УДК 519.21

Г. Л. Кулініч, О. В. Перегуда (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО

For inhomogeneous systems of stochastic differential Ito equations, we introduce a notion of the local invariance of surfaces and a notion of a local first integral. We obtain results which generally enable one to find invariant surfaces and functionally independent first integrals of stochastic differential equations.

Для неоднорідних систем стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) Іто вводяться поняття локальної інваріантності поверхонь і поняття локального першого інтеграла. Отримано результати, які дають загальні можливості для знаходження інваріантних поверхонь і функціонально незалежних перших інтегралів СДР.

Вступ. Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь (СДР)

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(t, \xi(t))\,dw_k(t), \qquad (1)$$

де $a(t, x) = \left(a_i(t, x), i = \overline{1, n}\right)$, $b_k(t, x) = \left(b_{ik}(t, x), i = \overline{1, n}\right)$ — дійсні невипадкові векторні функції, визначені і неперервно диференційовні в області $[0, \infty) \times \boldsymbol{R}^n$, $(t \geq 0,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$, $w_k(t)$ — незалежні в сукупності одновимірні вінерівські процеси, визначені на ймовірнісному просторі $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, $\xi(t_0) = x_0$, $(t \geq 0$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}))$.

Розглянемо область $Q = [0, \infty) \times D$, де D — певна відкрита область в $\boldsymbol{R}^n$ і нехай $(t_0, x_0) \in Q$. Позначимо через $\tau_Q(t_0, x_0)$ момент першого виходу розв'язку рівняння (1) із області Q, тобто $\tau_Q(t_0, x_0) = \inf\{t \geq t_0 : \xi(t) \notin D\}$, якщо множина тих $t \geq t_0$, для яких $\xi(t) \notin D$, не порожня, і $\tau_Q(t_0, x_0) = \infty$ у протилежному випадку.

Відомо [1], що рівняння (1) має єдиний неперервний майже скрізь (м. с.) сильний розв'язок $\xi(t) = \left(\xi_i(t), i = \overline{1, n}\right)$, який є дифузійним процесом з моментом зупинки $\tau_Q(t_0, x_0)$, вектором переносу $a(t, x)$ та дифузійною матрицею $B(t, x)B^*(t, x)$, де $B(t, x) = (b_{ik}(t, x))$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

Позначимо через $\Gamma_Q(G)$ множину $\Gamma = \{(t, x) : G(t, x) = C\} \subset Q$, де функція $G(t, x)$ визначена в області Q і має неперервні похідні G'_t, G'_{x_i}, G''_{x_i, x_j} в Q, при цьому $\sum_{i=1}^{n}\left(G'_{x_i}\right)^2 > 0$ при $(t, x) \in \Gamma$.

Означення 1. *Множина $\Gamma_Q(G)$ називається локально інваріантною (ЛІ) множиною рівняння* (1), *якщо для всіх $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$ і всіх $t \geq t_0$*

$$[\,G(t, \xi(t)) - G(t_0, x_0)\,]\,\varphi(t) = 0 \quad \text{м. с.}, \qquad (2)$$

де $\varphi(t) = 1$ при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ і $\varphi(t) = 0$ при $t \geq \tau_Q(t_0, x_0)$.

Означення 2. *Функцію $G(t, x)$, яка визначена в області Q і має неперервні похідні G'_t, G'_{x_i}, G''_{x_i, x_j} в Q і для якої виконується рівність* (2) *при всіх $(t_0, x_0) \in Q$, будемо називати ЛПІ (локальним першим інтегралом) рівняння (1) в області Q.*

У пункті 2 роботи [2] отримані результати, які дають загальні можливості знаходження ЛІ множин $\Gamma_D(G) = \{(x) : G(x) = C\} \subset D \subset R^n$ для однорідних СДР, тобто рівнянь вигляду (1), в яких $a(t, x) = a(x)$, $b_k(t, x) = b_k(x)$.

У пункті 1 цієї роботи показано, що аналогічні результати відносно множин

$\Gamma_Q(G)$ мають місце і для рівняння (1) (теореми 1–3). Крім цього, отримані ще одні достатні умови ЛІ певних множин $\Gamma_Q(G)$, в яких $C = 0$, а $G(t, x) \geq 0$, через функції Ляпунова (теорема 4).

У пункті 2 також досліджується випадок, коли функція $G(t, x)$ є ЛПІ рівняння (1) (теореми 5, 6).

Отже, дана робота є продовженням досліджень, які проводились в [2], де наведено історичний огляд результатів з цього напрямку.

1. Інваріантні множини СДР.

Теорема 1. *Для ЛІ множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (1) необхідно, щоб для всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$ виконувалися рівності*

$$(\nabla_x G(t, x), b_k(t, x)) = 0, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$G_t'(t, x) + (\nabla_x G(t, x), a(t, x)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x \cdot, b_k(t, x))^2 G(t, x) = 0, \tag{4}$$

де $\nabla_x \cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \cdot}{\partial x_n} \right)$ — *оператор „набла", $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток*

Доведення. Нехай $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$. Оскільки похідні $G_t'(t, x)$, $G_{x_i}'(t, x)$, $G_{x_i, x_j}''(t, x)$ неперервні в області Q, то для всіх $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ згідно з формулою Іто

$$G(t, \xi(t)) = G(t_0, x_0) + J_1(t) + J_2(t), \tag{5}$$

де

$$J_1(t) = \int_0^t \Big[G_s'(s, \xi(s)) + (\nabla_x G(s, \xi(s)), a(s, \xi(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x \cdot, b_k(s, \xi(s))^2 G(s, \xi(s)) \Big] ds,$$

$$J_2(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t (\nabla_x G(s, \xi(s)), b_k(s, \xi(s)) \, dw_k(s).$$

Якщо множина $\Gamma_Q(G)$ є ЛІ множиною рівняння (1), то за означенням і рівністю (5) маємо, що при всіх $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$

$$J_2(t) = -J_1(t). \tag{6}$$

Процес $J_2(t)$ — неперервний м. с. локальний мартингал [3] з характеристикою

$$\langle J_2(t) \rangle = \int_0^t \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(s, \xi(s)), b_k(s, \xi(s))^2 \, ds,$$

а процес $J_1(t)$ абсолютно неперервний м. с. Тому рівність (6) можлива, якщо при всіх $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$

$$J_1(t) = 0, \qquad J_2(t) = 0. \tag{7}$$

Припустимо, що в деякій точці $(t_*, x_*) \in \Gamma_Q(G)$ функція

$$\psi(t, x) = \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t, x), b_k(t, x))^2 > 0.$$

Із неперервності функції $\psi(t, x)$ і відкритості області Q випливає існування δ-околу $V_\delta(t_*, x_*) \subset Q$, в якому $\psi(t, x) > 0$. Згідно з означенням ЛІ множини $\Gamma_Q(G)$, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $t_0 = t_*$, $x_0 = x_*$. Отже, згідно з припущенням маємо, що при всіх $t_* \le t < \tau$, де τ — момент першого виходу процесу $\xi(t)$ із області $V_\delta(t_*, x_*)$, виконується рівність $\langle J_2(t) \rangle > 0$. Оскільки $t_* \le \tau < \tau_Q(t_*, x_*)$, то приходимо до суперечності, тому що із рівності (7) випливає, що при всіх $t_* \le \tau < \tau_Q(t_*, x_*)$ і $\langle J_2(t) \rangle = 0$.

Тому $\psi(t_*, x_*) = 0$. Отже, має місце рівність (3) для всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$. Подібним міркуванням доводиться і рівність (4).

Теорема 2. *Для того щоб множини* $\Gamma_Q(G)$ *при* $C = G(t_0, x_0)$ *були ЛІ множинами при всіх* $(t_0, x_0) \in Q$, *необхідно та достатньо, щоб рівності* (3) *і* (4) *мали місце при всіх* $(t_0, x_0) \in Q$.

Доведення. *Необхідність* умов (3) і (4) випливає з теореми 1. При доведенні *достатності* скористаємося рівністю (5), із якої згідно з умовами теореми випливає, що при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має місце рівність $G(t, \xi(t)) = G(t_0, x_0)$. Отже, множини $\Gamma_Q(G)$ при $C = G(t_0, x_0)$ є ЛІ множинами при всіх $(t_0, x_0) \in Q$.

Теорема 3. *Для того щоб множина* $\Gamma_Q(G)$ *була ЛІ множиною рівняння* (1) *лише при певних* $C = c_j$, $j = \overline{1, m}$, *досить, щоб існували функції* $F_i(t, x, y)$, $i = 1, 2$, *визначені і неперервні разом із своїми похідними* $\partial F_i(t, x, y)/\partial y$ *в області* $Q \times I$, *де* $I = \{G(t, x) : (t, x) \in Q\}$ *і такі, що при всіх* $(t, x) \in Q$ *мають місце такі рівності:*

1) $$G_t'(t, x) + (\nabla_x G(t, x), a(t, x)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x, b_k(t, x))^2 G(t, x) = F_1(t, x, G(t, x)),$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t,x), b_k(t,x))^2 = F_2^2(t, x, G(t, x)),$$

3) $F_i(t, x, c_j) = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, m}.$

Доведення. Нехай $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$ при $C = c_j$. В рівності (5) для процесу $J_2(t)$ скористаємося зображенням [3]

$$J_2(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(s, \xi(s)), b_k(s, \xi(s)))^2 \right]^{1/2} dw(s),$$

де $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес. Тому для процесу $\eta(t) = G(t, \xi(t))$ при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ маємо рівняння

$$d\eta(t) = F_1(t, \xi(t), \eta(t))\,dt + F_2(t, \xi(t), \eta(t))\,dw(t) \tag{8}$$

із випадковими коефіцієнтами. Рівняння (8) при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має єдиний розв'язок [4], зокрема точка $y = c_j$ — стаціонарна точка цього рівняння. Тому $\eta(t) = c_j$ при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$. Отже, множина $\Gamma_Q(G)$ при $C = c_j$ є ЛІ множиною рівняння (1).

Зауважимо, що ця теорема дає метод знаходження явного вигляду інваріантних множин, який вперше був запропонований в роботі [5].

Теорема 4. *Для того щоб множина* $\Gamma_Q(G)$, *де* $C = 0$, *а* D *— обмежена і замкнена, була ЛІ множиною рівняння* (1), *достатньо, щоб при всіх* $(t, x) \in Q$ *виконувались наступні умови:*

1) $G(t, x) \geq 0 \quad (G(t, x) = 0$ *при* $(t, x) \in \Gamma_Q(G))$;

2) $G_t'(t, x) + (\nabla_x G(t, x), a(t, x)) + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x, b_k(t, x))^2 G(t, x) \leq 0.$

Доведення. Розглянемо довільну точку $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$, $G(t_0, x_0) = 0$. Із рівності (5) маємо, що при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ виконується нерівність

$$G(t, \xi(t)) \leq J_2(t). \tag{9}$$

Позначимо через $\tau(t) = \min(t, \tau_Q(t_0, x_0))$. Оскільки $\tau_Q(t_0, x_0)$ — марковський момент, то і $\tau(t)$ теж марковський момент. Крім цього, при $s \leq \tau(t)$ підінтегральний вираз у $\langle J_2(\tau(t)) \rangle$ обмежений, де $\langle J_2(t) \rangle$ — характеристика мартингала $J_2(t)$. Тому $\mathrm{E}\langle J_2(\tau(t)) \rangle < \infty$, а значить [4], $\mathrm{E} J_2(\tau(t)) = 0$.

Отже, із (8) маємо, що $\mathrm{E} G(\tau(t), \xi(\tau(t)) \leq 0$. Значить, $G(\tau(t), \xi(\tau(t)) = 0$ м. с. Оскільки $\tau(t) \to \tau_Q(t_0, x_0)$ при $t \to \infty$, а функція $G(t, x)$ неперервна в Q, то і $G(\tau_Q(t_0, x_0), \xi(\tau_Q(t_0, x_0)) = 0$ м. с.

Оскільки

$$G(\tau(t), \xi(\tau(t))) =$$
$$= G(t, \xi(t))\, \chi_{t < \tau_Q(t_0, x_0)} + G(\tau_Q(t_0, x_0) \xi(\tau_Q(t_0, x_0)))\chi_{t \geq \tau_Q(t_0, x_0)},$$

то $G(t, \xi(t))\, \chi_{t < \tau_Q(t_0, x_0)} = 0$ м. с. Із довільності точки (t_0, x_0) випливає доведення теореми.

Зауважимо, що метод знаходження інваріантних множин СДР Іто з допомогою функцій Ляпунова вперше запропоновано Р.З. Хасьмінським [6].

2. Перші інтеграли СДР.

***Зауваження* 1.** Якщо виконуються умови (3), (4) для всіх $(t, x) \in Q$, то функція $G(t, x)$ є ЛПІ рівняння (1). Справді, в цьому випадку згідно з теоремою 2 при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має місце рівність $G(t, \xi(t)) = G(t_0, x_0)$ для всіх $(t_0, x_0) \in Q$.

Теорема 5. *Нехай ранг матриці* $B(t, x)$ *рівняння* (1) *дорівнює* $r \leq n$ *при всіх* $(t, x) \in Q$. *Тоді рівняння* (1) *може мати лише* $n + 1 - r$ *функціонально незалежних ЛПІ.*

Доведення. Оскільки ранг матриці $B(t, x)$ дорівнює r при всіх $(t, x) \in Q$, то максимальна кількість лінійно незалежних векторів серед сім'ї векторів $b_k(t, x)$, $k = \overline{1, n}$, дорівнює r при всіх $(t, x) \in Q$. Якщо існує $(G_i(t, x),\ i = \overline{1, m})$ сукупність ЛПІ рівняння (1), то згідно з необхідною умовою (3) скалярні добутки $(\nabla_x G_i(t, x), b_k(t, x)) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, для всіх $(t, x) \in Q$. Оскільки $Q \subset R^{n+1}$, то серед сукупності векторів $(\nabla_x G_i(t, x),\ i = \overline{1, m},\ b_k(t, x)\ k = \overline{1, n})$, може бути лише $n + 1$ лінійно незалежний. Враховуючи, що серед цієї сукупності є r лінійно незалежних векторів $b_k(t, x)$, отримуємо, що серед векторів $(\nabla_x G_i(t, x),\ i = \overline{1, m})$ може бути лише $n + 1 - r$ лінійно незалежних. Не обмежуючи загальності, припустимо, що в точці $(t, x) \in Q$ лінійно незалежні вектори $(\nabla_x G_i(t, x),\ i = \overline{1, n+1-r})$.

Відомо [7], що із цієї лінійної незалежності випливає лінійна незалежність їх градієнтів $(\nabla G_i(t, x),\ i = \overline{1, n+1-r})$, із якої в свою чергу випливає функціональна незалежність функцій $G_i(t, x)$, $i = \overline{1, n+1-r}$, в точці (t, x). Із довільності точки (t, x) випливає доведення теореми.

Теорема 6. *Нехай* $G_1(t, x), G_2(t, x), \ldots, G_m(t, x)$ — *ЛПІ рівняння* (1). *Якщо функція* $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$, *де* $y_i \in \{G_i(t, x): (t, x) \in Q\}$, *двічі неперервно диференційовна, то функція* $\psi(t, x) = \Phi(G_1(t, x), G_2(t, x), \ldots, G_m(t, x))$ *також є ЛПІ рівняння* (1).

Доведення. Зрозуміло, що функція $\psi(t, x)$ визначена в області Q і в тій же області має неперервні похідні $\psi'_t(t, x)$, $\psi'_{x_i}(t, x)$, $\psi''_{x_i, x_j}(t, x)$. Оскільки $G_i(t, x)$ є ЛПІ, то при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має місце рівність $G_i(t, \xi(t)) = G_i(t_0, x_0)$, $i = \overline{1, m}$, для всіх $(t_0, x_0) \in Q$. Отже, при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ $\psi(t, \xi(t)) = \psi(t_0, x_0)$ для всіх $(t_0, x_0) \in Q$.

Зауваження 2. Для однорідного рівняння (1) із результатів роботи [2] випливає:

1. Якщо існує ЛІ множина $\Gamma_D(G) = \{x: G(x) = C\} \subset D$ рівняння (1), то в точках цієї множини матриця $B(x)$ рівняння (1) вироджена.

2. Якщо існує ЛПІ $G(x)$ рівняння (1), то він є ЛПІ одночасно і для детермінованих систем диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_k(t) = b_k(x_k(t)), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{10}$$

тобто в цьому випадку $(\nabla G(x), b_k(x)) = 0$ для всіх $x \in D \subset R^n$ при $k = \overline{1, n}$ і, значить, ЛПІ однорідного рівняння (1) потрібно шукати серед ЛПІ детермінованих систем (10)

Зауваження 3. Із доведення теореми 5 випливає, що для однорідного рівняння (1) може існувати лише $n - r$ функціонально незалежних ЛПІ $G_i(x)$ в області D.

Приклади. **1.** Нехай у рівнянні (1), $n = 2$,

$$a_1(t, x) = \left[-\frac{1}{2} g^2(t,x) + \varepsilon(t)\right] x_1 + q(t, x) x_2,$$

$$a_2(t, x) = \left[-\frac{1}{2} g^2(t,x) + \varepsilon(t)\right] x_2 - q(t, x) x_1,$$

$$b_{11}(t, x) = g(t, x) x_2, \qquad b_{21}(t, x) = -g(t, x) x_1,$$

$$b_{12}(t, x) = 0, \qquad b_{22}(t, x) = 0,$$

де $g(t, x)$, $q(t, x)$, $\varepsilon(t)$ — неперервні невипадкові функції (це частинний випадок рівнянь, які розглядаються в роботі [8], де досліджується поведінка модуля та аргументу розв'язку рівняння). Якщо розглянути функцію

$$G(t, x) = x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 \exp\left\{2\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds\right\}$$

і область $D = \left\{x: |x|^2 < \alpha^2 + \beta^2\right\}$, $\beta \ne 0$, то в цьому випадку виконуються умови теореми 3 при $F_1(t, x, y) = 2\varepsilon(t) y$, $F_2(t, x, y) \equiv 0$.

Отже, згідно з теоремою 3, множина

$$\Gamma_Q(G) = \left\{(t, x): x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 \exp\left\{2\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\, ds\right\}\right\}$$

є локально інваріантною множиною рівняння (1) ($(t_0, x_0) \subset \Gamma_Q(G)$, якщо $\alpha^2 = |x_0|^2$). Легко впевнитися, якщо розглянути функцію $G_1(t, x) = G^2(t, x)$, що вона при $\varepsilon(t) \le 0$ є функцією Ляпунова в області Q і для неї виконується умова теореми 4, згідно з якою при $\varepsilon(t) \leq 0$ ми отримаємо той же висновок про локальну інваріантність множини $\Gamma_Q(G)$.

Зрозуміло, що із аналізу поведінки інтеграла $\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\,ds$ ми в цьому випадку можемо проводити якісний аналіз поведінки розв'язку на фазовій площині X_1OX_2 (див. [8]).

2. Розглянемо детерміновану систему диференціальних рівнянь $\dot{x}(t) = b_1(x(t))$, де $b_1(x) = (x_1(x_2 - x_3), x_2(x_3 - x_1), x_3(x_1 - x_2))$.

Ця система має два перших інтеграли $G_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$ і $G_2(x) = x_1x_2x_3$ (див. [7]), які визначені в усіх точках R^3. Якщо розглянути область $D = (x: x_1x_2x_3(x_1 - x_3) \neq 0, |x| < C)$, то легко довести, що в ній $G_1(x)$ і $G_2(x)$ функціонально незалежні.

Далі розглянемо рівняння (1) з заданим вектором $b_1(x)$ і вектором $b_2(x) \equiv 0$, $b_3(x) \equiv 0$. Із умови (4) маємо

$$a_1(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left[a_2(x)x_1(x_3 - x_2) - x_1x_2x_3(x_1 - x_3)^2\right],$$

$$a_3(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left[a_2(x)x_3(x_2 - x_1) + x_1x_2x_3(x_1 - x_3)^2\right],$$

де $a_2(x)$ — довільна неперервна функція, $\Delta(x) = x_2(x_1 - x_3)$.

Отже, СДР з заданими $b_k(x)$ і $a(x)$ в області D має два функціонально незалежні ЛПІ. Тому розв'язок СДР в області D дифундує по лінії перетину поверхонь $(G_1(x) = G_1(x_0) \cap G_2(x) = G_2(x_0))$, тобто по фазовій траєкторії детермінованого рівняння $\dot{x}(t) = b_1(x(t))$.

Якщо розглянути рівняння (1) з заданим вектором $b_1(x)$, $b_2(x) = (1, 1, -2)$, $b_3(x) \equiv 0$, а вектор переносу $a(x)$ визначити із умови (4), то отримаємо СДР з одним ЛПІ $G_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$. Подібно, якщо взяти вектори $b_1(x)$, $b_2(x) = (x_1, x_2, -2x_3)$, $b_3(x) \equiv 0$, а вектор $a(x)$ визначити з умови (4), то отримаємо СДР з одним ЛПІ $G_2(x) = x_1x_2x_3$. Зрозуміло, як будувати СДР, які не мають жодного ЛПІ, і як подібні побудови проводити для R^n.

1. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
2. *Kulinich G. L., Peregudа O. V.* Phase picture of the diffusion processes with the generate diffusion matrices // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1997. – **5**, № 3. – P. 203–216.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процесов: В 3-х т. – М.: Наука, 1975. – Т. 3. – 496 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 353 с.
5. *Бабчук В. Г., Кулинич Г. Л.* Об одном методе нахождения инвариантных множеств стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**, № 2. – С. 454.
6. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 366 с.
7. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 1994. – 456 с.
8. *Kulinich G. L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbetions on the phase velocity of harmonic oscillator // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1995. – **3**, № 2. – P. 141 – 152.

Одержано 09.06.2000