УДК 517.944

І. В. Домбровський (Тернопіл. пед. ун-т)

ГЛАДКИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Conditions for the existence of a smooth solution for quasilinear hyperbolic equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $(x, t) \in [0, \pi] \times R$, are obtained. The theorem on the existence and uniqueness of solution is proved.

Знайдено умови існування гладкого розв'язку для квазілінійного гіперболічного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $(x, t) \in [0, \pi] \times R$. Доведено теорему існування єдиності розв'язку.

Встановимо умови існування гладкого розв'язку такого квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in R, \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times R. \tag{3}$$

Позначимо через C_π простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times R$, через $G_{\pi t}$ простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times R$ разом з похідною по t.

Для лінійного неоднорідного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times R, \tag{4}$$

у просторі $\tilde{A}_3 = \{g : g(x, t) = -g(x, t + \tilde{T}_3/2)\}$, де $\tilde{T}_3 = 4\pi/(2s-1)$, $s \in N$, справедливе наступне твердження [1, 2].

Теорема 1. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap \tilde{A}_3$, *то функція вигляду*

$$u(x, t) = (R_3^{4\pi} g)(x, t) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau =$$

$$= (Sg)(x, t) + (Zg)(x, t), \tag{5}$$

де S *— оператор Вейводи–Штедри* [3], $Q(\xi) = 1$, $0 \le \xi \le x$ *і* $Q(\xi) = -1$, $x < \xi \le \pi$, *є єдиною функцією з простору* $C_\pi^{2,2} \cap \tilde{A}_3$, *яка задовольняє умови* (2)–(4), *причому*

$$\| u(x, t) \|_{C_\pi} \le \pi^2 \| g(x, t) \|_{C_\pi}, \tag{6}$$

$$\| u_l(x, t) \|_{C_\pi} \le \pi \| g(x, t) \|_{C_\pi}, \quad l = t, x, \tag{7}$$

$$\| g(x, t) \|_{C_\pi} = \sup \{ | g(x, t) |, \quad 0 \le x \le \pi, \ t \in R \}.$$

За аналогією з лінійним випадком (5) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \left(R_3^{4\pi} F[u, u_t, u_x]\right)(x,t),\\
u_t(x,t) &= \left(R_3^{4\pi} F[u, u_t, u_x]\right)(x,t), \qquad (8)\\
u_x(x,t) &= \left(R_3^{4\pi} F[u, u_t, u_x]\right)(x,t),
\end{aligned}
$$

де $F[u, u_t, u_x](x,t) = f(x, t.u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t))$.

Означення. *Розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi$, $u \in C_\pi \cap \tilde{A}_3$ *системи інтегральних рівнянь* (8) *будемо називати гладким розв'язком задачі* (1)–(3).

Використовуючи інтегральне зображення розв'язку $u(x,t) = (R_3^{4\pi} g)(x,t)$ лінійної задачі (2)–(4), на основі теореми 1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $g \in C_\pi \cap \tilde{A}_3$. *Тоді задача* (2)–(4) *має єдиний гладкий розв'язок* $u = R_3^{4\pi} \equiv Sg + Zg$, *для якого справедливі оцінки* (6), (7).

Тепер сформулюємо аналогічне твердження для нелінійної задачі (1)–(3).

Теорема 3. *Нехай функція* $F[u, u_t, u_x](x,t) = f(x, t, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t))$ *задовольняє такі умови:*

1) $f(x, t, u, u_t, u_x) \in C([0,\pi] \times R^4)$;

2) $0 < \| F[0,0,0](x,t) \|_{C_\pi} = K < \infty$;

3) $|F[u'', u_t'', u_x''](x,t) - F[u', u_t', u_x'](x,t)| \le N_1 |u'' - u'| + N_2 |u_t'' - u_t'| + N_3 |u_x'' - u_x'|$;

4) $F[0,0,0](x,t) \in \tilde{A}_3$;

5) *для всіх* $u \in \tilde{A}_3 \cap C_\pi^{1,1}$ $F[u, u_t, u_x](x,t) \in \tilde{A}_3 \cap C_\pi$.

Тоді при виконанні умови

$$\pi^2 N_1 + \pi N_2 + \pi N_3 < 1 \qquad (9)$$

задача (2)–(4) *має єдиний гладкий розв'язок.*

Зауваження. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x,t)$ була визначена для $(x,t) \in [0,\pi] \times R$ і всіх (u, u_t, u_x), достатньо припустити, щоб вона була визначена для $(x,t) \in [0,\pi] \times R$, $\| u \|_{C_\pi} \le M$, $\| u_t \|_{C_\pi} \le M/\pi$, $\| u_x \|_{C_\pi} \le M/\pi$, де M задовольняє умову

$$\pi^2 K \le M\left(1 - (\pi^2 N_1 + \pi(N_2 + N_3))\right), \text{ або } \pi^2 M_1 \le M. \qquad (10)$$

Тут $M_1 = \| F[u, u_t, u_x](x,t) \|_{C_\pi}$ для $\| u \|_{C_\pi} \le M$, $\| u_t \|_{C_\pi} \le M/\pi$, $\| u_x \|_{C_\pi} \le M/\pi$.

Доведення. Нехай D — банаховий простір функцій $g(x,t) \in \tilde{A}_3 \cap C_\pi^{1,1}$ з нормою

$$\| g(x,t) \|_{C_\pi^{1,1}} = \max\left(\| g(x,t) \|_{C_\pi}, \pi \| g_t(x,t) \|_{C_\pi}, \pi \| g_x(x,t) \|_{C_\pi} \right). \qquad (11)$$

Розглянемо в кулі $\| g(x,t) \|_{C_\pi^{1,1}} \le M$ деяку функцію $g(x,t) \in D$. Нехай $u(x,t)$ — єдиний розв'язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[g, g_t, g_x](x,t), \qquad (12)$$

який задовольняє умову (2) і $u(x, t + \tilde{T}_3) = u(x,t)$, де $(x,t) \in [0,\pi] \times R$.

Визначимо в кулі $\| g(x,t) \|_{C_\pi^{1,1}} \le M$ з простору D оператор T_0, поклавши

$T_0[g](x,t) = u(x,t)$. Якщо $u^0(x,t) = T_0[0](x,t)$ і виконується умова 2 теореми 3, то з оцінок (6) і (7) при $g(x,t) = F[0,0,0](x,t)$ одержуємо

$$\left\| u^0 \right\|_{C_\pi} \le \pi^2 K, \quad \left\| u_t^0 \right\|_{C_\pi} \le \pi^2 K, \quad \left\| u_x^0 \right\|_{C_\pi} \le \pi^2 K. \tag{13}$$

Отже, норма функції $u^0(x,t) = T_0[0](x,t) \in \boldsymbol{D}$ задовольняє нерівність

$$\| T_0[0](x,t) \|_{C_\pi^{1,1}} \le \pi^2 K, \tag{14}$$

і якщо $u_1 = T_0(g_1)$, $u_2 = T_0(g_2)$, то згідно з умовою 3 теореми 3 і (13) одержимо

$$\| T_0(g_1) - T_0(g_2) \|_{C_\pi^{1,1}} \le (\pi^2 N_1 + \pi(N_2 + N_3)) \| g_1 - g_2 \|_{C_\pi^{1,1}}. \tag{15}$$

Тепер з нерівностей (9), (10), (14), (15) видно, що виконуються всі умови теореми 0.1 [4, с. 475]. Теорему доведено.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Хома Л. Г., Хома Н. Г.* Лінійна крайова періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №2. – С. 281–284.
3. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Одержано 19.03.99