УДК 517.987

В. Н. Радченко (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО L_0-ЗНАЧНЫМ МЕРАМ

We obtain conditions of convergence in L_0 of expressions $(\mu(A))^{-1}\int_A f\,d\mu$ in the case where a set A is decreasing.

Отримані умови збіжності в L_0 виразів $(\mu(A))^{-1}\int_A f\,d\mu$ при зменшенні множини A.

Пусть X — некоторое множество, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств X, $B(X)$ — множество действительнозначных измеримых ограниченных функций на X, (Ω, F, P) — вероятностное пространство. Будем рассматривать пространство $L_0(\Omega, F, P)$ (далее будем писать просто L_0), состоящее из измеримых функций $\xi: \Omega \to R$ с топологией сходимости по мере P. Будем называть L_0-значной мерой функцию $\mu: \mathcal{B} \to L_0$ такую, что $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0$ для $A_n \downarrow \varnothing$, и для $A \cap B = \varnothing$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ P-п. в. Множество A называем μ-пренебрежимым, если для любого $B \subset A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = 0$ P-п.в.

Для величин ξ из L_0 будем использовать квазинорму $\|\xi\| = \sup\{\delta: P\{|\xi| > \delta\} > \delta\}$. Очевидно, что $\|\xi + \eta\| \le \|\xi\| + \|\eta\|$ и $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow \|\xi_n\| \to \to 0$, $n \to \infty$.

Для f из $B(X)$ будем рассматривать $\int f\,d\mu$. Для простых f этот интеграл определяется стандартно, для остальных f положим $\int f\,d\mu = = p\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$, f_n — простые, $|f_n(x)| \le |f(x)|$, $f_n(x) \to f(x)$ для всех x кроме μ-пренебрежимого множества (здесь и далее рассматриваем сходимость при $n \to \infty$, если не указано другое).

Корректность такого определения обоснована в [1]. Теорема 2 из [1] показывает, что для данного случая применима теория интеграла, построенная в [2].

Полагая $\int_A f\,d\mu = \int f I_A\,d\mu$, получаем некоторые утверждения о дифференцируемости таких интегралов.

Теорема 1. 1. *Пусть для данных* $A_n \in \mathcal{B}$, $n \ge 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\mu(A_n) \ne 0$ *P-п. в., и* $f \in B(X)$. *Если множество величин из* L_0 $\left\{(\mu(A_n))^{-1}\sup_{A_n}|f(x)|, n \ge 1\right\}$ *ограничено по мере* P, *то* $(\mu(A_n))^{-1}\int_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{P} 0$.

2. *Существует* L_0-*значная мера* μ *на* $X = [0, 1]$ *и борелевские* $A_n \subset [0, 1]$, $A_n \downarrow \varnothing$, *такие, что для любой неубывающей* $f \in B([0,1])$, $f(x) \ge 0$, $(\mu(A_n))^{-1}\sup_{A_n} f(x) \overset{P}{\not\to} 0$, *существует* $g \in B([0,1])$, $0 \le g(x) \le f(x)$, *такая, что* $(\mu(A_n))^{-1}\int_{A_n} g\,d\mu \overset{P}{\not\to} 0$.

Доказательство. 1. Если наше утверждение неверно, то можем считать, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \;\; P\left\{\left|(\mu(A_n))^{-1}\int\limits_{A_n} f\,d\mu\right| > \varepsilon_0\right\} > \varepsilon_0.$$

Используя заданную в условии ограниченность по мере P, найдем $c_0 > 2$ такое, что

$$\forall n \;\; P\left\{ |\mu(A_n)| > \sup_{A_n} |f(x)| \,/\, c_0 \right\} > 1 - \varepsilon_0/2.$$

Из двух последних неравенств получим

$$\forall n \;\; P\left\{ \left| \int_{A_n} \left(f(x) \Big/ \sup_{A_n} |f(x)| \right) d\mu \right| > \varepsilon_0/c_0 \right\} > \varepsilon_0/2.$$

Учитывая, что $c_0 > 2$, для функции $g_n(x) = f(x) \,/\, \sup_{A_n} |f(x)|$ имеем $\left\| \int_{A_n} g_n \, d\mu \right\| > \varepsilon_0/c_0$. С другой стороны, поскольку $|g_n(x)| \le 1$, то

$$\left\| \int_{A_n} g_n \, d\mu \right\| \le 16 \sup_{B \subset A_n} \|\mu(B)\|. \qquad (1)$$

(Это неравенство следует из леммы 4 [3] при $d = 1$, $f \equiv 1$.) Поэтому существуют множества $B_n \subset A_n$ такие, что для любого n $\|\mu(B_n)\| > (\varepsilon_0/16c_0)$. Однако из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [2] и из того, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, следует: для $f_n = I_{B_n}$ $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{P} 0$. Получено противоречие.

2. Пусть ε_k, $k \ge 1$, — последовательность независимых случайных величин на (Ω, F, P) с $P\{\varepsilon_k = 1\} = P\{\varepsilon_k = -1\} = 1/2$ (берем их как элементы L_0 и меру P в этой части будем называть вероятностью). Рассмотрим L_0-значную меру μ, сосредоточенную на точках $1/n$, $n \ge 1$, такую, что

$$\mu(\{1/(2j-1)\}) = \varepsilon_{2j-1} 2^{-2^j}, \qquad \mu(\{1/(2j)\}) = \varepsilon_{2j} 2^{-2^j}, \quad j \ge 1.$$

Рассмотрим $A_n = (0, 1/(2n-1)]$, $n \ge 1$. Можем считать, что для некоторых $\alpha > 0$ и n_k, $k \ge 1$ $(n_{k+1} > n_k \ge 1)$ будет $\left\| \left(\mu(A_{n_k})\right)^{-1} f(1/(2n_k - 1)) \right\| > \alpha$. Зафиксируем $m \in N$ такое, что $2^{-m} < \alpha$. С вероятностью $1 - 2^{-m} > 1 - \alpha$ не выполняется хотя бы одно из равенств $\varepsilon_{2j-1} = -\varepsilon_{2j}$, $n_k \le j \le n_k + m - 1$, и, значит, с такой вероятностью $\left|\mu(A_{n_k})\right| > 2^{-2^{n_k+m}}$. Поэтому $f(1/(2n_k-1)) > \alpha 2^{-2^{n_k+m}}$.

Положим $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(1/(2n_k-1)) I_{\{1/(2n_k-1)\}}$. Легко видеть, что

$$\left| \int_{A_{n_k}} g \, d\mu \right| > f(1/(2n_k-1)) 2^{-1-2^{n_k}} > \alpha 2^{-1-2^{n_k+m}-2^{n_k}}.$$

С другой стороны, с вероятностью 2^{-m-1} имеют место все равенства $\varepsilon_{2j-1} = -\varepsilon_{2j}$, $n_k \le j \le n_k + m$ и тогда $\left|\mu\left(A_{n_k}\right)\right| < 4 \cdot 2^{-2^{n_k+m+1}}$. Объединив эти неравенства, имеем с вероятностью 2^{-m-1}

$$\left| \left(\mu\left(A_{n_k}\right)\right)^{-1} \int_{A_{n_k}} g \, d\mu \right| > \alpha 2^{2^{n_k+m} - 2^{n_k} - 3},$$

что дает утверждение 2 теоремы.

Теорема 2. *Пусть* μ — L_0*-значная мера на* $\mathcal{B}$, $\{a_n,\ n\geq 1\}$ — *последовательность ненулевых чисел. Пусть* $A_n\in\mathcal{B}$, $n\geq 1$, *таковы, что* $\mu(A_n)\neq 0$ *P-п. в.*

Пусть выполняются следующие условия:

1. *Множество величин* $\{\mu(B)\,/\,\mu(A_n),\ B\subset A_n,\ n\geq 1\}$ *в* L_0 *ограничено по мере* P.

2. $\forall f\in B(X)$ *с* $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A_n}|f(x)-c| = 0$ *имеет место*

$$(\mu(A_n))^{-1}\int\limits_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{P} c.$$

3. *Множество величин* $\{\mu(B)\,/\,a_n,\ B\subset A_n,\ n\geq 1\}$ *в* L_0 *ограничено по мере* P.

4. $\forall f\in B(X)$ *с* $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A_n}|f(x)|=0$ *имеет место*

$$a_n^{-1}\int\limits_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{P} 0.$$

Тогда из 1 *следует* 2, *из* 3 *следует* 4, *а при* $\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n = \varnothing$ *из* 2 *следует* 1, *а из* 4 *следует* 3.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $c = 0$. Пусть $\alpha_n=\sup_{x\in A_n}|f(x)|$. Используя для функции $g_n(x)=f(x)\,/\,\alpha_n$ и L_0-значной меры $\mu_n(B) = \alpha_n\mu(B\cap A_n)\,/\,\mu(A_n)$ неравенство (1), получаем

$$\left\|(\mu(A_n))^{-1}\int\limits_{A_n} f\,d\mu\right\| \leq 16\sup_B\|\alpha_n\,\mu(B\cap A_n)\,/\,\mu(A_n)\|.$$

Поскольку у нас $\alpha_n\to 0$, из условия 1 следует 2.

Теперь предположим что условие 1 неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon_0>0$ можно выбрать множества A_{n_k} и $B_k\subset A_{n_k}$, $k\geq 1$, такие, что

1′) $P\{|\mu(B_k)\,/\,\mu(A_{n_k})|>2^k\} > \varepsilon_0$;

2′) $B_k\cap\left(\bigcup\limits_{i>k}A_{n_i}\right) = \varnothing$;

3′) $\forall\, C\subset\bigcup\limits_{i>k}A_{n_i}$ $P\{|\mu(B_k)|>16\|\mu(C)\|\} > 1-\varepsilon_0\,/\,4$,

$$\|\mu(C)\| < \varepsilon_0\,/\,64.$$

Возможность налагать условие 2′ дает аналог теоремы Лебега 7.3.7 [2]. Из этой теоремы следует, что для любых $C_n\subset A_n$ $\mu(C_n)\xrightarrow{P}0$, и выбором n_i можем для любого $\varepsilon>0$ обеспечить $\sup_{C\subset A_{n_i}}\|\mu(C)\| < \varepsilon 2^{-i}$. Из аналогичных соображений можем добиваться выполнения условия 3′. Отметим, что $B_k\cap B_j = = \varnothing$ для $k\neq j$.

Теперь положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}I_{B_k}(x).$$

Из условия $2'$ следует, что $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A_n}|f(x)|=0$. Имеем

$$\left(\mu(A_{n_k})\right)^{-1}\int\limits_{A_{n_k}} f\,d\mu = \left(\mu(A_{n_k})\right)^{-1}\sum_{i\ge k}2^{-i}\mu(B_i) =$$

$$= 2^{-k-1}\left(\mu(A_{n_k})\right)^{-1}\left(2\mu(B_k)+\int g\,d\mu\right), \tag{2}$$

где g — некоторая функция, равная нулю вне $\bigcup_{i>k}A_{n_i}$, $|g(x)|\le 1$. Из неравенства (1) и из условия $3'$ получаем $\left\|\int g\,d\mu\right\|\le 16\sup\|\mu(C)\| < \varepsilon_0/4$ (супремум берется по $C\subset\bigcup_{i>k}A_{n_i}$). Еще раз используя условие $3'$ на множестве P-меры, не меньшей $1-\varepsilon_0/2$, имеем $\left|2\mu(B_k)+\int g\,d\mu\right|>|\mu(B_k)|$. Из условия $1'$ получаем, что (2) больше $1/2$ на множестве P-меры, не меньшей $\varepsilon_0/2$ для всех k. Значит, не выполняется условие $2'$. Утверждение теоремы об $2\Rightarrow 1$ доказано.

Утверждения, связанные с условиями 3 и 4, доказываются точно так же, как это сделано для условий 1 и 2. Необходимо лишь вместо $(\mu(A_n))^{-1}$ брать a_n^{-1}.

Заметим, что для винеровской случайной меры w на $[0, 1]$ $w(A) = \int_0^1 I_A(x)\,dw(x)$ (очевидно, что она является L_0-значной мерой в нашем смысле) условие 2 теоремы 2 выполняется для любых A_n. Действительно, для $B\subset A$ $|w(B)/w(A)|>c \Leftrightarrow 1-1/c < (w(A\setminus B)/w(B)) < -1+1/c$. Последнее отношение двух случайных величин имеет распределение с плотностью $p(t) = \sigma_1\sigma_2/\left(\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2t^2\right)\right)\le\le 1/(2\pi|t|)$ (здесь σ_1^2 — дисперсия $w(A\setminus B)$, σ_2^2 — дисперсия $w(B)$). Поэтому вероятность указанного двойного неравенства для $c>1$ не превышает $(2/c)(2\pi(1-1/c))^{-1}$, что стремится к нулю при $c\to\infty$.

1. *Радченко В. Н.* Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, № 3. – С. 594 – 596.
2. *Turpin P.* Convexites dans les espaces vectorielles topologiques generaux // Diss. Math. – 1976. – **131**. – 220 p.
3. *Радченко В. Н.* Равномерная интегрируемость и теорема Лебега для сходимости по L_0-значным мерам // Укр. мат. журн. –1996.– **48**, № 6. – С. 857 – 860.

Получено 20.06.97