УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ФИНИТНО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ МЕРЫ НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We consider structure of orthogonal polynomials in the space $L_2(B, \mu)$ for a probabilistic measure μ on the Banach space B. These polynomials are described in terms of the Hilbert – Schmidt kernels on a space of square integrable linear functionals. We study properties of functionals of this sort. We consider some probabilistic measures as generalized functionals on the space (B, μ).

Розглядається структура ортогональних многочленів у просторі $L_2(B, \mu)$ для ймовірнісної міри μ на банаховому просторі B. Ці поліноми описано в термінах ядер Гільберта–Шмідта на просторі квадратично інтегровних лінійних функціоналів. Вивчаються властивості таких функціоналів. Деякі ймовірнісні міри розглядаються як узагальнені функціонали на просторі (B, μ).

1. Введение. Пусть B — сепарабельное банахово пространство, μ — вероятностная мера на σ-алгебре борелевских подмножеств B. Эта статья посвящена свойствам измеримых полиномов относительно меры μ и соответствующим ортогональным разложениям не только квадратично интегрируемых по мере μ функционалов, но и других вероятностных мер. Иными словами, в данной работе некоторые меры рассматриваются как обобщенные функционалы на пространстве с мерой (B, μ). В случае гауссовской меры μ соответствие между некоторыми вероятностными мерами и обобщенными функционалами хорошо известно [1, 2]. Отличие рассматриваемого случая от гауссовского состоит в том, что условия дифференцируемости меры μ заменены моментными ограничениями, а в качестве аналога пространства допустимых сдвигов используется пространство измеримых линейных функционалов меры μ. Отметим, что для произвольной меры μ ортогональное разложение для плотности при квадратично интегрируемом преобразовании пространства описано И. И. Гихманом и А. В. Скороходом [3].

2. Пространство квадратично интегрируемых линейных функционалов. Пусть мера μ имеет слабые моменты любого порядка:

$$\forall \varphi \in B^*, \quad p > 0 : \int_B |\langle \varphi, u\rangle|^p \mu(du) < +\infty. \tag{1}$$

Здесь $\langle \varphi, u\rangle$ — действие функционала $\varphi \in B^*$ на $u \in B$. Пусть

$$\forall \varphi \in B^* : \int_B \langle \varphi, u\rangle \mu(du) = 0. \tag{2}$$

При выполнении (1) пространство B^* может быть естественным образом вложено в $L_p(B, \mu)$ при каждом $p \ge 1$. Это вложение будет инъективным, если предположим, что линейная оболочка $\operatorname{supp}\mu$ плотна в B (или, что то же самое, линейный носитель μ совпадает со всем B). Далее считаем, что μ имеет указанные свойства. Обозначим через $\mathcal{H}_p$ (или $\mathcal{H}_p^\mu$ в некоторых случаях) замыкание B^* в $L_p(B, \mu)$. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Для каждого $p \ge 1$ вложение B^* в $L_p(B, \mu)$ является компактным оператором.*

Доказательство. Согласно теореме о замкнутом графике

$$\forall p \ge 1 \quad \exists c_p > 0 : \forall \varphi \in B^* \quad \int_B |\langle \varphi, u\rangle|^p \mu(du) \le c_p \|\varphi\|, \tag{3}$$

где $\|\varphi\|$ — норма φ в B^*. Согласно теореме Банаха–Алаоглу достаточно проверить, что из условия

$$\forall u \in B : \langle \varphi_n, u \rangle \to 0, \quad n \to \infty,$$

следует

$$\int_B |\langle \varphi_n, u \rangle|^p \mu(du) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Это следствие из (3) и выполненного соотношения

$$\sup_{n \geq 1} \| \varphi_n \| < +\infty.$$

Лемма доказана.

Пространство $\mathcal{H}_p$ для $p > 1$ можно рассматривать как подмножество B в силу следующей леммы из [4].

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_p(B, \mu)$, $p > 1$. *Тогда существует единственный элемент* $x_f \in B$ *такой, что*

$$\forall \varphi \in B^* : \langle \varphi, x_f \rangle = \int_B f(u) \langle \varphi, u \rangle \mu(du).$$

Другими словами, эта лемма означает, что B-значная функция $B \ni u \mapsto f(u)u$ интегрируема по Петтису и x_f — соответствующий интеграл.

Зафиксируем теперь $p > 1$ и определим линейное отображение j_p из $\mathcal{H}_p$ в B согласно формуле

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}_p : j_p(\varphi) = x_\varphi \in B.$$

Лемма 3. j_p — *Компактный линейный оператор.*

Эта лемма следует из леммы 1 и теоремы Банаха–Алаоглу.

Обозначим образ $j_p(\mathcal{H}_p)$ через H_p. Рассмотрим H_2. Легко проверить, что j_2 (и j_p при $p \geq 2$) является инъекцией. Поэтому можно определить на H_2 структуру гильбертова пространства согласно формулам

$$\forall u, v \in H_2 : (u, v) := \int_B \langle j_2^{-1}(u), x \rangle \langle j_2^{-1}(v), x \rangle \mu(dx),$$

$$|u| = \sqrt{(u, u)}.$$

Здесь $j_2^{-1}(u)$, $j_2^{-1}(v)$ не обязательно лежат в B^*, это лишь элементы $\mathcal{H}_2$. Но поскольку $\mathcal{H}_2$ — замыкание B^* в $L_2(B, \mu)$, то элементы $\mathcal{H}_2$ естественно называть квадратично интегрируемыми линейными функционалами и сохранить для них $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следующий факт будет необходим для дальнейшего.

Лемма 4. *Для всякой* $f \in L_2(B, \mu)$ *существует единственный* $h \in H_2$ *такой, что*

$$h = \int_B f(u) u \mu(du).$$

Доказательство. Пусть ψ — проекция f на $\mathcal{H}_2$ в $L_2(B, \mu)$. Тогда для всякого $\varphi \in B^*$:

$$\left\langle \varphi, \int_B f(u) u \mu(du) \right\rangle = \int_B f(u) \langle \varphi, u \rangle \mu(du) =$$

$$= \int_B \langle \psi, u \rangle \langle \varphi, u \rangle \mu(du) = \left\langle \varphi, \int_B \langle \psi, u \rangle u \mu(du) \right\rangle.$$

Следовательно,

$$\int_B f(u)u\mu(du) = \int_B \langle\psi, u\rangle u\mu(du) = h \in H_2.$$

Единственность h легко проверить. Лемма доказана.

Оказывается, что элементы H_2 — это те направления, вдоль которых мера μ в некотором смысле нелинейна. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, нам понадобятся дополнительные построения. Пусть $h \in B$, $h \neq 0$. Пространство B можно представить как прямую сумму одномерного подпространства $L_h = \{ th : t \in \mathbb{R} \}$ и некоторого подпространства B_1:

$$B = B_1 \oplus L_h. \tag{4}$$

Соответственно этому разложению существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор $\pi : B \mapsto B_1 \times \mathbb{R}$ такой, что

$$\forall u \in B \quad \pi(u) = (\pi_1(u), \pi_2(u)), \quad \pi_1(u) \in B_1, \quad \pi_2(u) \in \mathbb{R},$$

$$\forall (u_1, t) \in B_1 \times \mathbb{R} : \pi^{-1}(u_1, t) = u_1 + th.$$

Меру μ можно дезинтегрировать [5]. Существует регулярное семейство вероятностных мер $\{\mu(u_1, \cdot), u_1 \in B_1\}$ на $\mathbb{R}$ такое, что для всякого борелевского $\Delta \subset B$

$$\mu(\Delta) = \int_{B_1} \mu(u_1, \{t: (u_1, t) \in \pi(\Delta)\})\mu_1(du_1), \tag{5}$$

где $\mu_1 = \mu\pi_1^{-1}$. Заметим, что μ_1 и все меры $\mu(u_1, \cdot)$, $u_1 \in B_1$, имеют слабые моменты (для мер $\mu(u_1, \cdot)$ просто моменты) любого порядка.

Обозначим

$$m_1(u_1) = \int_{\mathbb{R}} t\mu(u_1, dt),$$

$$\sigma_1^2(u_1) = \int_{\mathbb{R}} (t - m_1(u_1))^2 \mu(u_1, dt).$$

Теорема 1. *Ненулевой элемент $h \in B$ не входит в H_2 тогда и только тогда, когда $m_1 \in \mathcal{H}_1^2$, $\sigma_1^2 = 0 \pmod{\mu_1}$. Здесь $\mathcal{H}_1^2 = \mathcal{H}_2^{\mu_1}$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены условия теоремы. Предположим, что $h \in H_2$. Тогда существует $f \in L_2(B, \mu)$ такая, что

$$h = \int_B f(u)u\mu(du).$$

Используя (5), получаем

$$h = \int_{B_1} u_1 \int_{\mathbb{R}} f(u_1 + th)\mu(u_1, dt)\mu_1(du_1) + \int_{B_1}\int_{\mathbb{R}} tf(u_1 + th)\mu(u_1, dt)\mu_1(du_1)h, \tag{6}$$

где в правой части стоит интеграл Петтиса. Поскольку $\mu(u_1, \cdot) = \delta_{m_1(u_1)}$ для μ_1-почти всех $u_1 \in B_1$, то из (6) следует

$$h = \int_{B_1} u_1 f(u_1 + m_1(u_1))m_1(du_1) + \int_{B_1} f(u_1 + m_1(u_1))m_1(u_1)\mu_1(du_1)h. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\int_{B_1} u_1 f(u_1 + m_1(u_1))\mu_1(du_1) \in B_1.$$

Поэтому из (7) имеем

$$\int_{B_1} u_1 f(u_1 + m_1(u_1))\mu_1(du_1) = 0.$$

Следовательно, для каждого $\psi \in B_1^*$:

$$\int_{B_1} \langle \psi, u_1 \rangle f(u_1 + m_1(u_1))\mu_1(du_1) = 0.$$

Аналогичное соотношение верно для всех элементов $\mathcal{H}_2^{\mu_1}$, в частности,

$$\int_{B_1} f(u_1 + m_1(u_1)) m_1(u_1)\mu_1(du_1) = 0.$$

Таким образом, $h = 0$.

Необходимость. Пусть хотя бы одно из условий не выполнено. Докажем, что в этом случае существует функция $f \in L_2(B, \mu)$, для которой

$$h = \int_B f(u) u \mu(du). \tag{8}$$

Определим

$$f(u_1 + th) = \alpha(u_1) + \beta(u_1)(t - m_1(u_1)),$$

где измеримые функции α, β выберем так, чтобы выполнялось (8). Аналогично предыдущим рассуждениям (8) равносильно тому, что

$$\forall \psi \in B_1^*: \int_{B_1} \alpha(u_1)\langle \psi, u_1 \rangle \mu_1(du_1) = 0,$$

$$\int_{B_1} \left[\beta(u_1)\sigma_1^2(u_1) + \alpha(u_1) m_1(u_1) \right] \mu_1(du_1) = 1.$$

Если $\sigma_1^2 = 0 (\operatorname{mod} \mu_1)$, то в качестве α выберем ортогональную к $\mathcal{H}_1^2$ составляющую m_1, нормированную так, чтобы

$$\int_{B_1} \alpha(u_1)^2 \mu_1(du_1) = 1,$$

а β положим равным 0. Если же $\mu_1\left\{ u_1 : \sigma_1^2(u_1) > 0 \right\} > 0$, то определим $\alpha = 0$, а β положим равным такой постоянной c, чтобы

$$c \int_{B_1} \sigma_1^2(u_1)\mu_1(du_1) = 1.$$

Таким образом, нарушение хотя бы одного из условий теоремы приводит к включению $h \in H_2$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые следствия и примеры использования теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $x \in B$, $x \neq 0$, — направление непрерывности меры μ. Тогда $x \in H_2$.*

Доказательство. Напомним, что вектор x называется направлением непрерывности меры μ, если для всякого борелевского $\Delta \subset B$ функция

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mu(\Delta + tx)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть $B = B_1 \oplus L_x$, μ_1, $\{ \mu(u_1, \cdot), u_1 \in B_1 \}$ — разложение пространства B и меры μ (какое-либо), построенное так, как описано выше. Тогда из условия следует очевидным образом, что

$$\mu\left\{u_1 : \sigma_1^2(u_1) > 0\right\} > 0.$$

Отсюда $x \in H_2$.

Следствие 2. *Пусть* $x \in B$, $x \neq 0$, *— допустимый сдвиг для меры* μ. *Тогда* $x \in H_2$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Теперь переформулируем теорему 1 в терминах математической статистики. Рассмотрим (B, μ) как вероятностное пространство. Пусть $h \notin H_2$, а функционал $\varphi \in B^*$ таков, что $\langle \varphi; h \rangle = 1$. Определим множество в B^*

$$h^{\perp} = \left\{\psi \in B^* : \langle \psi, h \rangle = 0\right\}.$$

Следствие 3. *Наилучшая оценка* φ *в среднем квадратическом по известным величинам из* $h^{\perp}$ *является линейной и точной.*

Доказательство. Рассмотрим разложение $B = B_1 \oplus L_h$, μ_1, $\{\mu(u_1, \cdot), u_1 \in \in B_1\}$, построенное по вектору h. При таком представлении пространства B σ-алгебра, порожденная множеством случайных величин $h^{\perp}$, — σ-алгебра множеств вида

$$\tilde{\Delta} = \{(u_1, t) : u_1 \in \Delta_1, t \in \mathbb{R}, \Delta_1 \in \mathcal{B}(B_1)\},$$

где $\mathcal{B}(B_1)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств B_1. Кроме того,

$$\langle \varphi, (u_1, t) \rangle = t, \quad (u_1, t) \in B.$$

Следовательно, наилучшая в среднем квадратическом оценка φ при известных функциях из $h^{\perp}$ равна m_1. Согласно условию $h \notin H_2$. Следовательно, $m_1 \in \in \mathcal{H}_1^2$, т. е. является линейной оценкой. При этом

$$\int_B (\langle \varphi, (u_1, t) \rangle - \langle m_1, u_1 \rangle)^2 \mu(du_1, dt) = \int_{B_1} \sigma_1^2(u_1) \mu_1(du_1) = 0.$$

Утверждение доказано.

3. Строение ортогональных многочленов. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество всех конечномерных многочленов, заданных на B, а через $\overline{\mathcal{P}_n}$ — замыкание $\mathcal{P}_n$ в $L_2(B, \mu)$, $n \geq 0$. Пусть $\mathcal{K}_n$ — ортогональное дополнение $\overline{\mathcal{P}_n}$ в $\overline{\mathcal{P}_{n+1}}$, $n \geq 0$. Далее считаем, что мера μ удовлетворяет следующему условию [3]. Для каждого $\varphi \in B^*$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что характеристический функционал $\hat{\mu}(t\varphi)$ меры μ аналитический по $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$. При выполнении этого условия множество всех конечномерных многочленов плотно в $L_2(B, \mu)$. Таким образом, имеет место представление $L_2(B, \mu)$ в виде прямой суммы ортогональных подпространств

$$L_2(B, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k.$$

Цель данного пункта — описание структуры элементов $\{\mathcal{K}_k, k \geq 1\}$ (пространство $\mathcal{K}_0$ очевидным образом совпадает с $\mathbb{R}$). Отметим, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_2$. Поэтому между элементами $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{H}_2$ можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее норму так, как это сделано выше. Следовательно, можно считать, что $\mathcal{K}_1 = H_2$. Пусть теперь $n > 1$. Рассмотрим конечномерную n-линейную непрерывную симметричную форму A_n на B. Обозначим через J_n проектор в $L_2(B, \mu)$ на $\mathcal{K}_n$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}_n$ — замыкание в $L_2(B, \mu)$

множества элементов вида $J_n A_n$. Поскольку пространство H_2 непрерывно вложено в B согласно лемме 3, то A_n непрерывна на H_2. Поэтому A_n можно рассматривать как элемент симметричной части тензорной степени $H_2^{\oplus n}$. Обозначим через $|\cdot|$ норму в $H_n^{\oplus n}$.

Определение 1 [6]. *Мера* μ *называется полиномиально невырожденной, если существуют последовательности* $\{c_n, n \geq 0\}$ *и* $\{C_n, n \geq 0\}$ *положительных чисел такие, что для всякой конечномерной* n*-линейной симметричной непрерывной формы* A_n *на* B *справедливо неравенство*

$$c_n |A_n|_n^2 \leq \int_B (J_n A_n)^2(x)\mu(dx) \leq C_n |A_n|_n^2. \tag{9}$$

Для полиномиально невырожденной меры элементы $\mathcal{K}_n$ можно отождествить с элементами симметричной части $H_2^{\oplus n}$, $n \geq 1$.

Приведем примеры полиномиально невырожденных мер.

Лемма 5. *Пусть мера* μ *полиномиально невырождена, а мера* ν *такова, что* $\nu \sim \mu$ *и*

1) $0 < a_1 = \operatorname{ess\,inf} \dfrac{d\nu}{d\mu} \leq a_2 = \operatorname{ess\,sup} \dfrac{d\nu}{d\mu} < +\infty$;

2) *среднее значение* ν *равно* 0.

Тогда ν *полиномиально невырождена.*

Доказательство. Обозначим через H_2^μ $\left(\mathcal{H}_2^\mu\right)$ и H_2^ν $\left(\mathcal{H}_2^\nu\right)$ пространства H_2 $(\mathcal{H}_2)$, построенные так, как в п.1, по мерам μ и ν соответственно. Проверим, что H_2^μ и H_2^ν совпадают как подмножества B. Действительно, пусть $h \in H_2^\mu$. Тогда, по определению, существует $f \in L_2(B, \mu)$, для которой

$$h = \int_B f(u)u\mu(du).$$

Обозначим $p = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ и рассмотрим функцию $g = f/p \in L_2(B, \nu)$. Нетрудно проверить, что

$$h = \int_B g(u)u\nu(du).$$

Поэтому $h \in H_2^\nu$. Аналогично $H_2^\nu \subset H_2^\mu$. Докажем теперь, что гильбертовы нормы на $H_2^\nu = H_2^\mu$ эквивалентны. Пусть $h \in H_2^\mu = H_2^\nu$ и

$$h = \int_B \langle \varphi_\mu, u \rangle u\mu(du),$$

$$h = \int_B \langle \varphi_\nu, u \rangle u\nu(du),$$

где $\varphi_\mu \in H_2^\mu$, $\varphi_\nu \in H_2^\nu$. Тогда

$$|h|_\mu^2 = \int_B \langle \varphi_\mu, u \rangle^2 \mu(du),$$

$$|h|_\nu^2 = \int_B \langle \varphi_\nu, u \rangle^2 \nu(du).$$

Поскольку

$$h = \int_B \frac{\langle \varphi_\mu, u \rangle}{p(u)} u \nu(du),$$

то, согласно доказательству леммы 4,

$$|h|_\nu^2 \le \int_B \frac{\langle \varphi_\mu, u \rangle^2}{p(u)^2} \nu(du) = \int_B \frac{\langle \varphi_\mu, u \rangle^2}{p(u)^2} \mu(du) \le \frac{1}{a_1} |h|_\mu^2.$$

Аналогично

$$|h|_\mu^2 \le a_2 |h|_\nu^2.$$

Требуемая эквивалентность доказана.

Теперь утверждение леммы получается стандартным образом с учетом того, что тождественное отображение при выполнении условий леммы является гомеоморфизмом между $L_2(B, \mu)$ и $L_2(B, \nu)$.

Лемма 6. *Пусть мера* ν — *нормированное сужение гауссовской меры* μ *на открытый шар* $B(0, r)$ *радиуса* r *в* B *с центром в* 0. *Предположим, что исходная мера* μ *имеет нулевое среднее значение и* $\operatorname{supp} \mu = B$. *Тогда* $H_2^\mu = H_2^\nu$ *и соответствующие нормы эквивалентны.*

Доказательство. Прежде всего определим структуру пространства H_2^ν. Пусть $\{\varphi_n, n \ge 1\}$ — последовательность элементов B^*, фундаментальная в $L_2(B, \nu)$, т. е.

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{B(0,r)} (\langle \varphi_n, u \rangle - \langle \varphi_m, u \rangle)^2 \mu(du) = 0.$$

Тогда [7] существует $\psi \in H_2^\mu$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_B (\langle \varphi_n, u \rangle - \langle \psi, u \rangle)^2 \mu(du) = 0.$$

Таким образом, пространство $\mathcal{H}_2^\nu$ состоит из сужений на $B(0, r)$ элементов $\mathcal{H}_2^\mu$ и каждый элемент $\mathcal{H}_2^\nu$ продолжается однозначно до элемента $\mathcal{H}_2^\mu$. Снова, используя равносильность сходимости в среднем квадратическом сходимости в среднем квадратическом на $B(0, r)$ для элементов $\mathcal{H}_2^\mu$ [7], получаем, что вышеуказанное соответствие между $\mathcal{H}_2^\nu$ и $\mathcal{H}_2^\mu$ взаимно непрерывно. Рассмотрим теперь пространство H_2^ν. Очевидно, что $H_2^\nu \subset H_2^\mu$. Проверим справедливость обратного включения. Для $f \in L_2(B, \mu)$ покажем, что

$$h = \int_B f(u) u \mu(du) \in H_2^\nu.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского и ранее доказанному

$$\forall \varphi \in B^* : \left| \int_B f(u) \langle \varphi, u \rangle \mu(du) \right| =$$

$$= |\langle \varphi, h \rangle| \le \sqrt{\int_B f^2(u) \mu(du) \int_B \langle \varphi, u \rangle^2 \nu(du)} \le C \int_{B(0,r)} \langle \varphi, u \rangle^2 \nu(du).$$

Поэтому существует $\psi \in \mathcal{H}_2^\nu$, для которого

$$\forall \varphi \in B^* : \langle \varphi, h \rangle = \int_{B(0,r)} \langle \varphi, u \rangle \langle \psi, u \rangle \nu(du),$$

т. е.

$$h = \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi, u \rangle u \nu(du).$$

Следовательно, $H_2^{\nu} = H_2^{\mu}$. Проверим, что нормы в H_2^{ν} и H_2^{μ} эквивалентны. Действительно, пусть

$$h = \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle u \nu(du) = \int\limits_{B} \langle \psi_{\mu}, u \rangle u \mu(du).$$

По определению меры ν

$$\int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle u \nu(du) = \frac{1}{\mu(B(0,r))} \int\limits_{B} \langle \psi_{\nu}, u \rangle u \mu(du).$$

Следовательно,

$$|h|_{\mu}^2 \le \frac{1}{\mu(B(0,r))^2} \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle^2 \mu(du) = \frac{1}{\mu(B(0,r))} |h|_{\nu}^2.$$

С другой стороны,

$$|h|_{\nu}^2 = \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle^2 \nu(du) =$$

$$= \sup\left\{ \left| \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle \langle \varphi, u \rangle \nu(du) \right|^2 : \varphi \in B^*, \int\limits_{B(0,r)} \langle \varphi, u \rangle^2 \nu(du) \le 1 \right\} \le$$

$$\le \sup\left\{ \left| \int\limits_{B(0,r)} \langle \psi_{\nu}, u \rangle \langle \varphi, u \rangle \nu(du) \right|^2 : \varphi \in B^*, \int\limits_{B} \langle \varphi, u \rangle^2 \mu(du) \le C \right\} =$$

$$= \sup\left\{ |\langle \varphi, u \rangle|^2 : \varphi \in B^*, \int\limits_{B} \langle \varphi, u \rangle^2 \mu(du) \le C \right\} = C |h|_{\mu}^2.$$

Здесь константа C выбрана так, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}_2^{\nu} : \int\limits_{B} \langle \varphi, u \rangle^2 \mu(du) \le C \int\limits_{B(0,r)} \langle \varphi, u \rangle^2 \nu(du).$$

Лемма доказана.

В [6] доказано следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин — и последовательность $\{e_n, n \ge 1\}$ элементов B таковы, что:*

1) ξ_1 *имеет все моменты, в частности* $M\xi_1 = 0$;

2) *характеристическая функция* ξ_1 *аналитическая в окрестности* 0;

3) *распределение* ξ_1 *не сосредоточено в конечном числе точек;*

4) *при каждом* $n \ge 1$ e_n *не лежит в замыкании линейной оболочки остальных* $\{e_k\}$, *замыкание линейной оболочки* $\{e_n, n \ge 1\}$ *равно* B;

5) $\|e_n\| = 1, \ n \ge 1$.

Тогда распределение суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \xi_n e_n$$

является полиномиально невырожденной мерой и многочлены плотны в соответствующем пространстве L_2.

Эта лемма доказана в [6] для случая, когда ξ_1 имеет равномерное распределение на $[-1; 1]$, но переносится на общий случай без изменений. Примерами полиномиально невырожденных мер также являются гауссовские меры, для которых, как хорошо известно из [4], условие (9) превращается в равенство

$$\int_B (J_n A_n)^2(x)\mu(dx) = n! |A_n|_n^2.$$

Некоторой модификацией рассуждений из [4] является следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть B — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, μ — гауссовская мера на B с нулевым средним и невырожденным корреляционным оператором, собственные числа которого $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ таковы, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ln^2 n < +\infty. \tag{10}$$

Тогда мера ν, получающаяся из μ сужением на шар $B(0, r)$ радиуса r с центром в 0 и нормированием, является полиномиально невырожденной.

Доказательство леммы получается сейчас с использованием леммы 5 и рассуждений, аналогичных [6], причем условие сходимости ряда (10) дает возможность вписать в $B(0, r)$ „гильбертов кирпич", сведя рассуждения к ситуации, аналогичной лемме 6.

4. Финитно абсолютно непрерывные меры. Пусть μ — полиномиально невырожденная мера на B. В этом случае, согласно п. 3, пространство $L_2(B, \mu)$ представимо в виде прямой суммы

$$L_2(B, \mu) = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n \tag{11}$$

подпространств „ортогональных многочленов", которые можно отождествить с ядрами из H_2^n, $n \geq 0$. Цель данного пункта — выделить класс мер на B, которые можно будет раскладывать в ряды по элементам из $\{\mathcal{K}_n, n \geq 0\}$.

Определение 2. *Вероятностная мера ν, имеющая слабые моменты любого порядка на B, финитно абсолютно непрерывна относительно вероятностной меры μ (обозначение $\nu \ll_\circ \mu$), также имеющей слабые моменты любого порядка, если*

$$\forall n \geq 0 \quad \exists c_n > 0 : \ \forall Q \in \mathcal{P}_n : \quad \left| \int_B Q(u)\nu(du) \right| \leq C_n \left(\int_B Q^2(u)\mu(du) \right)^{1/2}.$$

Замечания. **1.** В определении 2 последовательность $\{c_n, n \geq 1\}$ можно выбрать ограниченной тогда и только тогда, когда $\nu \ll \mu$ и

$$\frac{d\nu}{d\mu} \in L_2(B, \mu).$$

2. Определение 2 приобретает смысл только в случае $\dim B = \infty$, так как если $\dim B < +\infty$ и μ такова, что из равенства

$$Q = 0 \,(\mathrm{mod}\, \mu)$$

следует равенство $Q \equiv 0$ для произвольного многочлена Q, то любая мера ν, имеющая все моменты, будет финитно абсолютно непрерывной относительно μ.

Иногда финитная абсолютная непрерывность обеспечивает абсолютную непрерывность.

Лемма 9. *Пусть* μ *и* ν *— гауссовские меры в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве* B, *имеющие один и тот же корреляционный оператор* S *и средние значения* 0 *и* h *соответственно. Тогда если* $\nu \ll_\circ \mu$, *то* $h \in S^{1/2}(B) = H_2^\mu$, т. е. $\nu \ll \mu$.

Доказательство. Пусть $\{e_n, n \ge 1\}$ — ортонормированный собственный базис, а $\{\lambda_n, n \ge 1\}$ — соответствующие собственные числа оператора S. Тогда меры μ и ν совпадают с распределениями случайных элементов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, \xi_n e_n$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, \xi_n e_n + h$$

соответственно, где $\{\xi_n, n \ge 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин со средним 0 и дисперсией 1. Пусть $\{h_n, n \ge 1\}$ — координаты h в базисе $\{e_n, n \ge 1\}$. Выбирая в качестве многочленов первой степени линейные функционалы вида $a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$, из условия леммы получаем

$$\exists\, C_1 : \ \forall n \ge 1 : \quad |a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n| \ \le \ c_1 \sqrt{\lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2}\,.$$

Выполнение этого условия в точности означает, что $h \in S^{1/2}(B)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть мера* μ *полиномиально невырождена, удовлетворяет условию п.* 3, *а мера* $\nu \ll_\circ \mu$. *Тогда существует единственная последовательность ядер* $A_n \in \left(H_2^\mu\right)^{\otimes n}$ *такая, что для всякого многочлена* $Q \in \mathcal{P}$ *справедливо равенство*

$$\int_B Q(u)\nu(du) \ = \ \langle Q, \{A_n\} \rangle .$$

Здесь $\langle Q, \{A_n\} \rangle$ *определяется следующим образом. Многочлен* Q *раскладывается в сумму по ортогональным слагаемым из* $\mathcal{K}_n$, $n \ge 0$:

$$Q \ = \ \sum_{n=0}^{N} R_n ,$$

а затем полагаем

$$\langle Q, \{A_n\} \rangle \ := \ \sum_{n=0}^{N} \int_B R_n(u) A_n(u) \mu(du).$$

Доказательство. Из условия $\nu \ll_\circ \mu$ следует, что для каждого $n \ge 0$ существует единственный элемент $G_n \in \overline{\mathcal{P}_n}$ такой, что

$$\forall Q \in \mathcal{P}_n : \int_B Q(u)\nu(du) \ = \ \int_B G_n(u) Q(u) \mu(du).$$

При этом проекция G_{n+1} на $\overline{\mathcal{P}_n}$ в $L_2(B, \mu)$ совпадает с G_n. Выбирая $A_0 = G_0$, $A_{n+1} = G_{n+1} - G_n$, $n \ge 0$, получаем требуемую последовательность. Единственность проверяется очевидным образом.

Замечание **3.** Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_B A_n(u)^2 \mu(du)$$

сходится тогда и только тогда, когда $\nu \ll \mu$ и плотность

$$\frac{d\nu}{d\mu} \in L_2(B, \mu).$$

Пример. Пусть мера μ в пространстве B построена так, как в лемме 6. Рассмотрим последовательность функционалов $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ из B^* таких, что

$$\langle \varphi_n, e_m \rangle = 2^n \delta_{nm}, \quad n, m \geq 1,$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Для произвольного многочлена Q вида

$$Q(u) = \sum_{k_1 \ldots k_n = 1}^{N} a_{k_1 \ldots k_n} \langle \varphi_{k_1}, u \rangle * \ldots * \langle \varphi_{k_n}, u \rangle,$$

где $\langle \varphi_{k_1}, u \rangle * \ldots * \langle \varphi_{k_n}, u \rangle$ получено заменой в произведении $\langle \varphi_{k_1}, u \rangle \ \ldots \ \langle \varphi_{k_n}, u \rangle$ степеней ортогональными относительно распределения ξ_1 многочленами с тем же номером и старшим коэффициентом 1, справедливы соотношения

$$\int_B Q^2(u) \mu(du) = \sum_{k_1 \ldots k_n = 1}^{N} a^2_{k_1 \ldots k_n} \cdot c_{k_1 \ldots k_n}, \quad Q \in \mathcal{K}_n.$$

Здесь

$$c_{k_1 \ldots k_n} = M\left(\xi_{k_n} * \ldots * \xi_{k_n}\right)^2.$$

Следовательно, мера ν будет финитно абсолютно непрерывной относительно меры μ тогда и только тогда, когда

$$\forall n \geq 1 \qquad \sum_{k_1 \ldots k_n = 1}^{\infty} \left[\int_B \langle \varphi_{k_1}, u \rangle * \ldots * \langle \varphi_{k_n}, u \rangle \nu(du) \right]^2 < +\infty. \tag{12}$$

Например, для меры ν, вся масса которой сосредоточена в точке 0, из (12) следует, что ν не может быть финитно абсолютно непрерывной относительно μ (взять $n = 2$), а следовательно, и не представляется рядом по ортогональным многочленам меры μ.

1. *Sugita H.* Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces // Osaka J. Math. – 1988. – **25**, № 3. – P. 665–696.
2. *Watanabe S.* Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus. – Bombay: TATA Inst., 1984. – 112 p.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
4. *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 395 с.
6. *Дороговцев А.А.* Стохастические уравнения с упреждением. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1966. –152 с.
7. *Розанов Ю.А., Ибрагимов И. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.

Получено 08.06.2000