УДК 519.21

В. В. Петров (Санкт-Петербург. ун-т, Россия)

О ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА*

We obtain some results on the upper limit of a random sequence and the law of iterated logarithm for sums of independent random variables.

Одержано деякі результати про верхню межу випадкової послідовності та закон повторного логарифма для сум незалежних випадкових величин.

В работе исследуется верхний предел последовательности случайных величин и закон повторного логарифма для сумм независимых случайных величин.

Обозначим через Ψ_c множество функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum 1/(n\psi(n))$ сходится.

Теорема. *Пусть* $\{ Y_n ;\, n = 1, 2, \ldots \}$ — *последовательность случайных величин,* $\{ a_n ;\, n = 1, 2, \ldots \}$ — *неубывающая последовательность положительных постоянных, удовлетворяющая условию*

$$a_n \to \infty. \tag{1}$$

Пусть для любого x *из некоторого невырожденного интервала* $1 < x < 1 + \beta$ *имеет место неравенство*

$$\mathrm{P}\Big(\max_{1 \le k \le n} Y_k \ge x a_n \Big) \le \frac{L}{\psi(a_n)} \tag{2}$$

для некоторой постоянной L, *некоторой функции* $\psi \in \Psi_c$ *и всех достаточно больших* n. *Тогда*

$$\limsup \frac{Y_n}{a_n} \le 1 \quad \text{п. н.} \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем п. н. означает „почти наверное"; предельные переходы совершаются при $n \to \infty$.

Этот результат ранее получен в [1] при дополнительном условии $a_{n+1}/a_n \to$ $\to 1$. Более общий по сравнению с [1] результат доказан в [2], где также предполагалось выполненным последнее дополнительное условие. Заметим, что в сформулированной теореме нет предположения о независимости или каком-либо типе зависимости рассматриваемых случайных величин, а также предположения о существовании моментов у этих случайных величин.

Доказательство. Пусть c — произвольное число, удовлетворяющее условию $c > 1$. Используя условие (1), определяем последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ следующим образом: пусть n_1 таково, что $a_{n_1} > 1$; при данном n_{k-1}, $k = 2, 3, \ldots$, определим n_k как наименьшее целое число, для которого $a_{n_k} > c\, a_{n_{k-1}}$. Таким образом,

$$a_{n_k - 1} \le c\, a_{n_{k-1}} < a_{n_k}. \tag{4}$$

Очевидно, $n_{k-1} < n_k$ при любом $k \ge 2$ и $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Неравенство (3) будет доказано, если покажем, что

$$\mathrm{P}\big(Y_n > (1+\varepsilon) a_n \ \text{ б.ч.} \big) = 0 \tag{5}$$

* Выполнена при поддержке грантов РФФИ 99-01-00732 и 97 МЗ-32.

для любого $\varepsilon > 0$. Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда имеем

$$P(Y_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ б.ч.}) \le P\left(\max_{n_{k-1}\le n<n_k} Y_n > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}} \text{ б.ч.}\right) \le$$

$$\le P\left(\max_{n<n_k} Y_n > (1+\varepsilon)a_{n_{k-1}} \text{ б.ч.}\right) \le P\left(\max_{n<n_k} Y_n > \frac{1+\varepsilon}{c}a_{n_k-1} \text{ б.ч.}\right)$$

в силу (4). Пусть δ — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\delta < \varepsilon$. За счет выбора достаточно близкого к единице числа c можно обеспечить выполнение неравенств $(1+\varepsilon)/c > 1+\delta$ и

$$P(Y_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ б.ч.}) \le P\left(\max_{n<n_k} Y_n > (1+\delta)a_{n_k-1} \text{ б.ч.}\right). \tag{6}$$

Принимая во внимание условие (4) и неубывание последовательности $\{a_n\}$, получаем $a_{n_k-1} \ge a_{n_{k-1}} \ge c^{k-2}a_{n_1} \ge c^{k-2}$ для любого $k \ge 2$. Из (2) следует

$$P\left(\max_{n<n_k} Y_n > (1+\delta)a_{n_k-1}\right) \le \frac{L}{\psi\left(a_{n_k-1}\right)} \le \frac{L}{\psi\left(c^{k-2}\right)}.$$

Поэтому

$$\sum_k P\left(\max_{n<n_k} Y_n > (1+\delta)a_{n_k-1}\right) \le \sum_k \frac{L}{\psi\left(c^{k-2}\right)} < \infty$$

в силу условия $\psi \in \Psi_c$ и леммы 1 работы [1], согласно которой ряд $\sum 1/\psi\left(r^k\right)$ сходится для любого числа $r > 1$ при $\psi \in \Psi_c$. Согласно лемме Бореля– –Кантелли имеем

$$P\left(\max_{n<n_k} Y_n > (1+\delta)a_{n_k-1} \text{ б.ч.}\right) = 0$$

для любого $\delta > 0$. Отсюда и из (6) следует (5) для любого $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

В доказанной теореме условие, связанное с неравенством (2), можно заменить более общим условием сходимости ряда

$$\sum_k P\left(\max_{n_{k-1}\le n<n_k} Y_k > x a_{n_k}\right)$$

для любых $x \in I$, $c \in I$, где $I = (1,\ 1+\beta)$ — некоторый невырожденный интервал и $\{n_k\}$ — числовая последовательность, удовлетворяющая неравенствам (4).

Поскольку $\psi(x) = (\ln x)^{1+\delta} \in \Psi_c$ при любом $\delta > 0$, неравенство (2) будет выполнено, если

$$P\left(\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x a_n\right) \le L(\ln a_n)^{-1-\delta} \tag{7}$$

при любом $x > 1$ и некоторых положительных постоянных L и δ.

Рассмотрим некоторые приложения к закону повторного логарифма. Пусть $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями. Положим $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $B_n = \sum_{j=1}^n EX_j^2$. Пусть $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Можно показать, что если выполняется условие

$$\sup_x \left| \mathrm{P}\left(S_n < x B_n^{1/2}\right) - \Phi(x) \right| = O\left((\ln B_n)^{-1-\delta}\right) \tag{8}$$

при некотором $\delta > 0$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} \le 1 \quad \text{п. н.} \tag{9}$$

При дополнительном условии

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1 \tag{10}$$

в [3] было показано, что имеет место равенство

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{11}$$

Условие (10) использовано для (11), однако неравенство (9) справедливо и без этого условия. Соответствующее доказательство использует неравенство Колмогорова и свойства числовой последовательности $\{n_k\}$, определенной с помощью (2), вместо последовательности из [3].

Приведенные результаты остаются справедливыми, если отбросить предположение о существовании каких-либо моментов у независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и считать лишь, что $\{B_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям $B_n \to \infty$ и (8). В [4] показано, что в этой ситуации при дополнительном условии (10) справедливо равенство (11).

В ходе доказательства этих предложений о законе повторного логарифма условие (8) используется лишь для получения неравенства

$$\mathrm{P}\left(S_n \ge x(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}\right) \le (\ln B_n)^{-x^2} \tag{12}$$

для любого x из интервала $(1, 1+\delta)$. Переход от (12) к (7) при $Y_n = S_n$ осуществляется с помощью неравенства Колмогорова для максимума последовательных сумм независимых случайных величин или его обобщения, содержащегося в [5, с. 51–52].

Таким образом, условие (8) можно заменить существенно более слабым условием (12), представляющим собой оценку сверху для вероятностей умеренных уклонений нормированных сумм $Z_n = B_n^{-1/2} S_n$, так как (12) можно записать в виде

$$\mathrm{P}(Z_n \ge x t_n) \le \exp\left\{-\frac{1}{2} x^2 t_n^2\right\}$$

для любого x из некоторого невырожденного интервала $1 < x < 1 + \delta$ и всех достаточно больших n. Здесь $t_n = (2 \ln\ln B_n)^{1/2}$.

1. *Петров В.В.* Некоторые оценки для сумм зависимых случайных величин, имеющие место почти наверное // Зап. научн. сем. Ленинград. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – **55**. – С. 113–116.
2. *Петров В. В.* О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // Там же. – 1980. – **97**. – С. 186–194.
3. *Петров В. В.* О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, № 3. – С. 514–518.
4. *Петров В. В.* Одна теорема о законе повторного логарифма // Там же. – 1971. – **16**, № 4. – С. 715–718.
5. *Petrov V. V.* Limit theorems of probability theory. – Oxford: Univ. Press, 1995. – 292 p.

Получено 14.04.2000