УДК 517.5

О. В. Островська (Укр. ун-т харч. технологій, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, УЗАГАЛЬНЕНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ЗИГМУНДА

We establish estimates for upper bounds of deviations of the generalized Zygmund operators on classes of continuous (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis.

Встановлено оцінки для верхніх меж відхилень узагальнених операторів Зигмунда на класах неперервних (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі.

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична сумовна функція $(f \in L)$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— її ряд Фур'є, a_k, b_k — її коефіцієнти Фур'є.

Нехай $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $n = 0, \ldots$; $k = 0, \ldots, n-1$, — нескінченна трикутна матриця чисел з елементами

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - (k/n)^s, \quad k = 0, \ldots, n-1, \quad s > 0. \tag{2}$$

Поліноми вигляду

$$Z_n^s(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - (k/n)^s) A_k(f, x) \tag{3}$$

та деякі їх апроксимативні властивості вперше розглядав Зигмунд [1], тому їх називають сумами Зигмунда.

Якщо елементи матриці $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$ мають вигляд

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 1 - \dfrac{\varphi(n)}{\varphi(k)}, & k = 1, \ldots, n-1; \\ 0, & k \geq n, \end{cases}$$

де $\varphi(n)$ — деяка послідовність, то поліноми

$$Z_n^{\varphi}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(k)} \right) A_k(f, x) \tag{4}$$

називають узагальненими поліномами Зигмунда.

Вивченню апроксимативних властивостей поліномів Зигмунда та їх узагальнень присвячено багато робіт. Огляд результатів з цих питань наведено в роботі О. І. Степанця [2].

В 1983 р. О. І. Степанець (див. [3]) ввів нову класифікацію періодичних функцій таким чином.

Нехай $f \in L$ і (1) — її ряд Фур'є. Нехай $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргумента і β — фіксоване довільне число із $\mathbb{R}$. Припустимо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} A_k(f, x)$ є рядом Фур'є деякої функції з L. Цю функцію позначимо через $f_\beta^\psi(\cdot)$ і назвемо (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій f, які задовольняють ці умови, позначимо через L_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$, а $f_\beta^\psi(\cdot)$ належить деякій множині $\mathfrak{N}$, то вважають, що $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із множин L_β^ψ та $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначаються через C_β^ψ і $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ відповідно. Якщо $f \in L_\infty$ і $\|f\|_\infty \leq 1$, то будемо вважати, що $f \in C_{\beta,\infty}^\psi$.

Важливі результати, пов'язані з асимптотичними рівностями для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi, Z_n^s) = \sup\left\{\left| f(x) - Z_n^s(f; x)\right| : f \in C_{\beta,\infty}^\psi\right\}, \tag{5}$$

одержані в роботах Д. М. Бушева та О. І. Степанця [4, 5]. Розповсюдження деяких з них на випадок, коли замість класичних сум Зигмунда розглядаються узагальнені суми Зигмунда $Z_n^\varphi(f; x)$ (див. (4)), належать І. Б. Ковальській [6].

В 1988 р. О. І. Степанець [7 – 9] ввів нову класифікацію функцій, заданих на дійсній осі.

Нехай $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, — множина функцій, заданих на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, які мають скінченну норму

$$\|f\|_{\hat{p}} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+a)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad p \leq 1 < \infty,$$

$\|f\|_{\hat{\infty}} = \|f\|_M = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|$, тобто $\hat{L}_\infty = M$.

Через $\psi(v)$ позначимо опуклу функцію при $v \in [1, \infty)$, $\psi(v) \to 0$, якщо $v \to \infty$; на інтервалі $[0, 1]$ $\psi(v)$ задана так, щоб вона була неперервною, $\psi(0) = 0$, а $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на $[0, \infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$.

У випадку, коли для $\psi \in \mathfrak{A}$ виконується умова

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} \, dt \leq K < \infty \tag{6}$$

і $\beta \in \mathbb{R}$, в роботі [7, с. 18, 19] доведено таке твердження:

якщо $\psi \in F$, $\beta \in \mathbb{R}$, то функція

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t; \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \tag{7}$$

сумовна на $\mathbb{R}$; при цьому $\hat{\psi}(t) = O(t^{-2})$ при $|t| \to \infty$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$, то сумовною буде функція $\hat{\psi}(t; 0)$.

Через $\hat{L}_\beta^\psi$ позначимо множину функцій $f \in \hat{L}_1$, які майже при всіх x мають зображення

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \hat{\psi}(t, \beta) \, dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \tag{8}$$

де A_0 — стала і $\varphi \in \hat{L}_1$, а інтеграл розглядається як $\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a}$. Якщо $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\varphi \in \mathfrak{N} \subset \hat{L}_1$, то будемо писати $f \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

Кожну функцію, еквівалентну $\varphi(t)$ у співвідношенні (8), називають (ψ, β)-похідною функції $f(x)$ і позначають $f_\beta^\psi(x)$. Підмножини неперервних функцій із $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають через $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

Якщо $\mathfrak{N} = M$ і $\|f\|_{\hat{\infty}} \leq 1$, то клас неперервних функцій позначають $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$; якщо ж $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\|f_\beta^\psi\|_{\hat{1}} \leq 1$, то такий клас позначають $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$.

Агрегатами наближення неперервних функцій $f(x) \in \hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ і, зокрема, $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ будуть функції $U_\sigma(f, x)$, які будуються таким чином [7, 10].

Нехай $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — сім'я функцій, неперервних при всіх $v \geq 0$, що залежать від дійсного параметра σ. Кожній функції $f \in \hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ співставимо вираз

$$U_\sigma(f, x) = U_\sigma(f, x, \Lambda) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int_0^\infty \psi(v) \lambda_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt. \tag{9}$$

Якщо

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{v}{\sigma}\right)^s, & 0 \leq v \leq \sigma; \\ 0, & v \geq \sigma, \end{cases} \quad s > 0,$$

то вираз (9) називають оператором Зигмунда і позначають $Z_\sigma^{(s)}(f, x)$:

$$Z_\sigma^{(s)}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int_0^\sigma \left(1 - \left(\frac{v}{\sigma}\right)^s\right) \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt. \tag{10}$$

В періодичному випадку при $\sigma \in \mathbb{N}$ $Z_\sigma^{(s)}(f, x)$ є сумою Зигмунда [3] порядку $\sigma - 1$.

Якщо ж

$$\lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1 - v\dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}, & 0 \leq v \leq 1; \\ 1 - \dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & 1 \leq v \leq \sigma; \\ 0, & v \geq \sigma, \end{cases} \tag{11}$$

то вираз (9) називають узагальненим оператором Зигмунда і позначають $Z_\sigma^\psi(f, x, \Lambda)$.

З умов, накладених на функцію $\psi(v)$, з леми [11, с. 228] та твердження 7 з [9, с. 110] при $f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ випливає, що $Z_\sigma^\psi(f, x, \Lambda)$ є цілою функцією експоненціального типу, що не перевищує σ. Для кожної функції $f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ покладемо

$$\rho_\sigma(f, x) = f(x) - Z_\sigma^\psi(f, x, \Lambda).$$

Враховуючи співвідношення (8) і (9), маємо

$$\rho_\sigma(f, x, \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \hat{\tau}_\sigma(t)\, dt, \tag{12}$$

де

$$\hat{\tau}_\sigma(v) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_\sigma(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)' dv, \tag{13}$$

$$\tau_\sigma(v) = \begin{cases} v\psi(\sigma)\dfrac{\psi(v)}{\psi(1)}, & 0 \le v \le 1; \\ \psi(\sigma), & 1 \le v \le \sigma; \\ \psi(v), & v \ge \sigma. \end{cases} \tag{14}$$

В роботах [7 – 10] досліджуються властивості класів $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ та поведінка верхніх меж відхилень операторів Фур'є F_σ.

М. Г. Дзімістарішвілі [12] досліджував поведінку верхніх меж відхилень операторів Зигмунда, Стеклова, Рогозинського на класах $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ та $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$ в рівномірній та інтегральній метриках.

В даній роботі вивчаються наближення функцій класів $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ узагальненими операторами Зигмунда. При цьому встановлені оцінки верхніх меж відхилень

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi(f,x))_C = \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\rho_\sigma(f,x)\right\|_C = \sup_{f\in\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|f(x)-Z_\sigma^\psi(f,x)\right\|_C,$$

а в деяких випадках одержані асимптотичні рівності.

Кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ співставимо пару функцій $\eta(t)=\eta(\psi,t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi,t)$, покладаючи [3, с. 94]

$$\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2), \quad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t},$$

і з їх допомогою з $\mathfrak{M}$ виділимо три підмножини: $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$. До множини $\mathfrak{M}_C$ віднесемо всі функції $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких знайдуться такі сталі числа K_1 і K_2 (взагалі кажучи, залежні від $\psi(\cdot)$), що $0<K_1<\mu(\psi,t)\le K_2<\infty$; до множини $\mathfrak{M}_0$ — функції $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $0<\mu(\psi,t)<K$. Через $\mathfrak{M}_\infty$ позначимо підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi,t)$ при $t\to\infty$ монотонно зростає і необмежена зверху.

Якщо $\psi\in\mathfrak{A}$, і при цьому на інтервалі $t\ge 1$ $\psi\in\mathfrak{M}_X$, де X позначає або C, або 0, або ∞, то будемо вважати $\psi\in\mathfrak{A}_X$.

Якщо $\psi\in\mathfrak{A}_C\cup\mathfrak{A}_\infty$, то (див. [8, с. 111]) виконується умова (6).

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathfrak{A}_C\cup\mathfrak{A}_\infty$. *Справедливі оцінки*:

1) *для будь-якого* $\sigma\ge 1$ *і* $\mu(\sigma)\le\sigma$

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma) \le \mathscr{E}_\sigma(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, Z_\sigma^\psi) \le$$

$$\le \frac{2\psi(\sigma)\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma), \quad \sigma\to\infty;$$

2) *для будь-якого* $\sigma\ge 1$ *і* $\mu(\sigma)\ge\sigma$

$$\frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma) \le \mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + O(1)\right)\psi(\sigma), \qquad \sigma\to\infty,$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена по* σ.

Наведемо схему доведення. Беручи до уваги (див. [3, с. 109]) інваріантність класів $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ відносно зсуву аргумента, будемо розглядати $\rho_\sigma(f,x)$ при $x=0$.

Виконуючи заміну змінних в (12), маємо

$$\rho_\sigma(f) = \rho_\sigma(f,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt = J_1 + J_2,$$

де

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi + \int_\pi^{\mu(\sigma)} + \int_{\mu(\sigma)}^\infty\right) f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt, \tag{15}$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\int_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt. \tag{16}$$

1. Нехай $\mu(\sigma)\le\sigma$, $\sigma\ge 1$. В (15) оцінюємо кожний інтеграл окремо. При цьому використовуємо вигляд функцій $\tau_\sigma(v)$, властивості функції $\psi(\cdot)$ та $\psi'(\cdot)$, а також наступні оцінки, доведені в роботах [3, с. 59, 60; 10, с. 212] при $\psi\in\mathfrak{M}_C\cup\mathfrak{M}_\infty$:

$$\int_0^{\mu(\sigma)}\left|\int_1^\infty \psi(\sigma v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O(1)\psi(\sigma), \tag{17}$$

$$\int_{\mu(\sigma)}^\infty\left|\frac{\sigma}{t}\int_1^\infty \psi'(\sigma v)\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O(1)\psi(\sigma), \tag{18}$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена по σ. Інтеграл в (16) оцінюється аналогічно.

В результаті одержимо

$$\rho_\sigma(f,0) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{\pi\le|t|\le\mu(\sigma)} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\frac{\sin\left(t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dt -$$

$$- \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_{\pi\le|t|\le\sigma} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\frac{dt}{t} + O(1)\psi(\sigma). \tag{19}$$

Отже, маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) = \sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left| \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(\sigma)} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt \; - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi\le|t|\le\sigma} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t}\, dt \right| + O(1)\psi(\sigma). \tag{20}$$

Використовуючи рівність (7.31) з роботи [3, с. 114], знаходимо

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + \frac{2\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{21}$$

Для того щоб одержати оцінку знизу, розглянемо функцію $f^*(x)$, (ψ, β)-похідна якої визначається так:

$$f^\psi_\beta(t) = \begin{cases} +1, & -1 \le t \le 0; \\ -1, & 0 \le t \le 1; \\ 0, & t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

В цьому випадку із (20) одержуємо

$$|\rho(f^*, 0)| = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int\limits_{-\mu(\sigma)/\sigma}^{-\pi/\sigma} \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt \; + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\mu(\sigma)/\sigma}^{\pi/\sigma} \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt + 2\int\limits_{\pi/\sigma}^{1} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t}\, dt \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{22}$$

Таким чином, із (21) та (22) випливає справедливість першого твердження теореми.

2. Нехай тепер $\mu(\sigma) > \sigma$. Враховуючи цю умову, оцінимо кожен інтеграл в (15). При цьому одержимо

$$\rho_\sigma(f) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(\sigma)} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt \; -$$

$$- \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi\le|t|\le\sigma} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t}\, dt + O(1)\psi(\sigma). \tag{23}$$

Звідси випливає, що

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\sigma,\infty}, Z^\psi_\sigma) \le \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{24}$$

Якщо розглянути функцію $f^*(x)$, (ψ, β)-похідна якої дорівнює $\operatorname{sign}\sin(\sigma t + \beta\pi/2)$, де

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ -1, & t < 0; \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

то одержимо

$$\left|\rho_\sigma(f^*, Z_\sigma^\psi)\right| = \left|\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi/\sigma \le |t| \le \mu(\sigma)/\sigma} \frac{\left|\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|}{t} dt - \right.$$

$$\left. - \sin\frac{\beta\pi}{2}\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi/\sigma \le |t| \le 1} \frac{\operatorname{sign}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt\right| + O(1)\psi(\sigma). \tag{25}$$

Оцінюючи кожний з цих інтегралів, знаходимо

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \ge \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma),$$

що і доводить теорему.

Наслідок. *Якщо* $\mu(\sigma) = O(1)$, *то при* $\sigma \to \infty$

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\sigma,\infty}, Z^\psi_\sigma) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{26}$$

Доведення. Згідно з (20)

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) = \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left|\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi \le |t| \le \mu(\sigma)} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_{\pi \le |t| \le \sigma} f^\psi_\beta\left(\frac{t}{\sigma}\right)\frac{dt}{t}\right| + O(1)\psi(\sigma).$$

Якщо $\mu(\sigma) = O(1)$, то

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \le \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{27}$$

З іншого боку, із (22) випливає

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) \ge \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma). \tag{28}$$

Із співвідношень (27) та (28) випливає справедливість (26).

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}_\infty$ *і* $\sin(\beta\pi/2) = 0$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *справедлива асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma).$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 1. Дійсно, з (19) – (25) випливає

$$\rho_\sigma(f,0) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\pi \le |t| \le \mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt + O(1)\psi(\sigma).$$

Використавши результат із роботи [3, с. 114], маємо

$$\mathscr{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma) = \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} |\rho_\sigma(f,0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\psi(\sigma) \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left| \int\limits_{\pi \le |t| \le \mu(\sigma)} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\frac{\sin t}{t}\,dt \right| + O(1)\psi(\sigma) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma). \tag{29}$$

Наведені результати були анонсовані в [13].

Автор висловлює щиру вдячність О. І. Степанцю за постановку задачі і увагу до роботи.

1. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J. – 1945. – **12**, № 4. – P. 695 – 704.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные свойства многочленов Зигмунда // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 493 – 518.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
4. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
5. *Бушев Д. Н., Степанец А. И.* О приближении слабо дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 405 – 412.
6. *Ковальская И. Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике L // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метриках C и L_p. – Киев, 1988. – С. 3 – 28. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
7. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси. – Киев, 1988. – С. 3 – 41. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
8. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.
9. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
10. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
11. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
12. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда // Приближение операторами Зигмунда и наилучшее приближение. – Киев, 1986. – С. 3 – 42. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
13. *Островська О. В.* Наближення класів неперервних функцій операторами Зигмунда // Наближення класів неперервних функцій, заданих на дійсній осі. – Київ, 1994. – С. 1 – 15. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.5).

Одержано 05.07.99