УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук (Ривнэп. техп. ун-т)

СУЩЕСТВЕННО НЕУСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

We study the essential instability of solutions of linear and nonlinear difference equations.

Вивчається істотна нестійкість розв'язків лінійних і нелінійних різницевих рівнянь.

В данной статье уточняется и изучается введенное в [1] понятие существенно неустойчивого решения разностного уравнения

$$x(n+1) = F(n, x(n)), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

где $F(n, \cdot)$, $n \geq 0$, — действующие в бесконечномерном банаховом пространстве E отображения. Приводятся необходимые и достаточные условия существенной неустойчивости и существенной экспоненциальной неустойчивости решений рассматриваемого уравнения с линейным постоянным отображением F и доказывается устойчивость существенной неустойчивости решений этого уравнения к компактным и близким к компактным возмущениям. Основную роль в исследованиях играют существенно аппроксимативный спектр линейного оператора и меры некомпактности.

1. Определения существенно неустойчивых решений уравнения (1). Рассмотрим отображение

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \|x\|^{-1} x, & \text{если } x \in E \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Каждому множеству $D \subset E$ поставим в соответствие множество

$$\operatorname{sgn} D = \{ \operatorname{sgn} x \colon x \in D \},$$

а каждой последовательности $\{y_m\} \subset E$ — число

$$\chi\{y_m\} = \lim_{n \to \infty} \inf_{k > l \geq n} \|\operatorname{sgn} y_k - \operatorname{sgn} y_l\|.$$

Ограниченную последовательность $\{y_m\} \subset E$ назовем *существенно расходящейся*, если она не содержит сходящихся подпоследовательностей. Очевидно, что ограниченная последовательность $\{y_m\} \subset E$ является существенно расходящейся тогда и только тогда, когда

$$\chi\{y_m\} > 0 \quad \text{и} \quad \varliminf_{m \to \infty} \|y_m\| > 0.$$

Обозначим через $y(n, b)$ решение $y(n)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y = b$, $b \in E$, а через $y(n, B)$, где $B \subset E$, — множество $\{ y(n, b) \colon b \in B \}$.

Определение 1. *Решение $x(n)$ разностного уравнения* (1) *называется существенно неустойчивым, если для некоторых чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и каждого числа $\delta \in (0, \varepsilon_1)$ найдутся число $n(\delta) \in N$ и последовательность $\{a_m\} \subset E$, для которой $\sup_{m \geq 1} \|x(0) - a_m\| \leq \delta$, такие, что для решений $y(n, a_m)$, $m \geq 1$, уравнения* (1) *выполняются соотношения $\|x(n(\delta)) - y(n(\delta), a_m)\| \geq \varepsilon_1$ для всех $m \geq 1$ (решение $x(n)$ неустойчиво) и $\chi\{x(n(\delta)) - y(n(\delta), a_m)\} \geq \varepsilon_2$ (последовательность $\{x(n(\delta)) - y(n(\delta), a_m)\}$ существенно расходится).*

Очевидно, что уравнение (1) может иметь существенно неустойчивые решения только в случае $\dim E = \infty$ и не каждое неустойчивое решение является существенно неустойчивым.

Дадим другое определение существенно неустойчивого решения уравнения (1). Для этого напомним определение меры некомпактности.

Пусть Ω — произвольное ограниченное подмножество пространства E и $\operatorname{diam}\Omega$ — диаметр множества Ω, определенный равенством

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup\{\,\|x-y\|:\ x, y \in \Omega\,\}.$$

Для рассмотренного множества Ω *мерой некомпактности* называется число $\alpha(\Omega) = \inf\{\, d > 0:$ существует конечное число подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ в E таких, что $\operatorname{diam}\Omega_i \le d$ и $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\,\}$ (см. [2; 3, с. 321]).

Для множества Ω и произвольного элемента $a \in E$ обозначим через $a + \Omega$ множество $\{\, a + \omega : \omega \in \Omega\,\}$. Рассмотрим также следующие расстояния между точкой $a \in E$ и множеством Ω:

$$\operatorname{dist}(a, \Omega) = \inf_{\omega\in\Omega} \|a - \omega\|,$$

$$\operatorname{Dist}(a, \Omega) = \sup_{\omega\in\Omega} \|a - \omega\|.$$

Определение 2. *Решение $x(n)$ разностного уравнения* (1) *называется существенно неустойчивым, если для некоторых чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и каждого числа $\delta \in (0, \varepsilon_1)$ найдутся число $n(\delta) \in N$ и ограниченное множество $B \subset E$, для которого* $\operatorname{Dist}(x(0), B) \le \delta$, *такие, что* $\operatorname{dist}(x(n(\delta)), y(n(\delta), B)) \ge \varepsilon_1$ *и* $\alpha(\operatorname{sgn}(-x(n(\delta)) + y(n(\delta), B))) \ge \varepsilon_2$.

Приведенные определения существенно неустойчивых решений эквивалентны в силу следующего утверждения.

Лемма 1. *Для каждой последовательности $\{y_m\} \subset E$ имеет место равенство*

$$\chi\{y_m\} = \alpha(\operatorname{sgn}\{\, y_m:\ m \ge 1\,\}).$$

Утверждение леммы вытекает из определений величин $\chi\{y_m\}$ и $\alpha(\Omega)$.

2. Существенно аппроксимативный спектр линейного непрерывного оператора. Исследования существенно неустойчивых решений уравнения (1) основываются на понятии существенно аппроксимативного спектра линейного непрерывного оператора.

Напомним, что аппроксимативным спектром оператора $A \in L(E)$ называется множество $\sigma_a(A)$, состоящее из точек $\lambda \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ — спектр оператора A), для каждой из которых существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, не стремящаяся к нулю и для которой $\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)x_n\| = 0$, где I — единичный оператор.

Существенно аппроксимативным спектром оператора $A \in L(E)$ назовем множество $\sigma_{ess,a}(A)$, состоящее из точек $\lambda \in \sigma_a(A)$, для каждой из которых существует существенно расходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset E$ и для которой $\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)x_n\| = 0$.

Из определения $\sigma_{ess,a}(A)$ и теоремы 5, приведенной в [4], вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Все предельные точки множества $\sigma_a(A)$ принадлежат $\sigma_{ess,a}(A)$.*

Введенный существенно аппроксимативный спектр оператора $A \in L(E)$ не совпадает с близким по названию существенным аппроксимативно точечным спектром $\sigma_{ea}(A)$ оператора A, рассмотренным в [5, 6] и определенным равенством

$$\sigma_{ea}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(E)} \sigma_a(A+K),$$

где $\mathcal{K}(E)$ — идеал вполне непрерывных операторов $K \in L(E)$.

Несовпадение спектров $\sigma_{ess,a}(A)$ и $\sigma_{ea}(A)$ вытекает из того, что $\sigma_{ea}(A)$ содержит и такие точки $\lambda \in C$, для которых $\operatorname{Im}(A-\lambda I) = \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)}$ и $0 \leq \operatorname{def}(A-\lambda I) < \operatorname{nul}(A-\lambda I) < \infty$ [5, 6], а эти точки, очевидно, не принадлежат $\sigma_{ess,a}(A)$.

Следующие утверждения раскрывают свойства существенно аппроксимативного спектра оператора, которые потребуются при исследовании существенно неустойчивых решений уравнения (1).

Теорема 2. $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$ *тогда и только тогда, когда найдется ограниченное множество* $B \subset E$ *такое, что* $\alpha(B) > 0$ *и* $\alpha((A-\lambda I)B) = 0$.

Доказательство. *Необходимость* утверждения следует из определения спектра $\sigma_{ess,a}(A)$. Для доказательства *достаточности* предположим, что $\alpha(B) > 0$ и $\alpha((A-\lambda I)B) = 0$ для некоторого ограниченного множества $B \subset E$. Рассмотрим произвольную существенно расходящуюся последовательность $\{b_m\} \subset B$. Вследствие относительной компактности множества $\{(A - -\lambda I)b_m : m \geq 1\}$ найдется подпоследовательность $\{b_{m_k}\}$ (она будет существенно расходящейся) такая, что последовательность $\{(A-\lambda I)b_{m_k}\}$ будет сходящейся. Тогда для существенно расходящейся последовательности $\{\Delta b_{m_k}\}$, где $\Delta b_{m_k} = b_{m_{k+1}} - b_{m_k}$, будет выполняться соотношение $\lim_{k\to\infty}(A-\lambda I)\Delta b_{m_k} = 0$, т. е. $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$. Теорема доказана.

Теорема 3. $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{nul}(A-\lambda I) = \infty$ *или* $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{nul}(A-\lambda I) < \infty$ и $\operatorname{Im}(A-\lambda I) = \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)}$. В пространстве E существует подпространство E_1, дополнительное для $\operatorname{Ker}(A - -\lambda I)$ [7]: $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Пусть P_1 и P_2 — проекторы, соответствующие E_1 и $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$, а D — сужение на E_1 оператора $A-\lambda I$. Тогда оператор $D: E_1 \to \operatorname{Im}(A-\lambda I)$ имеет непрерывный обратный на основании теоремы Банаха об обратном операторе [7]. В силу $\operatorname{nul}(A-\lambda I) < \infty$ для каждого ограниченного множества $B \subset E$, для которого $\alpha(B) > 0$, будет выполняться аналогичное соотношение $\alpha(P_1 B) > 0$. Поэтому $\alpha(DP_1B) > 0$ вследствие обратимости D, т. е. $\alpha((A-\lambda I)B) > 0$. Тогда на основании теоремы 2 $\lambda \notin \sigma_{ess,a}(A)$.

Необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Если $\operatorname{nul}(A-\lambda I) = \infty$, то, очевидно, что для множества $B = \{x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I) : \|x\| = 1\}$ выполняются соотношения $\alpha(B) > 0$, $(A-\lambda I)B = \{0\}$. Тогда согласно теореме 2 $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$. Если же $\operatorname{Im}(A - -\lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)}$ и $\operatorname{nul}(A-\lambda I) < \infty$, то найдется дополнительное для $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ подпространство $E_1 \subset E$, для которого $\inf_{x \in E_1, \|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\| = 0$ (заметим, что $E_1 \cap \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \{0\}$). Следовательно, найдется существенно расходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, для которой $\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)x_n\| = 0$, т.е. $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для произвольных* $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$ *и относительно компактного* *множества $\mathcal{K}$ вполне непрерывных опраторов $K \in L(E)$ найдется существенно расходящаяся последовательность $\{x_n\}$, для которой*

$$\lim_{n\to\infty} (\|(A-\lambda I)x_n\| + \sup_{K\in\mathcal{K}} \|Kx_n\|) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ — существенно расходящаяся последовательность, для которой $\lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)y_n = 0$. В силу относительной компактности множества $\mathcal{K}$ и полной непрерывности элементов этого множества найдется такая подпоследовательность $\{y_{n_l}\}$, что последовательность $\{Ky_{n_l}\}$ будет сходящейся для каждого $K \in \mathcal{K}$. Тогда $\lim_{l\to\infty} K\Delta y_{n_l} = 0$ для всех $K \in \mathcal{K}$, где $\Delta y_{n_l} = y_{n_{l+1}} - y_{n_l}$, и $\lim_{l\to\infty}\sup_{K\in\mathcal{K}}\|K\Delta y_{n_l}\| = 0$ на основании относительной компактности множества $\mathcal{K}$. Поскольку $\lim_{l\to\infty}(A-\lambda I)\Delta y_{n_l} = 0$ и последовательность $\{\Delta y_{n_l}\}$, как и исходная последовательность $\{y_n\}$, является существенно расходящейся, в чем нетрудно убедиться, то утверждение теоремы 4 доказано.

Заметим, что в случае $\dim E = \infty$ для каждого $A \in L(E)$ спектр $\sigma_{ess,a}(A)$ — непустое компактное множество и для произвольной локально голоморфной на $\sigma(A)$ функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\sigma_{ess,a}(f(A)) = f(\sigma_{ess,a}(A)).$$

Эти утверждения являются непосредственными аналогами таких же утверждений для других версий существенного спектра (см., например, [3, 8 – 10]).

3. Условия существенной неустойчивости решений уравнения (1) в случае $F(n,\cdot) \equiv \mathrm{const} \in L(E)$. Будем считать, что уравнение (1) имеет вид

$$x(n+1) = Ax(n), \qquad n \geq 0, \tag{2}$$

где $A \in L(E)$.

Для этого уравнения существенная неустойчивость всех решений равносильна существенной неустойчивости нулевого решения уравнения.

Введем в рассмотрение число

$$r_{ess,a}(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess,a}(A)\},$$

которое будем называть существенно аппроксимативным спектральным радиусом оператора A.

Теорема 5. *Для того чтобы нулевое решение уравнения* (2) *было существенно неустойчивым, необходимо, чтобы*

$$r_{ess,a}(A) \geq 1, \tag{3}$$

и достаточно, чтобы

$$r_{ess,a}(A) > 1. \tag{4}$$

Доказательство теоремы основывается на следующих утверждениях.

Лемма 2. *Пусть λ — изолированная точка спектра $\sigma(A)$, для которой $\mathrm{nul}(A-\lambda I) < \infty$ и $\mathrm{Im}(A-\lambda I) = \overline{\mathrm{Im}(A-\lambda I)}$, и Γ — такая положительно ориентированная окружность достаточно малого радиуса, что никакая другая точка, кроме λ, из $\sigma(A)$ не лежит на или внутри Γ. Тогда оператор*

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (zI-A)^{-1}\,dz$$

является оператором конечного ранга.

Доказательство. Пусть E_1 — дополнительное для $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ подпространство пространства E и $d = \inf_{x \in E_1, \|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\|$. В силу условий леммы $d > 0$.

Предположим, что корневое подпространство

$$M_\lambda(a) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((\lambda I - A)^k)$$

является бесконечномерным. Тогда для каждого $m > 1$ найдется такой вектор a_m, что векторы $a_{m-1} = (A-\lambda I)a_m$, $a_{m-2} = (A-\lambda I)^2 a_m, \ldots, a_1 = (A-\lambda I)^{m-1} a_m$ будут ненулевыми, $\|a_1\| = 1$ и $(A-\lambda I)a_1 = 0$. Очевидно, что

$$\|a_k\| \le d^{-k+1} \qquad \text{для всех} \quad k = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим произвольное число $q > 3$. Тогда

$$\frac{q}{d}(A-\lambda I)\left(a_1 + \frac{d}{q}a_2 + \frac{d^2}{q^2}a_3 + \ldots + \frac{d^{m-1}}{q^{m-1}}a_m\right) -$$

$$-\left(a_1 + \frac{d}{q}a_2 + \frac{d^2}{q^2}a_3 + \ldots + \frac{d^{m-1}}{q^{m-1}}a_m\right) = \frac{d^{m-1}}{q^{m-1}}a_m,$$

$$\left\|\frac{d^{m-1}}{q^{m-1}}a_m\right\| \le \frac{1}{q^{m-1}} < \frac{1}{3^{m-1}}$$

и

$$\left\|a_1 + \frac{d}{q}a_2 + \frac{d^2}{q^2}a_3 + \ldots + \frac{d^{m-1}}{q^{m-1}}a_m\right\| > \frac{1}{2}.$$

Поэтому $1 \in \sigma_a\left(\frac{q}{d}(A-\lambda I)\right)$ в силу произвольности $m > 1$ и, следовательно, $\lambda + d/q \in \sigma_a(A)$, а в силу произвольности $q > 3$ число λ является предельной точкой спектра $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$, что противоречит условию леммы об изолированности точки λ.

Итак, предположение, что $\dim M_\lambda(A) = \infty$, ложно. Следовательно, $\dim M_\lambda(A) < \infty$. Отсюда и из условий леммы вытекает, что λ не является точкой существенного спектра Браудера $\sigma_{ess}(A)$ оператора A [3]. Тогда на основании теоремы Д 3.3 (см.[3, с. 317]) оператор P_λ является оператором конечного ранга.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A) \setminus \{0\}$ *и* $\{a_m\}$ *— такая существенно расходящаяся последовательность нормированных векторов* $a_m \subset E$ $(m \ge 1)$, *что* $\lim_{m\to\infty} \|(A-\lambda I)a_m\| = 0$. *Тогда*

$$\alpha(\operatorname{sgn}\{A^n a_m \colon m \ge 1\}) = \alpha(\{a_m \colon m \ge 1\})$$

для всех $n \in N$.

Доказательство. Из равенства

$$A^n - \lambda^n I = (A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \lambda^2 A^{n-3} + \ldots + \lambda^{n-1} I)(A-\lambda I), \qquad n \ge 2,$$

и условий леммы вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \|(A^n - \lambda^n I)a_m\| = 0$$

для всех $n \in N$. Поэтому множества $\{(A^n - \lambda^n I) a_m : m \geq 1\}$, $n \in N$, относительно компактны и, следовательно,

$$\alpha(\operatorname{sgn}\{A^n a_m : m \geq 1\}) = \alpha(\operatorname{sgn}\{\lambda^n a_m : m \geq 1\}), \quad n \in N.$$

А так как $\operatorname{sgn}\{\lambda^n a_m : m \geq 1\} = e^{in\varphi}\{a_m : m \geq 1\}$, где $\varphi = \arg\lambda$, и $|e^{in\varphi}| = 1$, то

$$\alpha(\operatorname{sgn}\{\lambda^n a_m : m \geq 1\}) = \alpha(\{a_m : m \geq 1\}), \quad n \in N,$$

т. е. справедливо утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* U_n, V_n, $n \geq 1$, *— произвольные элементы из* $L(E)$ *и* S *— произвольное непустое множество нормированных векторов из* E, *для которых* $\operatorname{dist}(0, U_n S) > 0$ *для всех* $n \geq 1$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Dist}(0, V_n S)}{\operatorname{dist}(0, U_n S)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha(\operatorname{sgn}((U_n + V_n) S)) - \alpha(\operatorname{sgn}(U_n S))) = 0.$$

Утверждение леммы вытекает из определения и свойств меры некомпактности (см. [2, с. 6–8]).

***Доказательство теоремы* 5.** Предположим, что выполняется соотношение (4). Покажем, что нулевое решение уравнения (2) существенно неустойчиво.

Пусть $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A)$, $|\lambda| = r_{ess,a}(A)$ и $\{a_m\}$ — существенно расходящаяся последовательность нормированных векторов $a_m \subset E$, $m \geq 1$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \|(A - \lambda I) a_m\| = 0. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > 1$ — произвольное число и n_0 — такое натуральное число, что

$$|\lambda^{n_0}| > \varepsilon.$$

Из (5) следует, что $\lim_{m \to \infty} \|(A^{n_0} - \lambda^{n_0} I) a_m\| = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|(A^{n_0} - \lambda^{n_0} I) a_m\| < |\lambda^{n_0}| - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad m \geq 1.$$

Тогда для решений $x(n, a_m) = A^n a_m$, $m \geq 1$, уравнения (2) будут выполняться неравенства

$$\|x(n_0, a_m)\| > \varepsilon, \quad m \geq 1,$$

т. е. в силу произвольности $\varepsilon > 1$ нулевое решение уравнения (2) неустойчиво.

Согласно леммам 1 и 3 и выбору последовательности $\{a_m\}$

$$\chi\{x(n, a_m)\} = \chi\{a_m\} > 0$$

для всех $n > 0$. Поэтому нулевое решение уравнения (2) существенно неустойчиво.

Обратно. Пусть нулевое решение уравнения (2) существенно неустойчиво, т. е. найдутся последовательность $\{a_m\}$ нормированных векторов $a_m \subset E$, $m \geq 1$, и последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел n_k, $k \geq 1$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{m\geq 1} \|A^{n_k} a_m\| = \infty \tag{6}$$

и

$$\inf_{k\geq 1} \chi\{A^{n_k} a_m\} > 0. \tag{7}$$

Покажем, что имеет место соотношение (3).

Предположим, что (3) не выполняется, т. е.

$$r_{ess,a}(A) < 1.$$

Тогда для каждого числа $r > r_{ess,a}(A)$ множество $\sigma(A) \cap \{\lambda \in C : |\lambda| \geq r\}$ конечно или пусто на основании теоремы 1 и, следовательно, для некоторого числа $q \in (r_{ess,a}(A), 1)$ выполняется соотношение

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in C: |\lambda| = q\} = \varnothing.$$

Рассмотрим части σ_1 и σ_2 спектра $\sigma(A)$:

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| < q\},$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \sigma(A): |\lambda| > q\}$$

и соответствующие им проекционные операторы P_1 и P_2 (далее убедимся, что $\sigma_2 \neq \varnothing$).

Решения $x(n, a) = A^n a$, $a \in E$, уравнения (2) представим в виде

$$x(n, a) = A^n P_1 a + A^n P_2 a, \quad n \geq 0.$$

Поскольку

$$A^n P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=q} z^n (zI - A)^{-1} dz, \quad n \geq 0,$$

и, следовательно,

$$\|A^n P_1\| \leq M q^{n+1}, \quad n \geq 0,$$

где $M = \max_{|z|=q} \|(zI - A)^{-1}\|$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \|A^n P_1\| = 0. \tag{8}$$

Отсюда вытекает, что $\sigma_2 \neq \varnothing$ (если $\sigma_2 = \varnothing$, то тогда $P_1 = I$ и согласно (8) нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво).

В силу теоремы 3 для всех точек $\lambda \in \sigma_2$ выполняются соотношения

$$\mathrm{nul}\,(A - \lambda I) < \infty$$

и

$$\mathrm{Im}\,(A - \lambda I) = \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}.$$

Поэтому на основании леммы 2 и конечности множества σ_2 подпространство $X = P_2 E$ конечномерно. А так как $A^n P_2 E \subset X$ для каждого $n \in N$, то

$$\alpha\{A^n P_2 a_m : m \geq 1\} = 0 \quad \forall n \in N. \tag{9}$$

В силу (6), (8) и (9) на основании леммы 4 получаем

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\mathrm{sgn}\{A^{n_k} P_1 a_m + A^{n_k} P_2 a_m : m \geq 1\}) = 0.$$

Это соотношение согласно лемме 1 противоречит соотношению (7).

Итак, предположение о том, что в случае существенно неустойчивого нулевого решения уравнения (2) выполняется соотношение $r_{ess,a}(A) < 1$, ложно.

Теорема 5 доказана.

4. Условия существенной экспоненциальной неустойчивости решений уравнения (2). Нулевое решение разностного уравнения (2) назовем *существенно экспоненциально неустойчивым*, если найдутся числа $M > 0$, $q > 1$, последовательность $\{a_m\}$ нормированных векторов $a_m \in E$, $m \geq 1$, и отображение $p: N \to N$ такие, что для решений $x(n, a_m)$, $m \geq 1$, уравнения (8) будут выполняться соотношения

$$\| x(n, a_m) \| \geq M q^n, \quad n \in N, \quad m \geq p(n), \tag{10}$$

$$\inf_{n \geq 1} \chi\{x(n, a_m)\} > 0. \tag{11}$$

Теорема 6. *Нулевое решение уравнения* (2) *существенно экспоненциально неустойчиво тогда и только тогда, когда*

$$r_{ess,a}(A) > 1. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть выполняется соотношение (12). Рассмотрим произвольное число $\lambda \in \sigma_{ess,a}(A) \cap \{z: |z| = r_{ess,a}(A)\}$ и последовательность $\{b_m\}$ нормированных векторов $b_m \in E$, $m \geq 1$, для которых $\lim_{m\to\infty}(Ab_m - \lambda b_m) = 0$. Тогда $\lim_{m\to\infty}(A^n b_m - \lambda^n b_m) = 0$ для всех $n \in N$. На основании последнего соотношения и того, что $|\lambda| > 1$, найдутся подпоследовательность $\{a_m\}$ последовательности $\{b_m\}$ и отображение $p: N \to N$ такие, что

$$\| A^n a_m \| \geq \frac{1}{2} |\lambda|^n, \quad n \in N, \quad m \geq p(n).$$

Отсюда и из соотношения

$$\chi\{A^n a_m\} = \chi\{a_m\} > 0, \quad n \geq 1,$$

вытекающего из существенной расходимости последовательности $\{b_m\}$, а также из лемм 1 и 3 следует выполнение соотношений (10) (при $M = 1/2$) и (11) для решений

$$x(n, a_m) = A^n a_m, \quad m \geq 1,$$

уравнения (2).

Итак, неравенство (12) обеспечивает существенную экспоненциальную неустойчивость нулевого решения уравнения (2).

Обратно. Пусть нулевое решение уравнения (2) существенно экспоненциально неустойчиво. Тогда найдутся числа $M > 0$, $q > 1$, отображение $p: N \to N$ и последовательность $\{a_m\}$ нормированных векторов $a_m \in E$, $m \geq 1$ такие, что

$$\| A^n a_m \| \geq M q^n, \quad n \in N, \quad m \geq p(n), \tag{13}$$

$$\inf_{n \geq 1} \chi\{A^n a_m\} > 0. \tag{14}$$

Тогда согласно теореме 5 $r_{ess,a}(A) \geq 1$.

Предположим, что

$$r_{ess,a}(A) = 1. \tag{15}$$

Из известного соотношения

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

для спектрального радиуса оператора A [2] и соотношения (13) вытекает,что $r(A) \geq q > 1$. Отсюда, из теорем 1 и 3 вытекает, что точки λ непустого множества $\sigma(A) \cap \{x \in C: |z| > 1\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{nul}(A - \lambda I) < \infty, \tag{16}$$

$$\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \tag{17}$$

и являются изолированными точками. Это позволяет рассмотреть число $r \in \in (1, q)$, для которого

$$\{x \in C: |z| = r\} \cap \sigma(A) = \varnothing,$$

и непустые множества

$$\sigma_1 = \sigma(A) \cap \{x \in C: |z| < r\},$$

$$\sigma_2 = \sigma(A) \cap \{x \in C: |z| > r\}.$$

Пусть P_1 и P_2 — проекционные операторы, соответствующие частям σ_1 и σ_2 Поскольку σ_2 — конечное множество, то в силу (16), (17) и леммы 2 проектор $P_2 = \sum_{\lambda\in\sigma_2} P_\lambda$ является оператором конечного ранга. Поэтому

$$\alpha(\operatorname{sgn}\{A^n P_2 a_m : m \geq 1\}) = 0, \quad n \in N. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что для некоторого числа $M_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\|A^n P_1\| \leq M_1 r^n, \quad n \in N \tag{19}$$

(см. доказательство теоремы 5).

Согласно (13) выполняется неравенство

$$\|A^n P_2\| \geq M q^n - M_1 r^n, \quad n \in N, \quad m \geq p(n). \tag{20}$$

Учитывая оценки (19), (20), то что $q > r$, соотношение (18) и лемму 4, приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(\operatorname{sgn}\{A^n a_m : m \geq 1\}) = 0.$$

Это соотношение на основании леммы 1 противоречит (14).

Следовательно, предположение, что выполняется соотношение (15), ложно.

Теорема 6 доказана.

5. Достаточные условия существенной неустойчивости решений нелинейных разностных уравнений. Предположим, что разностное уравнение (1) принимает вид

$$x(n+1) = Ax(n) + G(n, x(n)), \quad n \geq 0, \tag{21}$$

где $G(n, \cdot): E \to E$, $n \geq 0$, — нелинейные операторы и $A \in L(E)$.

В теории таких уравнений важное место занимает вопрос о неустойчивости решений, когда $r(A) > 1$ и

$$\sup_{n\geq 0} \|G(n, x)\| = o(\|x\|) \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{22}$$

В этом случае нулевое решение может быть как неустойчивым, так и асимптотически устойчивым [11 – 14].

С помощью существенно аппроксимативного спектра можно сравнительно легко получить условия неустойчивости нулевого решения уравнения (21) и в случае невыполнения соотношения (22).

Обозначим через $\mathcal{K}(E)$ идеал вполне непрерывных операторов $K \in L(E)$.

Теорема 7. *Пусть:*

1) $r_{ess,a}(A) > 1$;

2) $\| G(n,x) \| \le \varphi(\| K_n x \|)$, *если* $n \ge 0$, $\| x \| \le r$,

где $r > 0$, $K_n \in \mathcal{K}(E)$, $n \ge 0$, *и* $\varphi(t)$ — *определенная на* $[0, +\infty)$ *функция, для которой* $\lim_{t\to 0}\varphi(0) = \varphi(0) = 0$.

Тогда нулевое решение уравнения (21) *существенно неустойчиво.*

Доказательство. Пусть λ — такая точка из $\sigma_{ess,a}(A)$, что $|\lambda| > 1$, и ε — произвольное число из интервала $(0, r|\lambda|^{-1})$. Рассмотрим натуральное число $n(\varepsilon)$, для которого

$$\varepsilon|\lambda|^{n(\varepsilon)} \le r < \varepsilon|\lambda|^{n(\varepsilon)+1}. \tag{23}$$

Согласно теореме 4 найдется существенно расходящаяся последовательность $\{y_m\}$ нормированных векторов $y_m \in E$, $m \ge 1$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \| A y_m - \lambda y_m \| = 0 \tag{24}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \max_{0 \le p \le n(\varepsilon)} \varphi(\| K_p y_m \|) = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим уравнение (21), где $x(0) = \varepsilon y_m$. Решение этого уравнения обозначим через $x(n, \varepsilon y_m)$. Заметим,что

$$x(1, \varepsilon y_m) = A\varepsilon y_m + G(0, \varepsilon y_m).$$

Согласно условию 2 теоремы и соотношению (25)

$$\lim_{m\to\infty} G(0, \varepsilon y_m) = 0,$$

а согласно (24)

$$\lim_{m\to\infty} \| A\varepsilon y_m - \lambda\varepsilon y_m \| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} \| x(1, \varepsilon y_m) - \lambda\varepsilon y_m \| = 0.$$

Далее заметим, что если

$$\lim_{m\to\infty} \| x(p, \varepsilon y_m) - \lambda^p \varepsilon y_m \| = 0 \tag{26}$$

для некоторого натурального числа $p \ge 1$ и

$$|\lambda^p \varepsilon| < r, \tag{27}$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \| x(p+1, \varepsilon y_m) - \lambda^{p+1} \varepsilon y_m \| = 0. \tag{28}$$

Действительно,

$$x(p+1, \varepsilon y_m) = A x(p, \varepsilon y_m) + G(p, x(p, \varepsilon y_m)).$$

Поскольку на основании (24), (26) и (25)

$$\lim_{m\to\infty} \| A x(p, \varepsilon y_m) - \lambda^{p+1} \varepsilon y_m \| = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(\| K_p x(p, \varepsilon y_m)\|) = 0$$

и для всех достаточно больших m

$$\| x(p+1, \varepsilon y_m) - \lambda^{p+1} \varepsilon y_m \| \le \| A x(p, \varepsilon y_m) - \lambda^{p+1} \varepsilon y_m \| +$$

$$+ \|G(p, x(p, \varepsilon y_m))\| \le \| A x(p, \varepsilon y_m) - \lambda^{p+1} \varepsilon y_m \| + \varphi(\| K_p x(p, \varepsilon y_m)\|),$$

то соотношения (26) и (27) обеспечивают выполнение соотношения (28).

Итак, согласно (23) и проведенным рассуждениям

$$\lim_{m\to\infty} \| x(p, \varepsilon y_m) - \lambda^p \varepsilon y_m \| = 0 \tag{29}$$

для всех $p = \overline{0, n(\varepsilon)}$. Отсюда следует неустойчивость нулевого решения уравнения (21). Действительно, согласно (29) найдется число m_0 такое, что

$$\| x(n(\varepsilon), \varepsilon y_{m_0}) - \lambda^{n(\varepsilon)} \varepsilon y_{m_0} \| < r|\lambda|^{-2}.$$

Тогда

$$\| x(n(\varepsilon), \varepsilon y_{m_0})\| > r|\lambda|^{-1} - r|\lambda|^{-2} = r(|\lambda| - 1)|\lambda|^{-2} > 0.$$

А так как число $\varepsilon \in (0, r|\lambda|^{-1})$ выбрано произвольным образом, то неустойчивость нулевого решения уравнения (21) доказана.

Из соотношения (29) на основании лемм 1 и 3 вытекает, что

$$\chi\{ x(n(\varepsilon), \varepsilon y_m)\} = \chi\{y_m\} > 0$$

(это соотношение имеет место для всех $\varepsilon \in (0, r|\lambda|^{-1})$). Поэтому нулевое решение уравнения (21) существенно неустойчиво. Теорема 7 доказана.

Заметим, что операторы $G(n, \cdot)$, $n \ge 0$, удовлетворяющие условию 2 теоремы 7, могут не быть вполне непрерывными. Примером таких операторов являются операторы

$$G(n, x) = \gamma(\| K_n x\|) \operatorname{sgn} x, \qquad n \ge 0,$$

где γ: $[0, +\infty) \to (-\infty, \infty)$ — непрерывное в точке 0 отображение, для которого $\gamma(0) = 0$, и $K_n \in \mathcal{K}(E)$, $n \ge 0$.

6. Применение теоремы 7 к дифференциально-разностным уравнениям. Пусть $C(S, C)$ — пространство непрерывных на множестве S функций $x = x(s)$ со значениями в C, $\mathcal{F}$ — множество функций $F = F(s) \in C(C, C)$, для каждой из которых $F(0) = 0$, $C^1[0, 1)$ — банахово пространство функций $z = z(s) \in C([0, 1), C)$, для которых $z'(s) \in C([0, 1), C)$, с нормой

$$\| z\|_{C^1} = \max\{ \sup_{0 \le s < 1} |z(s)|, \sup_{0 < s < 1} |z'(s)|, |z'(+0)|\}$$

и $\mathcal{D}$ — множество определенных на $[0, +\infty)$ функций $z = z(s)$ со значениями в C, сужение каждой из которых на $[1, +\infty)$ является элементом пространства $C([1, +\infty), C)$, а сужение функции $z_n = z(n+s)$ на $[0, 1)$ является элементом пространства $C^1[0, 1)$ для каждого $n \in \{0\} \cup N$.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$x'(t)+a\,x'(t-1)+b\,x(t)+c\,x(t-1) \;=\; F\left(\int\limits_{t-2}^{t-1} h(\tau)x(\tau)\,d\tau\right), \qquad t\geq 2, \tag{30}$$

где $a, b, c \in C$, $F \in \mathcal{F}$ и $h \in C([0,+\infty), C)$. Здесь под $x'(t)$ при $t \in N$ понимается $x'(t+0)=\lim_{\delta\to+0}\delta^{-1}(x(t+\delta)-x(t))$.

Под решением уравнения (30) понимаем любую функцию $z=z(t)\in \mathcal{D}$, которая превращает это уравнение в тождество, если $x(t)$ заменить на $z(t)$.

Предположим, что в (30) коэффициенты a, b и c являются такими, что характеристическое уравнение

$$p(1+a\,e^{-p})+b+c\,e^{-p} \;=\; 0 \tag{31}$$

соответствующего линейного дифференциально-разностного уравнения

$$y'(t)+a\,y'(t-1)+b\,y(t)+c\,y(t-1) \;=\; 0$$

имеет бесконечное число решений p_k, $k\in N$, для которых

$$\inf_{k\in N} \operatorname{Re} p_k \;>\; 0. \tag{32}$$

Тогда нулевое решение уравнения (30) при $F=0$ неустойчиво, множество $\overline{\{p_k : k\in N\}}$ не содержит конечных предельных точек [15, с.198] и найдется такое число $\gamma>0$, что на множестве $\{p\in C:\ \operatorname{Re} p\geq\gamma\}$ уравнение (31) не имеет решений [16, с.446–453].

Заметим, что соотношение (32) выполняется, если, например, $a=-e$ [16, с.454]. Тогда $p_k=1+i\,2k\pi+o(1)$.

Покажем, что нельзя подобрать такие $F\in\mathcal{F}$ и $h\in C([0,+\infty), C)$, чтобы нулевое решение уравнения (30) было устойчивым.

Для доказательства этого утверждения каждому решению $x=x(t)$ уравнения (30) поставим в соответствие последовательность $\{x_n(s)\}_{n\geq 0}$ элементов пространства $C^1[0,1)$, которые определены равенством

$$x_n(s) \;=\; x(n+s), \tag{33}$$

где $n\in\{0\}\cup N$ и $s\in[0,1)$. Очевидно, что

$$x_n(0) \;=\; x_{n-1}(1-0), \qquad n\in N\setminus\{1\}. \tag{34}$$

Тогда согласно (30)

$$x_n'(s) \;+\; a\,x_{n-1}'(s) \;+\; b\,x_n(s) \;+\; c\,x_{n-1}(s) \;=$$

$$=\; F\left(\int\limits_0^s h(n-1+\tau)\,x_{n-1}(\tau)\,d\tau+\int\limits_s^1 h(n-2+\tau)\,x_{n-2}(\tau)\,d\tau\right)$$

для всех $n\geq 2$ и $s\in[0,1)$. Отсюда на основании (34) получаем

$$x_n(s)-x_{n-1}(1-0) \;+\; a(x_{n-1}(s)-x_{n-1}(0)) \;+\; b\int\limits_0^s x_n(\tau)\,d\tau \;+\; c\int\limits_0^s x_{n-1}(\tau)\,d\tau \;=$$

$$=\; \int\limits_0^s F\left(\int\limits_0^{s_1} h(n-1+\tau)\,x_{n-1}(\tau)\,d\tau+\int\limits_{s_1}^1 h(n-2+\tau)\,x_{n-2}(\tau)\,d\tau\right)ds_1 \tag{35}$$

для всех $n\geq 2$ и $s\in[0,1)$.

Рассмотрим операторы $A_1, B_1 \in L(C^1[0,1))$ и $G(n,\cdot,\cdot)\colon C^1[0,1)\times \times C^1[0,1) \to C^1[0,1)$, определенные равенствами

$$(A_1x)(s) = x(1-0) - a(x(s)-x(0)) - c\int_0^s x(\tau)\,d\tau,$$

$$(B_1x)(s) = b\int_0^s x(\tau)\,d\tau,$$

$$(G_1(n,x,y))(s) = \int_0^s F\left(\int_0^{s_1} h(n-1+\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_{s_1}^1 h(n-2+\tau)y(\tau)\,d\tau\right)ds_1,$$

где $x, y \in C^1[0,1)$. С помощью этих операторов разностное уравнение (35) можно представить в виде

$$(I+B_1)x_n = A_1x_{n-1} + G_1(n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \ge 2, \tag{36}$$

где I — единичный оператор. Поскольку оператор B_1 является квазинильпотентным [7, с. 196], так как

$$|(B_1^m x)(s)| \le \frac{s^m}{m!}\|x\|_{C^1}, \quad m \in N, \quad s \in [0,1),$$

то оператор $I + B_1$ имеет непрерывный обратный $(I+B_1)^{-1}$. Следовательно, уравнение (36) можно представить в виде

$$x_n = (I+B_1)^{-1}A_1x_{n-1} + (I+B_1)^{-1}G_1(n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n \ge 2. \tag{37}$$

Определим операторы $A \in L(C^1[0,1)\times C^1[0,1))$ и $G(n,\cdot)\colon C^1[0,1)\times \times C^1[0,1) \to C^1[0,1)\times C^1[0,1)$ равенствами

$$A(x,y) = ((I+B_1)^{-1}A_1x, x),$$

$$G(n,(x,y)) = ((I+B_1)^{-1}G_1(n,x,y), 0),$$

где $x, y \in C^1[0,1)$. Тогда согласно (37)

$$(x_n, x_{n-1}) = A(x_{n-1}, x_{n-2}) + G(n, (x_{n-1}, x_{n-2})), \quad n \ge 2. \tag{38}$$

Итак, если $x = x(t)$ — решение дифференциально-разностного уравнения (30), то последовательность $\{(x_n, x_{n-1})\}_{n\ge1}$, где $x_n = x_n(s)$ и $x_{n-1} = x_{n-1}(s)$ — элементы пространства $C^1[0,1)$, определенные равенством (33), удовлетворяет разностному уравнению (38). Наоборот, если последовательность $\{(x_n, x_{n-1})\}_{n\ge1}$ удовлетворяет уравнению (38), т. е. последовательность $\{x_n\}_{n\ge0}$ удовлетворяет уравнению (35), то функция $x = x(t)$, определенная равенством (33) при $n \ge 0$ и $s \in [0,1)$, является решением уравнения (30).

К уравнению (38) применима теорема 7.

Действительно, $r_{ess,a}(A) > 1$ на основании соотношения (32), включения $\{p_k\colon k \in N\} \subset \{p\colon \operatorname{Re} p < \gamma\}$ и того, что для оператора A точки e^{p_k}, $k \in N$, являются собственными значениями, а из соответствующей последовательности собственных векторов $(e^{p_k s}, e^{p_k(s-1)})$, $k \in N$, можно выделить существенно расходящуюся подпоследовательность (последнее можно осуществить, так как

$|\lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} p_k| = +\infty$). Следовательно, выполняется условие 1 теоремы 7, а также выполняется условие 2 этой же теоремы, поскольку

$$\|G(n,(x,y))\|_{C^1\times C^1} \le$$

$$\le \|(I+B_1)^{-1}\|_{L(C^1)}\,\varphi\left(\sup_{0\le s<1}\left|\int_0^s h(n-1+\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_s^1 h(n-2+\tau)y(\tau)\,d\tau\right|\right)$$

для всех $x=x(s), y=y(s)\in C^1[0,1)$, где $\varphi(t)=\max_{0\le x\le t}|F(x)|$, и оператор $K_n\colon C^1[0,1)\times C^1[0,1)\to C^1[0,1)\times C^1[0,1)$, определенный равенством

$$(K_n(x,y))(s) = \left(\int_0^s h(n-1+\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_s^1 h(n-2+\tau)y(\tau)\,d\tau,\ 0\right)$$

является вполне непрерывным на основании теоремы Арцела [17, с. 106]. Поэтому согласно теореме 7 нулевое решение уравнения (38) существенно неустойчиво для произвольных $F\in\mathcal{F}$ и $h\in C([0,+\infty),C)$.

Следовательно, нельзя подобрать такие $F\in\mathcal{F}$ и $h\in C([0,+\infty),C)$, чтобы нулевое решение дифференциально-разностного уравнения (30) было устойчивым.

1. *Слюсарчук В. Ю.* Істотно нестійкі розв'язки різницевих рівнянь // Допов. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 9–12.
2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. – Новосибирск: Наука, 1986. – 266 с.
3. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
4. *Слюсарчук В. Е.* Теоремы о неустойчивости систем по линейному приближению // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1104–1113.
5. *Rakočević V.* On the subset of M. Scheckter's essential spectrum // Mat. Vesnik. – 1981. – **5**, № 4. – P. 389–391.
6. *Rakočević V.* On the essential approximate point spektrum. II // Ibid. – 1984. – **36**, № 1. – P. 89–97.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – Т. 2. – 1063 с.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 358 с.
10. *Еровенко В. А.* Спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов в банаховых пространствах: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Минск, 1995. – 183 с.
11. *Слюсарчук В. Е.* Разностные уравнения в функциональных пространствах // Дополнение II монографии Д. И. Мартынюка „Лекции по качественной теории разностных уравнений". – Киев: Наук. думка, 1972. – С. 197–222.
12. *Слюсарчук В. Е.* Новые теоремы о неустойчивости разностных систем по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 5. – С. 906–908.
13. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости разностных уравнений по первому приближению // Там же. – 1986. – **22**, № 4. – С. 722–723.
14. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости автономных систем по линейному приближению // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 112–114.
15. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1966. – 388 с.
16. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
17. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Получено 07.04.97,
после доработки – 14.04.99