda)$ раскладывается в прямую сумму подпространств $C^k(\ker L_\lambda)$. Как отмечалось выше, пространство Коши $C(L_\lambda) = C(L+\lambda^2)$ раскладывается в топологическую прямую сумму $C(L_\lambda) = B \oplus C(\ker L_\lambda)$, а кроме того, состоит из пар функций $\psi_0 = u|_{\partial\Omega}$, $\psi_1 = -u'_\nu|_{\partial\Omega}$. Инвариантные подпространства C^l представлений класса 1 группы G, которые фигурируют в разложении $C(L) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_k \oplus C_k^l$, являются пространствами пар коэффициентов (a_l^k, b_l^k) разложений в ряд Фурье по сферическим гармоникам функций

$$\psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_k a_l^k H_l^k, \qquad \psi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_k b_l^k H_l^k,$$

где мультииндекс k пробегает всевозможные наборы целых чисел $k = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-3}, \pm k_{n-2})$ такие, что $l \geq k_1 \geq \ldots \geq k_{n-2} \geq 0$. Функции H_l^k при фиксированном l образуют ортонормированный базис в пространстве однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Явный вид этих функций можно найти в [8, 11], но нам он не понадобится. Отметим только, что символом H_l^1 для удобства будем условно обозначать зональную гармонику $H_l^1(x) = |x|^l C_l^{n/2-1}(\langle e_1, x/|x|\rangle) / C_l^{n/2-1}(1)$, где $C_l^\lambda(t)$ — полином Гегенбауэра [11], $e_1 \in S^{n-1}$ — полюс системы координат.

Заметим, что по утверждению 1 подпространство $C(\ker L_\lambda)$ выделяется в пространстве $C(L_\lambda)$ условием

$$\int_{\partial\Omega} \left[\psi_0(x)(\xi \cdot \nabla_\xi) e^{-i\langle \xi \cdot x\rangle} + \psi_1(x) e^{-i\langle \xi \cdot x\rangle}\right] ds_x = 0 \qquad \forall\, \xi \in \Lambda^\lambda, \tag{3}$$

где $\Lambda^\lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \lambda^2\}$, x — точка, ds_x — лебегова мера на сфере.

Найдем выражение условия (3) в терминах коэффициентов Фурье a_l^k, b_l^k функций $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$. Для этого подставим в (3) разложения функций $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ и распространим интегрирование по сфере на все пространство $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k}\left(a_l^k\int_{\mathbb{R}^n}\delta(|x|-1)\,H_l^k(x)\,(\xi\cdot\nabla_\xi)e^{-i\langle\xi\cdot x\rangle}\,dx\ +\right.$$
$$\left.+\ b_l^k\int_{\mathbb{R}^n}\delta(|x|-1)\,H_l^k(x)\,e^{-i\langle\xi\cdot x\rangle}\,dx\right)\ =\ 0$$

с одномерной δ-функцией Дирака.

Хорошо известно, что если преобразование Фурье применяется к произведению радиальной функции на гармоническую, то гармонический сомножитель сохраняется, а радиальный преобразуется некоторым известным образом [12] (теорема 3.10). Несложные вычисления показывают, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(|x|-1)\,H_l^k(x)\,e^{-i\langle\xi\cdot x\rangle}\,dx\ =\ \frac{(2\pi)^{n/2}}{i^l\lambda^{n/2+l-1}}\,J_{n/2+l-1}(\lambda)\,H_l^k(\xi),$$

аналогично, с учетом равенства $(\xi\cdot\nabla_\xi)H_l^k(\xi)=l\,H_l^k(\xi)$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(|x|-1)\,H_l^k(x)\,(\xi\cdot\nabla_\xi)e^{-i\langle\xi\cdot x\rangle}\,dx\ =$$
$$=\ \frac{(2\pi)^{n/2}}{i^l\lambda^{n/2+l-1}}\left(\lambda J'_{n/2+l-1}(\lambda)-\left(\frac{n}{2}-1\right)J_{n/2+l-1}(\lambda)\right)H_l^k(\xi).$$

Здесь $J_{n/2+l-1}(t)$ — функция Бесселя.

Теперь в силу ортогональности сферических гармоник $H_l^k(\xi)$ в $L^2(S^{n-1})$ соотношение (3) принимает простой вид

$$a_l^k\,\lambda J'_{n/2+l-1}(\lambda)+\left(b_l^k-\left(\frac{n}{2}-1\right)a_l^k\right)J_{n/2+l-1}(\lambda)\ =\ 0. \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно случай $\lambda=0$. Пусть u — решение уравнения Лапласа в шаре Ω с граничными данными $u|_{\partial\Omega}=\psi_0$ и $u'_\nu|_{\partial\Omega}=-\psi_1$. Найдем условие связи функций ψ_0 и ψ_1. Согласно общей схеме метода Фурье

$$u\ =\ \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k}R_{l,k}(r)\,H_l^k(x). \tag{5}$$

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta\ =\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_S,$$

где Δ_S — оператор Лапласа – Бельтрами на сфере. Подставляя разложение (5) в уравнение $\Delta u=0$ и разделяя переменные, получаем

$$\begin{cases}-\Delta_S H_l^k(x)\ =\ \lambda H_l^k(x),\\[2mm] R''_{l,k}(r)+\dfrac{n-1}{r}R'_{l,k}(r)-\dfrac{\lambda}{r^2}R_{l,k}(r)\ =\ 0.\end{cases}$$

Хорошо известно [13], что спектр оператора $-\Delta_S$ чисто дискретный, он состоит из чисел $\lambda_l = l(l+n-2)$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность собственного значения $l(l+n-2)$ равна размерности пространства однородных гармонических многочленов степени l. Собственному значению λ_l соответствует единственный положительный корень l характеристического многочлена $\alpha^2 + (n-2)\alpha - \lambda$ уравнения Эйлера для R. Следовательно, в (5) $R_{l,k}(r)$ пропорционально r^l и

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_k c_{k,k}(r)\, r^l H_l^k(x),$$

откуда для коэффициентов Фурье функций $\psi_0 = u|_{\partial\Omega}$ и $\psi_1 = -u'_\nu|_{\partial\Omega}$ получаем соотношение

$$l a_l^k + b_l^k = 0. \tag{6}$$

4. $SO(n)$-инвариантные граничные задачи в шаре. Рассмотрим квазирегулярное представление $T\colon G \to GL(L^2(S^{n-1}))$ группы Ли $G = SO(n)$, определяемое равенством $(T(g)f)(\xi) = f(g^{-1}\xi)$, где $f(\xi) \in L^2(S^{n-1})$, $g \in G$. Представление T унитарно и имеет следующее разложение в прямую сумму неприводимых представлений [8]

$$T = \sum_{l=0}^{\infty} T^l, \tag{7}$$

где неприводимая компонента T^l действует в пространстве $\gamma(H^l)$, γ — операция сужения функции, определенной в $\mathbb{R}^n$, на сферу S^{n-1}, H^l — пространство однородных гармонических многочленов степени l от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Разложение (7) имеет простой спектр, т. е. представления T^l и $T^{l'}$ попарно неизоморфны при $l \neq l'$. Будем рассматривать функции на сфере S^{n-1} как функции на группе G, постоянные на левых смежных классах по подгруппе $H = SO(n-1)$. Пространство таких функций будем по-прежнему обозначать $L^2(S^{n-1})$.

Предложение 1. *Каждый линейный оператор $\mathcal{A}$ в $L^2(S^{n-1})$, перестановочный со всеми операторами $T(g)$ квазирегулярного представления, является сверточным. Иначе говоря, для каждого оператора $\mathcal{A}$ найдется функция $\psi_{\mathcal{A}} \in L^2(S^{n-1})$ такая, что*

$$[\mathcal{A}\varphi](g) = \int_{g_1 \in G} \varphi(g_1)\, \psi_{\mathcal{A}}(g_1^{-1}g)\, dg_1 = [\varphi * \psi_{\mathcal{A}}](g)$$

для любой функции $\varphi \in L^2(S^{n-1})$. И наоборот, каждый оператор свертки коммутирует с каждым $T(g)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}|_{\gamma(H^l)}$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на $\gamma(H^l)$. Пусть $V_l = \operatorname{Im} \mathcal{A}_l$. Тогда V_l инвариантно относительно $T(g)$, $g \in G$. Действительно, для любых $y \in V_l$, $g \in G$

$$T(g)y = T(g)\mathcal{A}_l x = \mathcal{A}_l T(g) x = \mathcal{A}_l x' \in V_l,$$

так как $x' = T(g)x \in \gamma(H^l)$. Пусть S^l — представление G в V_l. Тогда оператор $\mathcal{A}_l$ является сплетающим оператором представления T^l в S^l. Согласно лемме Шура либо $\mathcal{A}_l = 0$ и $V_l = 0$, либо найдется $\lambda_l \neq 0$ такое, что $\mathcal{A}_l = \lambda_l E$ и

$V_l = \gamma(H^l)$ (мы воспользовались также простотой спектра в (7)). Пусть теперь E_l — оператор ортогонального проектирования $L^2(S^{n-1})$ на $\gamma(H^l)$. Тогда

$$\mathcal{A} = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_l E_l$$

(здесь возможно равенство нулю некоторых λ_l).

Осталось показать, что ортопроектор E_l является сверточным. Это вытекает из следующей леммы, устанавливающей связь между коэффициентами Фурье свертки $f_1 * f_2$ и коэффициентами Фурье сворачиваемых функций f_1 и f_2.

Лемма. *Пусть*

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{h(l)} \lambda_l^m t_{m1}^l(g)$$

— разложение свертки функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$, постоянных на левых смежных классах по подгруппе H, в ряд Фурье. Здесь $t_{m1}^l(g) = (T^l(g)e_1, e_m)$ — матричные элементы неприводимого представления T^l, e_1 — инвариантный относительно H вектор в пространстве представления T^l, $h(l) = \dim T^l$.

Тогда $\lambda_l^m = \alpha_l^m \beta_l^1$, где α_l^m и β_l^m — коэффициенты Фурье функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ соответственно.

Доказательство.

$$\lambda_l^m = \int_{S^{n-1}} \int_G f_1(g)\, f_2(g^{-1}\xi)\, \overline{t_{m1}^l(\xi)}\, dg_1\, d\xi,$$

где $g^{-1}\xi$ — обычное действие группы G на однородном пространстве $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$. После замены переменной $\xi = g_1\xi'$, $\xi' \in S^{n-1}$ и сведения интеграла по группе G к интегрированию по S^{n-1} и H [8, с. 419] получим

$$\lambda_l^m = \sum_{k=1}^{h(l)} \left(\int_{S^{n-1}} f_1(\xi)\, \overline{t_{mk}^l(\xi)}\, d\xi \right) \left(\int_{S^{n-1}} f_2(\xi')\, \overline{t_{k1}^l(\xi')}\, d\xi' \right) =$$

$$= \left(\int_{S^{n-1}} f_1(\xi)\, \overline{t_{m1}^l(\xi)}\, d\xi \right) \left(\int_{S^{n-1}} f_2(\xi')\, \overline{t_{11}^l(\xi')}\, d\xi' \right) = \alpha_l^m \beta_l^1.$$

В сумме по k отличным от 0 может быть лишь слагаемое при $k = 1$ в силу соотношений ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству предложения 1, заметим, что $E_l\varphi = \varphi * t_{11}^l$, где t_{11}^l — зональная сферическая функция для представления T^l. Действительно, единственным ненулевым коэффициентом Фурье у $t_{11}^l(g)$ является $\beta_l^1 = 1$. Поэтому

$$t_{m1}^l * t_{11}^l = t_{m1}^l = E_l(t_{m1}^l),$$

в то время как

$$t_{m1}^{l'} * t_{11}^l = 0 = E_l(t_{m1}^{l'}) \qquad \forall\, l' \neq l.$$

Прямое утверждение предложения 1 доказано. Обратное утверждение очевидно.

Пространство Коши $C(L)$, как мы выяснили, состоит из некоторых пар функций $(\psi_0, \psi_1) \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \oplus H^{-3/2}(\partial\Omega)$, поэтому общее граничное условие должно иметь вид

$$\mathcal{A}u|_{\partial\Omega} + \mathcal{B}u'_{\nu}|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — некоторые линейные операторы. Как было выяснено, эквивариантный линейный оператор в $L^2(S^{n-1})$, перестановочный со всеми операторами $T(g)$ квазирегулярного представления, должен быть сверточным и поэтому иметь диагональный вид в базисе сферических гармоник, что, как обычно в гармоническом анализе, позволяет рассматривать действие такого оператора в шкале соболевских пространств. Поэтому общая эквивариантная граничная задача должна иметь вид

$$u|_{\partial\Omega} * \alpha + u'_{\nu}|_{\partial\Omega} * \beta = 0, \tag{8}$$

где $\alpha = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_k \alpha_l^k H_l^k$, $\beta = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_k \beta_l^k H_l^k$ — функции на сфере S^{n-1}, разложенные в ряды Фурье, $*$ — свертка на $\partial\Omega: \psi * \alpha = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_k \psi_l^k \alpha_l^1 H_l^k$, что, в частности, означает, что разложения функций α и β состоят лишь из зональных частей.

Условие (8) в терминах коэффициентов Фурье функций ψ_0, ψ_1 из пространства B согласно лемме запишется в виде

$$a_l^k \alpha_l^1 + \beta_l^k \beta_l^1 = 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall\, k. \tag{9}$$

Вид условия (9) показывает, что нам не важны гладкостные свойства функций α и β, выражающиеся в скорости роста или убывания коэффициентов разложения, а важны лишь их соотношения между собой. Кроме того, будем предполагать, что коэффициенты α_l^1, β_l^1 удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$\forall\, l \quad \frac{\left|\alpha_l^1\right|^2 + l^2\left|\beta_l^1\right|^2}{1+l^2} = 1.$$

Заметим, что если хотя бы при одном l и α_l^1 и β_l^1 одновременно были бы равны нулю, то $B \bigcap C(\ker L) \neq 0$ и задача (8) тогда была бы не корректна.

Обозначим через C^l образ вложения $i_l : \mathbb{C}^2 \to C(L)$, действующего по правилу $i_l : (a, b) \to (aH_l^k, bH_l^k)$. (Строго говоря, такой образ зависит не только от l, но и от k, но так как все дальнейшее изложение справедливо для каждого $k = (k_1, k_2, \ldots, \pm k_{n-2})$, где $l \geq k_1 \geq \ldots \geq k_{n-2} \geq 0$, то символ k опускаем.)

Граничная задача (8) задает подпространство B пространства $C(L)$, которое ввиду (9) пересекает каждое пространство C^l по прямой.

5. Спектр разрешимого $SO(n)$-инвариантного расширения оператора Лапласа в шаре. Введем для удобства обозначение $\nu = n/2 - 1$.

Предложение 2. *Задача* (8), *корректная для уравнения* $\Delta u = g$, *корректна для уравнения* $\Delta u + \lambda^2 u = g$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\forall\, l \in \mathbb{Z}^+ \quad \left|\lambda\beta_l^1 J'_{\nu+l}(\lambda) - \beta_l^1 \nu J_{\nu+l}(\lambda) - \alpha_l^1 J_{\nu+l}(\lambda)\right| \neq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Корректность задачи (8), т. е. разложение в прямую сумму $C(L_\lambda) = B \oplus C(\ker L_\lambda)$ в соответствии с условиями корректности из пункта 1, означает, что

$$\exists A > 0, \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall\, k \quad \left|\sin\left(B_l^k, C_l^k(\ker L)\right)\right| > A. \tag{11}$$

Применяя формулу $\left|\sin(\vec{b}, \vec{c})\right| = \left|\det(\vec{b}, \vec{c})\right| / \left(|\vec{b}||\vec{c}|\right)$, получаем условие (11) в виде

$$\forall\, l \in \mathbb{Z}^+ \quad \frac{\left|\beta_l^1 \lambda J'_{\nu+l}(\lambda) - \beta_l^1 \nu J_{\nu+l}(\lambda) - \alpha_l^1 J_{\nu+l}(\lambda)\right|}{\sqrt{\left|\lambda J'_{\nu+l}(\lambda) - \nu J_{\nu+l}(\lambda)\right|^2 + \left|J_{\nu+l}(\lambda)\right|^2}} > A > 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0. \tag{12}$$

Если задача (8) корректна для оператора Лапласа $(\lambda = 0)$, то выполняется условие

$$\exists\, a > 0, \quad \forall\, l \quad \frac{\left|l\beta_l^1 - \alpha_l^1\right|}{\sqrt{l^2+1}} > a.$$

При $m \to \infty$ и фиксированном λ главный член асимптотического разложения функции $J_m(\lambda)$ имеет вид $(\lambda/2)^m (\Gamma(m+1))^{-1}$, а главный член асимптотического разложения функции $\lambda J'_m(\lambda)$ — вид $(\lambda/2)^m (\Gamma(m))^{-1}$ [11]. Введем функции $J_m^1(\lambda)$, $J_m^2(\lambda)$ с помощью формул

$$J_m^1(\lambda) = \frac{\lambda J'_m(\lambda)\,\Gamma(m)}{(\lambda/2)^m}, \qquad J_m^2(\lambda) = \frac{J_m(\lambda)\,\Gamma(m+1)}{(\lambda/2)^m},$$

причем $J_m^1(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$, $J_m^2(\lambda) \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$ и $J_m^1(0) = J_m^2(0) = 1$. Теперь условие (12) эквивалентно следующему: $\exists A_1 > 0$, $\forall\, l \in \mathbb{Z}^+$

$$\left|\beta_l^1 (\nu + l) J_{\nu+l}^1(\lambda) - \beta_l^1 \nu J_{\nu+l}^2(\lambda) - \alpha_l^1 J_{\nu+l}^2(\lambda)\right| > A_1 \sqrt{l^2+1}, \qquad \lambda \neq 0. \tag{13}$$

При $\lambda = 0$ условие (13) эквивалентно условию

$$\exists\, \delta > 0, \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}^+ \quad \left|l\beta_l^1 - \alpha_l^1\right| > \delta\sqrt{l^2+1}. \tag{14}$$

Запишем неравенство (10) в терминах $J_{\nu+l}^1(\lambda)$, $J_{\nu+l}^2(\lambda)$:

$$\forall\, l \in \mathbb{Z}^+ \quad \left|\beta_l^1 (\nu + l) J_{\nu+l}^1(\lambda) - \beta_l^1 \nu J_{\nu+l}^2(\lambda) - \alpha_l^1 J_{\nu+l}^2(\lambda)\right| \neq 0. \tag{15}$$

Покажем, что условие (13) следует из условий (14) и (15). Пусть не существует такого A_1, что условие (13) выполняется. Тогда найдется подпоследовательность l_j такая, что

$$\frac{\left|\beta_{l_j}^1 (\nu + l_j) J_{\nu+l_j}^1(\lambda) - \beta_{l_j}^1 \nu J_{\nu+l_j}^2(\lambda) - \alpha_{l_j}^1 J_{\nu+l_j}^2(\lambda)\right|}{\sqrt{l_j^2+1}} \to 0.$$

Поскольку условие (14) выполнено, то

$$\frac{\left|l_j\beta_{l_j}^1 - \alpha_{l_j}^1 - \left(\beta_{l_j}^1 (\nu + l_j) J_{\nu+l_j}^1(\lambda) - \beta_{l_j}^1 \nu J_{\nu+l_j}^2(\lambda) - \alpha_{l_j}^1 J_{\nu+l_j}^2(\lambda)\right)\right|}{\sqrt{l_j^2+1}} \geq$$

$$\geq \frac{\left|l_j\beta_{l_j}^1 - \alpha_{l_j}^1\right|}{\sqrt{l_j^2+1}} - \frac{\left|\beta_{l_j}^1 (\nu + l_j) J_{\nu+l_j}^1(\lambda) - \beta_{l_j}^1 \nu J_{\nu+l_j}^2(\lambda) - \alpha_{l_j}^1 J_{\nu+l_j}^2(\lambda)\right|}{\sqrt{l_j^2+1}} >$$

$$> \delta - \varepsilon > 0.$$

С другой стороны,

$$\left|\left(l_j\beta^1_{l_j}-\alpha^1_{l_j}\right)-\left(\beta^1_{l_j}(\nu+l_j)J^1_{\nu+l_j}(\lambda)-\beta^1_{l_j}\nu J^2_{\nu+l_j}(\lambda)-\alpha^1_{l_j}J^2_{\nu+l_j}(\lambda)\right)\right| =$$

$$= \left| l_j\beta^1_{l_j}\left(J^1_{\nu+l_j}(\lambda)-1\right)+\nu\beta^1_{l_j}\left(J^1_{\nu+l_j}(\lambda)-J^2_{\nu+l_j}(\lambda)\right)-\right.$$

$$\left. -\alpha^1_{l_j}\left(J^2_{\nu+l_j}(\lambda)-1\right)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad l_j\to\infty.$$

Получили противоречие. Предложение 2 доказано.

С помощью предложения 2 можно описать спектр корректной граничной задачи (8).

Предложение 3. *Спектр* $\sigma(L_B)$ *оператора* L_B *корректной граничной задачи* (8) *для уравнения* $\Delta u = g$ *состоит из собственных значений и представляет собой множество* $\bigcup_{l\in\mathbb{N}\cup 0}\Sigma_l$, *где множество* Σ_l *состоит из чисел вида* $-\lambda^2$, *а* $\lambda\neq 0$ — *любой корень уравнения*

$$\beta^1_l\lambda J'_{\nu+l}(\lambda)-\beta^1_l\nu J_{\nu+l}(\lambda)-\alpha^1_l J_{\nu+l}(\lambda) = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Покажем, что $\sigma(L_B)\subseteq\bigcup_{l\in\mathbb{N}\cup 0}\Sigma_l$. Действительно, если $\lambda_0\in\sigma(L_B)$, то $Lv=-\lambda_0^2 v$. Следовательно, задача (8) для L_{λ_0} не корректна, а значит, нарушается условие (10) при $\lambda=\lambda_0$. Наоборот, если λ — нуль уравнения (16) с каким-то l, то с этим l выполнено условие (4), где $a^1_l=\beta^1_l$, $b^1_l=-\alpha^1_l$, поэтому выполнено условие (3) с функциями $\psi_0=\alpha^1_l H^1_l$, $\psi_1=\beta^1_l H^1_l$. Нетрудно придумать гладкую функцию в шаре, следами которой являются $u|_{\partial\Omega}=\psi_0$, $-u'_{\bar\nu}|_{\partial\Omega}=\psi_1$. Такая функция принадлежит пространству $D(L)$, поэтому пара $(\psi_0,\psi_1)\in C(L)$, и по утверждению 1 в силу выполнения условия (3) существует функция $u_{\lambda,l}$ из пространства $\ker L_\lambda$ такая, что функции ψ_0, ψ_1 являются L-следами функции $u_{\lambda,l}$

$$L_{(0)}u_{\lambda,l} = u_{\lambda,l}|_{\partial\Omega} = \alpha^1_l H^1_l, \qquad L_{(1)}u_{\lambda,l} = -(u_{\lambda,l})'_{\bar\nu}|_{\partial\Omega} = \beta^1_l H^1_l.$$

Таким образом, число λ является собственным значением оператора Δ_B с собственным вектором $u_{\lambda,l}$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Все собственные значения оператора* L_B *имеют конечную кратность и точка накопления спектра может быть только на бесконечности.*

Доказательство. Пусть по подпоследовательности l_j $\lambda_j\to\lambda_0$ и

$$\beta^1_{l_j}\lambda_j J'_{\nu+l_j}(\lambda_j)-\beta^1_{l_j}\nu J_{\nu+l_j}(\lambda_j)-\alpha_j l_j J_{\nu+l_j}(\lambda_j) = 0. \tag{17}$$

С ростом j числа l_j стремятся к бесконечности, так как каждая целая функция $\beta\lambda J'_{\nu+l_j}(\lambda)-\nu J_{\nu+l_j}(\lambda)-\alpha J_{\nu+l_j}(\lambda)$ имеет только конечное число нулей в каждом конечном круге в $\mathbb{C}$. Введем в равенство (17) функции $J^1_{\nu+l_j}(\lambda)$ и $J^2_{\nu+l_j}(\lambda)$, как в доказательстве предложения 2. В результате получим

$$\left|(\nu+l_j)\beta^1_{l_j}J^1_{\nu+l_j}(\lambda_0)-\nu\beta^1_{l_j}J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)-\alpha^1_{l_j}J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)\right|\frac{1}{\sqrt{l_j^2+1}} =$$

$$= \left|\frac{(\nu+l_j)\beta^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}\left(J^1_{\nu+l_j}(\lambda_0)-J^1_{\nu+l_j}(\lambda_j)\right)+\frac{\nu\beta^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}\left(J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)-J^2_{\nu+l_j}(\lambda_j)\right)-\right.$$

$$-\frac{\alpha^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}\Big(J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)-J^2_{\nu+l_j}(\lambda_j)\Big)\Bigg| \le \Big|J^1_{\nu+l_j}(\lambda_0)-J^1_{\nu+l_j}(\lambda_j)\Big| +$$

$$+ (\nu+1)\Big|J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)-J^2_{\nu+l_j}(\lambda_j)\Big| \le C\max_{|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon}\Big\{\Big|\Big(J^1_{\nu+l_j}(\lambda)\Big)'\Big| +$$

$$+\Big|\Big(J^2_{\nu+l_j}(\lambda)\Big)'\Big|\Big\}\big|\lambda_0-\lambda_j\big| \le C_1\big|\lambda_0-\lambda_j\big|.$$

Здесь ограниченность max по j следует из вида разложений в ряд Тейлора

$$J^1_m(\lambda) = 1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{1}{m(m+1)}+\ldots; \qquad J^2_m(\lambda) = 1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\ldots.$$

Он оценивается величиной $C|\lambda_0|$. Таким образом, при $j\to\infty$ получаем

$$\left|\frac{(\nu+l_j)\beta^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}J^1_{\nu+l_j}(\lambda_0)-\frac{\nu\beta^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)-\frac{\alpha^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}J^2_{\nu+l_j}(\lambda_0)\right| \to 0.$$

Поскольку величины

$$\frac{l_j\beta^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}},\quad \frac{\alpha^1_{l_j}}{\sqrt{l_j^2+1}}$$

по модулю меньше единицы, то выберем подпоследовательность, по которой каждая из них сходится: первая, скажем, к b, а вторая к a. Перейдем к пределу, используя приведенную выше асимптотику по m. Получаем $|b-a|=0$, хотя из условия корректности (14) следует, что $|b-a|>\delta>0$. Противоречивым оказалось предположение о существовании точек непрерывного спектра (в который, как обычно, включаем собственные значения бесконечной кратности). Значит, спектр $\bigcup_{l\in\mathbb{N}\cup 0}\Sigma_l$ состоит из собственных значений конечной кратности. Предложение 4 доказано.

Здесь уместно отметить неточности в формулировках утверждений, аналогичных предложениям 4 и 6, в работе одного из авторов [1], в которой рассматривается случай $n=2$, собственным значением назван корень λ, а следовало назвать число $-\lambda^2$.

Из предложения 4 следует, что единственной точкой накопления спектра может быть только бесконечность. Из формулы Грина нетрудно получить, что сопряженная к (8) граничная задача имеет вид

$$u|_{\partial\Omega}*\overline{\alpha} + u'_{\bar\nu}|_{\partial\Omega}*\overline{\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что если оператор L_B^{-1} самосопряжен, то он вполне непрерывен в силу его нормальности. Получаем следующее утверждение.

Предложение 5. *Каждая самосопряженная корректная G-инвариантная задача для уравнения Пуассона вполне корректна, т. е. ее разрешающий оператор вполне непрерывен.*

Примером такой задачи является задача Дирихле $\alpha=\delta$ ($\forall k,\ \alpha^1_k=1$), $\beta=0$; задача Неймана $\beta=\delta$ ($\forall k,\ \beta^1_k=1$), $\alpha=0$ на фактор-пространстве по константам; третья краевая задача

$$Au|_{\partial\Omega} + Bu'_{\bar\nu}|_{\partial\Omega} = 0$$

с постоянными вещественными коэффициентами; любая другая задача такого вида, где A и B — дифференциальные операторы с постоянными вещественными коэффициентами и дифференцированием по касательному векторному полю.

Отметим важность предположения о корректности граничной задачи. Конечно, без условия (14) в спектре может находиться любое число точек накопления, и, кроме замкнутости, о спектре ничего сказать нельзя.

Предложение 4 позволяет делать выводы о спектре оператора задачи (8), используя результаты о поведении нулей функций Бесселя. Воспользуемся, например, следующим утверждением.

Утверждение 2 ([14], см. также [11]). *Если A и B вещественны и $\mu > -1$, то функция $AJ_\mu(x) + BxJ'_\mu(x)$ при выполнении условия $A/B + \mu > 0$ имеет счетное число только вещественных нулей, при нарушении этого условия имеется сопряженная пара чисто мнимых нулей и счетное число вещественных.*

Отсюда следует такой факт.

Предложение 6. *Пусть при $n > 2$ коэффициенты α, β корректной граничной задачи* (8) *вещественны (т. е. задача* (8) *самосопряжена). Спектр $\sigma(-L_B)$ оператора $-L_B$ счетен и имеет точку накопления на бесконечности. Он положителен тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, l > 0 \quad \frac{\alpha_l}{\beta_l} < l.$$

Каждое нарушение этого неравенства с изменением l добавляет к спектру одно отрицательное собственное значение.

1. *Бурский В. П.* Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – С. 158 – 169.
2. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. моск. мат. о-ва. – 1952. – № 1. – С. 187 – 246.
3. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 132 с.
4. *Горбачук В. И.* О граничных задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 7 – 11.
5. *Нгуен Куок Зан.* О граничных задачах для уравнения Лапласа в круге // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 6. – С. 763 – 771.
6. *Кочубей А. Н.* О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функц. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 4. – С. 77 – 78.
7. *Бурский В. П.* Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение – область // Докл. АН СССР. – 1989. – **209**, № 5. – С. 1036 – 1039.
8. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
9. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
10. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 331 с.
13. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 279 с.
14. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Т. 1. – 220 с.

Получено 17.07.2000