УДК 519.21

В. В. Булдыгин, В. А. Коваль (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ С ОПЕРАТОРНЫМИ НОРМИРОВКАМИ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ И СУММ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

We establish the strong law of large numbers with operator normings for vector martingales and sums of orthogonal random vectors. We present its application when investigating the strong consistency of least squares estimates in linear regression and the asymptotic behavior of multidimensional autoregressive processes.

Встановлено підсилений закон великих чисел з операторними нормуваннями для векторних мартингалів та сум ортогональних випадкових векторів. Наведено його застосування до дослідження сильної слушності оцінок найменших квадратів в лінійній регресії та асимптотичної поведінки багатовимірних процесів авторегресії.

1. Введение. В настоящей работе изучаются необходимые и достаточные условия (типа Прохорова – Лоэва) для усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) с операторными нормировками для векторных мартингалов и последовательностей сумм ортогональных случайных векторов. Рассматриваются также применения полученных общих результатов для доказательства сильной состоятельности оценок наименьших квадратов неизвестных коэффициентов в многомерной линейной регрессии и при изучении асимптотических свойств решений многомерных стохастических рекуррентных уравнений.

Указанные задачи исследовались многими авторами. Так, УЗБЧ с операторными нормировками для последовательностей сумм независимых случайных векторов и для мартингалов изучались соответственно в работах [1 – 3] и [4, 5]. Вопросы сильной состоятельности оценок наименьших квадратов рассматривались в [5 – 7], асимптотические свойства решений стохастических рекуррентных уравнений — в [2, 3, 8]. Для последовательностей сумм ортогональных случайных величин УЗБЧ изучался, например, в [9].

2. Основные результаты. В дальнейшем используем следующие обозначения: $(S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — мартингал со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m < \infty$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $S_0 = 0$; $(A_n, n \geq 1)$ — последовательность неслучайных линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^d$; $\mathfrak{N}$ — множество всех монотонно возрастающих к бесконечности последовательностей натуральных чисел; $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — соответственно норма и скалярное произведение в евклидовом пространстве; E — знак математического ожидания.

Необходимое условие выполнения УЗБЧ с операторными нормировками для мартингалов приведено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть имеет место УЗБЧ*

$$\| A_n S_n \| \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty, \tag{1}$$

и выполняется условие

$$\mathrm{E}\left(\sup_{n \geq 1} \|A_n S_n\| \right) < \infty.$$

Тогда для любой последовательности $(n_j, j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ имеет место соотношение

$$\| A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) \| \to 0 \quad п.\,н., \quad j \to \infty. \tag{2}$$

Рассмотрим достаточные условия выполнения УЗБЧ с операторными нормировками для последовательностей сумм ортогональных случайных векторов. Полагаем $\log x = \ln \max\{x, e\}$, $\sum_{i=n+1}^{n} (\cdot) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $(X_i,\ i \geq 1)$ — *последовательность ортогональных случайных векторов в* $\mathbb{R}^m$ *(это означает, что* $\mathrm{E}\,\|X_i\|^2 < \infty$ *для всех* $i \geq 1$ *и для любого вектора* $a \in \mathbb{R}^m$ $\mathrm{E}\,(\langle a, X_i\rangle\langle a, X_j\rangle) = 0$ *для всех* $i \neq j$*). Предположим, что выполнено условие: для любого* $i \geq 1$

$$\|A_n X_i\| \xrightarrow{\;\mathrm{P}\;} 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Тогда найдется такое конечное множество $\mathfrak{N}_f \subset \mathfrak{N}$, *зависящее лишь от последовательности* $(A_n,\ n \geq 1)$, *что если для любой последовательности* $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}_f$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathrm{E}\,\|A_{n_{j+1}} X_i\|^2 \log^2(n_{j+1} - n_j) < \infty,$$

то имеет место УЗБЧ

$$\left\| A_n \sum_{i=1}^{n} X_i \right\| \to 0 \ \text{ п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Из данной теоремы получаем следующее очевидное следствие.

(Для операторной нормы будем использовать в дальнейшем то же обозначение, что и для векторной, считая эти нормы согласованными.)

Следствие 1. *Пусть* $\|A_n\| \to 0$, $n \to \infty$, *и выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geq i} \left(\mathrm{E}\,\|A_n X_i\|^2 \ln^2 n\right) < \infty.$$

Тогда имеет место (4).

Отметим, что УЗБЧ для последовательностей ортогональных случайных величин подробно изложен, например, в книге [9].

Перейдем к рассмотрению достаточных условий выполнения УЗБЧ с операторными нормировками для мартингалов.

Если мартингал $(S_n,\ n \geq 1)$ является суммой независимых симметричных случайных векторов $(X_i,\ i \geq 1)$, т. е. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, то условия (2), (3) будут необходимыми и достаточными для выполнения (1) (см. [1 – 3]). Для общего случая мартингалов достаточные условия приведены в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $X_i = S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$, *и выполнено условие* (3). *Тогда найдется такое конечное множество* $\mathfrak{N}_f \subset \mathfrak{N}$, *зависящее лишь от последовательности* $(A_n,\ n \geq 1)$, *что если для любой последовательности* $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}_f$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\,\|A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j})\|^2 < \infty, \tag{5}$$

то имеет место УЗБЧ (1).

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $X_i = S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$, *и выполнено условие* (3). *Если для любой последовательности* $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ *выполнено условие* (5), *то имеет место* (1).

Следствие 3. *Пусть* $X_i = S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$, *и выполнено условие* (3). *Если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geq i} \mathrm{E}\, \|A_n X_i\|^2 < \infty, \tag{6}$$

то имеет место (1).

Аналогичный результат был получен в работе [1] (см. также [2, 3]) для последовательностей независимых симметричных случайных векторов $(X_i,\ i \geq 1)$.

Из следствия 3 очевидным образом вытекает основной результат работы [5] (в случае квадратично интегрируемых мартингалов).

Следствие 4. *Пусть* $\|A_n\| \to 0$, $n \to \infty$, *и выполнено условие: для всех* $x \in \mathbb{R}^m$ *и всех* $n \geq 1$ $\|A_n x\| \geq \|A_{n+1} x\|$. *Если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\, \|A_i (S_i - S_{i-1})\|^2 < \infty,$$

то имеет место (1).

Замечание **1.** Сформулированные выше результаты останутся, очевидно, справедливыми и в том случае, если вместо евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^d$ будем рассматривать конечномерные евклидовы пространства соответственно $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

3. Доказательство теорем и следствия 3. ***Доказательство теоремы*** **1.** В силу условия (1) для доказательства соотношения (2) достаточно показать, что для любой последовательности $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ имеет место

$$\|A_{n_{j+1}} S_{n_j}\| \to 0 \ \text{ п. н.}, \quad j \to \infty.$$

Используя условия теоремы 1 и теорему Лебега – Леви [10], получаем

$$\|A_{n_{j+1}} S_{n_j}\| = \|\mathrm{E}\,(A_{n_{j+1}} S_{n_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{n_j})\| \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\,(\|A_{n_{j+1}} S_{n_{j+1}}\| \mid \mathcal{F}_{n_j}) \to 0 \ \text{ п. н.}, \quad j \to \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание **2.** Теорема 1 справедлива и в том случае, если $(S_n,\ \mathcal{F}_n,\ n \geq 0)$ — мартингал в сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, а $(A_n,\ n \geq 1)$ — последовательность линейных непрерывных операторов, которые действуют из $\mathcal{X}$ в сепарабельное банахово пространство $\mathcal{Y}$.

Доказательство теоремы **3.** Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть для последовательности неслучайных векторов* $(A_n,\ n \geq 1)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *выполнено условие*

$$\|A_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда найдется такое конечное множество $\mathfrak{N}_f \subset \mathfrak{N}$, *зависящее лишь от последовательности* $(A_n,\ n \geq 1)$, *что если для любой последовательности* $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}_f$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\, \langle A_{n_{j+1}}, S_{n_{j+1}} - S_{n_j} \rangle^2 < \infty, \tag{7}$$

то имеет место УЗБЧ

$$\langle A_n, S_n \rangle \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Будем доказывать методом математической индукции по размерности пространства $\mathbb{R}^m$. Схема доказательства аналогична приведенной в [1].

Докажем справедливость леммы при $m = 1$.

Пусть $(A_n,\ n \ge 1) = (a_n,\ n \ge 1) \subset \mathbb{R}^1$ и $|a_n| \to 0,\ n \to \infty$. Зафиксируем произвольное число $\lambda > 1$ и положим

$$\tilde{n}_j = \max\{n : |a_n| \ge \lambda^{-j}\}, \quad j \ge 1.$$

В дальнейшем считаем, что $\max\{\varnothing\} = 0$. Покажем, что если для последовательности $(\tilde{n}_j,\ j \ge 1)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tilde{n}_{j+1}}^2 \, \mathrm{E}\,(S_{\tilde{n}_{j+1}} - S_{\tilde{n}_j})^2 < \infty, \tag{8}$$

то

$$a_n S_n \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty, \tag{9}$$

где $(S_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ — мартингал в $\mathbb{R}^1$.

Если $\tilde{n}_j < n \le \tilde{n}_{j+1}$, то $|a_n| < \lambda^{-j}$ и

$$|a_n S_n| \le |a_n (S_n - S_{\tilde{n}_j})| + |a_n S_{\tilde{n}_j}| \le T_j + \lambda^{-j} |S_{\tilde{n}_j}|, \tag{10}$$

где

$$T_j = \lambda^{-j} \max_{\tilde{n}_j < n \le \tilde{n}_{j+1}} |S_n - S_{\tilde{n}_j}|.$$

Покажем, что $T_j \to 0$ п. н., $j \to \infty$. Используя неравенство Колмогорова для мартингалов (см., например, [11]), для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathrm{P}(T_j \ge \varepsilon) = \mathrm{P}\left(\max_{\tilde{n}_j < n \le \tilde{n}_{j+1}} |S_n - S_{\tilde{n}_j}| > \varepsilon \lambda^j \right) \le$$

$$\le \varepsilon^{-2} \lambda^{-2j} \, \mathrm{E}\,(S_{\tilde{n}_{j+1}} - S_{\tilde{n}_j})^2 \le \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^2 a_{\tilde{n}_{j+1}}^2 \, \mathrm{E}\,(S_{\tilde{n}_{j+1}} - S_{\tilde{n}_j})^2.$$

Отсюда в силу (8) имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_j \ge \varepsilon) < \infty,$$

т. е. $T_j \to 0$ п. н., $j \to \infty$.

Положим $\tilde{n}_0 = 0$. Тогда

$$\lambda^{-j} |S_{\tilde{n}_j}| \le \lambda^{-j} \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^k T_k.$$

Отсюда с учетом леммы Теплица и соотношения $T_j \to 0$ п. н., $j \to \infty$, следует, что $\lambda^{-j} |S_{\tilde{n}_j}| \to 0$ п. н., $j \to \infty$. Поэтому из неравенства (10) следует (9).

Таким образом, справедливость леммы при $m = 1$ доказана.

Предположим далее, что лемма верна при $m = \nu \geq 1$ и докажем ее справедливость при $m = \nu + 1$.

Обозначим последнюю координату вектора $A_n \in \mathbb{R}^{\nu+1}$ через a_n. Из условия $\| A_n \| \to 0$, $n \to \infty$, следует, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Без ограничения общности можем предполагать, что $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ [2].

Зафиксируем произвольное число $\lambda > 1$ и определим последовательность натуральных чисел $(\hat{n}_j,\ j \geq 1)$ по правилу

$$\hat{n}_j = \max\{n : |a_n| \geq \lambda^{-j}\}.$$

Поскольку последовательность $(\hat{n}_j,\ j \geq 1)$ может не быть строго монотонной, то удалим из нее повторяющиеся элементы и вновь полученную последовательность также обозначим через $(\hat{n}_j,\ j \geq 1)$.

Имеет место тождество

$$a_{\hat{n}_{j+1}} \langle A_n, S_n \rangle = \langle a_{\hat{n}_{j+1}} A_n - a_n A_{\hat{n}_{j+1}}, S_n \rangle +$$

$$+ a_n \left(\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_n - S_{\hat{n}_j} \rangle + \langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} \rangle - \langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} - S_{\hat{n}_j} \rangle \right). \tag{11}$$

Последняя координата в векторе $a_{\hat{n}_{j+1}} A_n - a_n A_{\hat{n}_{j+1}}$ равна нулю. Первые ν координат вектора A_n обозначим через $\tilde{A}_n$, вектора S_n — через $\tilde{S}_n$. Для всех натуральных $n \geq 1$ положим

$$B_n = \Theta_n \left(a_n^{-1} \tilde{A}_n - a_{\hat{n}_{j+1}}^{-1} \tilde{A}_{\hat{n}_{j+1}} \right), \qquad n \in [\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1}),$$

где $\Theta_n = \min\{|a_n|, |a_{\hat{n}_{j+1}}|\}$.

Для $n \in (\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1})$ из (11) получим

$$|\langle A_n, S_n \rangle| \leq \lambda \max_{\hat{n}_j \leq n < \hat{n}_{j+1}} |\langle B_n, \tilde{S}_n \rangle| +$$

$$+ 2\lambda \max_{\hat{n}_j < n \leq \hat{n}_{j+1}} |\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_n - S_{\hat{n}_j} \rangle| + \lambda |\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} \rangle|. \tag{12}$$

Для доказательства леммы покажем, что все слагаемые в правой части неравенства (12) стремятся к нулю при $j \to \infty$.

Докажем сначала, что

$$\langle B_n, \tilde{S}_n \rangle \to 0 \ \text{ п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Так как $B_n, \tilde{S}_n \in \mathbb{R}^\nu$, то по предположению индукции найдется такое конечное множество $\mathfrak{N}''_f \subset \mathfrak{N}$, что как только для любой последовательности $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}''_f$ выполнено условие

$$\sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{E} \langle B_{n_j}, \tilde{S}_{n_j} - \tilde{S}_{n_{j-1}} \rangle^2 < \infty \tag{14}$$

и

$$\| B_n \| \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{15}$$

то имеет место (13).

Так как при $n \in [\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1})$

$$\|B_n\| \le \|\tilde{A}_n\| + \|\tilde{A}_{\hat{n}_{j+1}}\|,$$

то отсюда с учетом условия $\|A_n\| \to 0,\ n \to \infty,$ следует (15).

Докажем (14). Построим такое зависящее лишь от векторов (A_n) конечное множество $\mathfrak{N}'_f \subset \mathfrak{N}$, что как только условие (7) выполняется для всех $(n_j,\ j \ge 1) \in \mathfrak{N}'_f$, то (14) имеет место для всех $(n_j,\ j \ge 1) \in \mathfrak{N}''_f$.

Зафиксируем в множестве $\mathfrak{N}''_f$ произвольную последовательность $(n_j,\ j \ge 1)$. С помощью этой последовательности и последовательности $(\hat{n}_j,\ j \ge 1)$ определим на множестве натуральных чисел последовательность интервалов $(I_n,\ n \ge 1)$ следующей рекуррентной процедурой. Через $\mathcal{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Положим $I_1 = [\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1}) \cap \mathcal{N}$, если $n_1 \in [\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1})$; если интервал I_i определен, то I_{i+1} — ближайший справа к I_i (и отличный от него) интервал из последовательности интервалов $([\hat{n}_j, \hat{n}_{j+1}) \cap \mathcal{N},\ j \ge 1)$, содержащий к тому же элементы последовательности $(n_j,\ j \ge 1)$. Теперь для $i \ge 1$ положим

$$j(i) = \max\{p:\ n_p \in I_i \cap (n_j,\ j \ge 1)\},$$

$$\bar{j}(i) = \min\{p:\ n_p \in I_i \cap (n_j,\ j \ge 1)\},$$

$$m_i = \max\{p \in I_i\} + 1.$$

Определим три последовательности подлежащего построению множества $\mathfrak{N}'_f$, связанные с последовательностью $(n_j,\ j \ge 1)$. Это, во-первых, сама последовательность $(n_j,\ j \ge 1)$ и, во-вторых, последовательности

$$(n_{j(1)}, m_2, n_{j(3)}, m_4, \ldots, n_{j(2p-1)}, m_{2p}, \ldots),$$

$$(m_1, n_{j(2)}, m_3, n_{j(4)}, \ldots, m_{2p-1}, n_{j(2p)}, \ldots).$$

Вследствие неравенств

$$n_{j(i)} < m_i \le n_{\bar{j}(i+1)} \le n_{j(i+1)} < m_{i+1}, \quad i \ge 1,$$

каждая из двух последних последовательностей принадлежит множеству $\mathfrak{N}$. Совокупность трех указанных последовательностей обозначим через $\tilde{\mathfrak{N}}_{(n_j)}$.

1) Предположим, что для всех последовательностей из множества $\tilde{\mathfrak{N}}_{(n_j)}$ выполнено условие (7), т. е.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{E}\,\langle A_{m_{2p}}, S_{m_{2p}} - S_{n_{j(2p-1)}}\rangle^2 < \infty, \tag{16}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{E}\,\langle A_{m_{2p+1}}, S_{m_{2p+1}} - S_{n_{j(2p)}}\rangle^2 < \infty, \tag{17}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{E}\,\langle A_{n_j}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2 < \infty. \tag{18}$$

Используя свойство ортогональности слагаемых в квадратично интегрируемых мартингалах, имеем

$$\mathrm{E}\langle A_{m_{2p}}, S_{n_{j(2p)}} - S_{n_{j(2p-1)}}\rangle^2 \le \mathrm{E}\langle A_{m_{2p}}, S_{m_{2p}} - S_{n_{j(2p-1)}}\rangle^2,$$

$$\mathrm{E}\langle A_{m_{2p+1}}, S_{n_{j(2p+1)}} - S_{n_{j(2p)}}\rangle^2 \le \mathrm{E}\langle A_{m_{2p+1}}, S_{m_{2p+1}} - S_{n_{j(2p)}}\rangle^2.$$

Отсюда и из (16), (17) следует

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{2p}}, S_{n_{j(2p)}} - S_{n_{j(2p-1)}}\rangle^2 < \infty,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{2p+1}}, S_{n_{j(2p+1)}} - S_{n_{j(2p)}}\rangle^2 < \infty.$$

Объединяя эти два соотношения в одно, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_{j(i+1)}} - S_{n_{j(i)}}\rangle^2 < \infty. \tag{19}$$

Пусть $n_j \in I_{i+1} = [\hat{n}_p, \hat{n}_{p+1})$. Тогда

$$\langle B_{n_j}, \tilde{S}_{n_j} - \tilde{S}_{n_{j-1}}\rangle = \Theta_{n_j} a_{n_j}^{-1}\langle A_{n_j}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle -$$

$$- \Theta_{n_j} a_{\hat{n}_{p+1}}^{-1}\langle A_{\hat{n}_{p+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle.$$

Отсюда, учитывая, что $\hat{n}_{p+1} = m_{i+1}$, находим

$$\langle B_{n_j}, \tilde{S}_{n_j} - \tilde{S}_{n_{j-1}}\rangle^2 \le$$

$$\le 2(\langle A_{n_j}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2 + \langle A_{m_{i+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2). \tag{20}$$

Поскольку $\bar{j}(i+1) - 1 = j(i)$, то справедливы равенства

$$\sum_{j=\bar{j}(2)}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=\bar{j}(i+1)}^{j(i+1)} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\sum_{j=\bar{j}(i+1)}^{j(i+1)} \langle A_{m_{i+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_{j(i+1)}} - S_{n_{\bar{j}(i+1)-1}}\rangle^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_{j(i+1)}} - S_{n_{j(i)}}\rangle^2. \tag{21}$$

Из (19), (21) следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\langle A_{m_{i+1}}, S_{n_j} - S_{n_{j-1}}\rangle^2 < \infty.$$

Тогда из данного соотношения, (18) и неравенства (20) следует соотношение (14).

Теперь ясно, что если положить

$$\mathfrak{N}'_f = \bigcup_{(n_j)\in\mathfrak{N}''_f} \tilde{\mathfrak{N}}_{(n_j)},$$

то будет иметь место (13). Из (13), в свою очередь, следует, что первое слагаемое в правой части неравенства (12)

$$\max_{\hat{n}_j \le n < \hat{n}_{j+1}} |\langle B_n, \tilde{S}_n\rangle| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad j \to \infty.$$

Покажем теперь, что если для последовательности $(\hat{n}_j,\ j \ge 1)$ выполнено условие (7), то второе слагаемое в правой части неравенства (12) стремится к нулю, т. е.

$$T_j = \max_{\hat{n}_j < n \le \hat{n}_{j+1}} |\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_n - S_{\hat{n}_j}\rangle| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad j \to \infty. \tag{22}$$

Действительно, поскольку $(\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_n - S_{\hat{n}_j}\rangle,\ \mathcal{F}_n,\ n \ge \hat{n}_j)$ — мартингал, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_j \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\,\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} - S_{\hat{n}_j}\rangle^2 < \infty.$$

Отсюда следует (22).

Наконец, покажем, что последнее слагаемое в правой части неравенства (12) стремится к нулю, т. е.

$$V_j = \langle A_{\hat{n}_j}, S_{\hat{n}_j}\rangle \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad j \to \infty.$$

Имеет место тождество

$$a_{\hat{n}_j}\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}}\rangle = a_{\hat{n}_j}\langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} - S_{\hat{n}_j}\rangle +$$

$$+ a_{\hat{n}_{j+1}}\langle A_{\hat{n}_j}, S_{\hat{n}_j}\rangle - \langle a_{\hat{n}_{j+1}} A_{\hat{n}_j} - a_{\hat{n}_j} A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_j}\rangle.$$

Отсюда

$$V_{j+1} = a_{\hat{n}_{j+1}} a_{\hat{n}_j}^{-1} V_j + \delta_j, \quad j \ge 1, \tag{23}$$

где

$$\delta_j = \langle A_{\hat{n}_{j+1}}, S_{\hat{n}_{j+1}} - S_{\hat{n}_j}\rangle - \langle B_{\hat{n}_j}, \tilde{S}_{\hat{n}_j}\rangle.$$

В силу доказанного ранее $\delta_j \to 0$ п. н., $j \to \infty$. Из (23) следует

$$V_{j+2} = a_{\hat{n}_{j+2}} a_{\hat{n}_j}^{-1} V_{j+1} + a_{\hat{n}_{j+2}} a_{\hat{n}_{j+1}}^{-1} \delta_j + \delta_{j+1}, \quad j \ge 1.$$

Поскольку $\left|a_{\hat{n}_{j+2}} a_{\hat{n}_j}^{-1}\right| \le \lambda^{-1} < 1$ и $\left|a_{\hat{n}_{j+2}} a_{\hat{n}_{j+1}}^{-1}\right| < 1$, то отсюда с учетом леммы Теплица следует, что $V_j \to 0$ п. н., $j \to \infty$.

Для завершения доказательства леммы 1 осталось положить

$$\mathfrak{N}_f = \mathfrak{N}'_f \cup \{(\hat{n}_j,\ j \ge 1)\}.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь условие леммы 1 $\|A_n\| \to 0$, $n \to \infty$, можно заменить более слабым.

Лемма 2. *Пусть для последовательности неслучайных векторов* $(A_n,\ n \geq 1)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *выполнено условие: для любого* $i \geq 1$

$$\langle A_n, X_i \rangle \xrightarrow{\ \mathrm{P}\ } 0, \quad n \to \infty,$$

где $X_i = S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. *Тогда найдется такое конечное множество* $\mathfrak{N}_f \subset \mathfrak{N}$, *зависящее лишь от последовательности* $(A_n,\ n \geq 1)$, *что если для любой последовательности* $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}_f$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E} \langle A_{n_{j+1}}, S_{n_{j+1}} - S_{n_j} \rangle^2 < \infty,$$

то

$$\langle A_n, S_n \rangle \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство леммы 2 проводится с помощью дословных рассуждений из книги [2] (леммы 3.2.2 – 3.2.5) (см. также [1, 3]).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3 в общем случае. Пусть $(e_1, \ldots \ldots, e_d)$ — естественный базис в пространстве $\mathbb{R}^d$ и A_n^* — оператор, сопряженный к оператору A_n. Поскольку

$$A_n S_n = \sum_{k=1}^{d} \langle A_n S_n, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{d} \langle A_n^* e_k, S_n \rangle e_k,$$

то (1) имеет место тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, \ldots, d$

$$\langle A_n^{(k)}, S_n \rangle \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty, \tag{24}$$

где $A_n^{(k)} = A_n^* e_k$. Пусть далее $\mathfrak{N}_f^{(k)}$ — множество, определенное в лемме 2 для последовательности векторов $(A_n^{(k)},\ n \geq 1)$, $k = 1, \ldots, d$. Покажем, что множество $\mathfrak{N}_f = \bigcup_{k=1}^{d} \mathfrak{N}_f^{(k)}$ есть искомое конечное множество, указанное в формулировке теоремы 3. Действительно, если выполняется условие (3), то для каждого $k = 1, \ldots, d$ и для всех $i \geq 1$

$$\langle A_n^{(k)}, X_i \rangle \xrightarrow{\ \mathrm{P}\ } 0, \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Предположим, что для любой последовательности $(n_j,\ j \geq 1) \in \mathfrak{N}_f$ выполнено условие (5). Тогда для каждого $k = 1, \ldots, d$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E} \langle A_{n_{j+1}}^{(k)}, S_{n_{j+1}} - S_{n_j} \rangle^2 < \infty. \tag{26}$$

Теперь из леммы 2 в силу (25) и (26) следуют соотношения (24) и, значит, УЗБЧ (1).

Теорема 3 доказана.

***Доказательство следствия* 3.** Покажем, что из условия (6) следует условие (5):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E} \| A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathrm{E} \| A_{n_{j+1}} X_i \|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \sup_{n \geq i} \mathrm{E} \| A_n X_i \|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geq i} \mathrm{E} \| A_n X_i \|^2 < \infty.$$

Следствие 3 доказано.

Доказательство теоремы **2** почти дословно повторяет доказательство теоремы 3 с заменой в соответствующих местах неравенства Колмогорова для мартингалов на неравенство Радемахера для ортогональных случайных величин (см., например, [9]).

4. Применения. Рассмотрим применение доказанных теорем к исследованию сильной состоятельности оценок наименьших квадратов неизвестного векторного коэффициента многомерной линейной регрессии

$$Y_i = B_i^{\mathrm{T}} V + Z_i, \quad i = 1, 2, \ldots ,$$

где $(Z_i,\ i \geq 1)$ — последовательность случайных вектор-столбцов в $\mathbb{R}^m$, $(B_i,\ i \geq 1)$ — последовательность неслучайных матриц размера $d \times m$; V — неизвестный векторный коэффициент; $(Y_i,\ i \geq 1)$ — последовательность наблюдаемых векторов; T — знак транспонирования.

В дальнейшем под $\|\cdot\|$ понимаем евклидову норму (векторную либо матричную).

Так как оценки наименьших квадратов имеют вид

$$\hat{V}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} B_i Y_i = V + \left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} B_i Z_i,$$

то соотношение

$$\| V_n - V \| \to 0 \ \text{ п. н.}, \ \ n \to \infty,$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} B_i Z_i \right\| \to 0 \ \text{ п. н.}, \ \ n \to \infty. \tag{27}$$

Здесь предполагается, что матрицы $\left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}},\ n \geq 1\right)$ невырожденные.

Как следствие теоремы 3 получим следующий результат, доказанный в работе [7] непосредственно.

***Следствие* 5.** *Пусть* $(Z_i,\ i \geq 1)$ — *мартингал-разность и выполнены условия*

$$\mathbb{C} = \sup_{n \geq 1} \mathrm{E} \|Z_n\|^2 < \infty,$$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда имеет место соотношение (27).

Доказательство. Положим

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^{n} B_i B_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} B_i Z_i, \quad n \geq 1,$$

и проверим выполнение условий следствия 2.

Так как $\|A_n\| \to 0,\ n \to \infty$, то условие (3), очевидно, выполнено.

Проверим условие (5). Отметим, что матрицы $(A_n,\ n \geq 1)$ симметричные и положительно определенные. Имеем

Доказательство следствия 6 проводится аналогично доказательству следствия 5 с использованием теоремы 2.

Рассмотрим теперь применение доказанных теорем к изучению асимптотических свойств решений стохастических рекуррентных уравнений.

Пусть имеем рекуррентное уравнение в $\mathbb{R}^m$

$$Y_n = A\,Y_{n-1} + B_n Z_n, \quad n \geq 1, \tag{29}$$

где A, $(B_n,\ n \geq 1)$ — неслучайные матрицы размера $m \times m$; $(Z_n,\ n \geq 1)$ — последовательность случайных вектор-столбцов; Y_0 — случайное начальное условие.

Пусть элементарными делителями λ-матрицы $\lambda I - A$ являются

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{p_2},\ \ldots\ ,\ (\lambda - \lambda_\nu)^{p_\nu},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ — собственные значения матрицы A, среди которых могут быть равные; $p_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, \nu$, $\sum_{i=1}^{\nu} p_i = d$. Положим

$$r = \max_{1 \leq j \leq \nu} |\lambda_j|, \quad p = \max_{j \in \mathcal{A}} p_j,$$

где $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \ldots, \nu\}$ такое, что $j \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $|\lambda_j| = r$.

В дальнейшем $(a_n,\ n \geq 1)$ обозначает произвольную фиксированную последовательность положительных чисел.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \geq 1)$ — *мартингал-разность и выполнены условия*

$$\det A \neq 0, \tag{30}$$

$$a_n r^n n^{p-1} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{31}$$

$$\mathbb{C} = \sup_{n \geq 1} \mathrm{E}\,\|Z_n\|^2 < \infty, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|B_i\|^2 \sup_{n \geq i} \left(a_n r^{n-i} (n+1-i)^{p-1}\right)^2 < \infty. \tag{33}$$

Тогда

$$a_n \|Y_n\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{34}$$

Доказательство. Справедлива формула

$$Y_n = A^n Y_0 + \sum_{i=1}^{n} A^{n-i} B_i Z_i, \quad n \geq 1.$$

Отсюда

$$a_n \|Y_n\| \leq a_n \|A^n\|\,\|Y_0\| + \left\| a_n A^n \sum_{i=1}^{n} A^{-i} B_i Z_i \right\|. \tag{35}$$

В работе [13] показано, что справедливо неравенство

$$\|A^n\| \leq M r^n (n+1)^{p-1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где M — некоторая конечная постоянная. Поэтому из данного неравенства и условия (31) следует, что в (35)

$$a_n \| A^n \| \| Y_0 \| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{36}$$

Положим

$$A_n = a_n A^n, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1,$$

где $X_i = A^{-i} B_i Z_i$, $i \geq 1$, и, воспользовавшись следствием 3, покажем, что второе слагаемое в правой части неравенства (35) также стремится к нулю.

Действительно, условие (3) выполнено, так как $\|A_n\| = a_n \| A^n \| \to 0$, $n \to \to \infty$.

Проверим условие (6):

$$\mathrm{E} \| A_n X_i \|^2 = \mathrm{E} \| a_n A^n A^{-i} B_i Z_i \|^2 \leq \mathbb{C}\, a_n^2 \|B_i\|^2 \|A^{n-i}\|^2 \leq$$
$$\leq \mathbb{C} M \|B_i\|^2 a_n^2 (r^{n-i} (n+1-i)^{p-1})^2.$$

Отсюда и из условия (33) следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \geq i} \mathrm{E} \| A_n X_i \|^2 < \infty.$$

Поэтому на основании следствия 3 заключаем, что

$$\| A_n S_n \| = \left\| a_n A^n \sum_{i=1}^{n} A^{-i} B_i Z_i \right\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{37}$$

Теперь из (35) – (37) следует утверждение теоремы.

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим два очевидных следствия из теоремы 4.

Следствие 7. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \geq 1)$ — *мартингал-разность,* $r < 1$, *выполнены условия* (30), (32) *и последовательность* $(a_n,\ n \geq 1)$ *монотонно убывает. Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \|B_i\|^2 < \infty,$$

то имеет место (34).

Следствие 8. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \geq 1)$ — *мартингал-разность,* $r \geq 1$, *выполнены условия* (30), (32) *и* $a_n r^n n^{p-1} \downarrow 0$, $n \to \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \|B_i\| i^{p-1})^2 < \infty,$$

то имеет место (34).

Теорема 5. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \geq 1)$ — *последовательность ортогональных случайных векторов и выполнены условия* (30) – (32). *Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|B_i\|^2 \sup_{n \geq i} (a_n r^{n-i} (n+1-i)^{p-1} \ln n)^2 < \infty,$$

то имеет место (34).

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 4 с использованием следствия 1.

Следствие **9.** *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \ge 1)$ — *последовательность ортогональных случайных векторов*, $r \ge 1$, *выполнены условия* (30), (32) *и* $a_n r^n n^{p-1} \ln n \downarrow 0,\ n \to \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \|B_i\|\, i^{p-1} \ln i)^2 < \infty,$$

то имеет место (34).

Рассмотрим далее УЗБЧ для решений уравнения (29).

Пусть λ-матрица $\lambda I - A$ имеет элементарные делители [12]

$$(\lambda - 1)^{u_1},\ \ldots,\ (\lambda - 1)^{u_\nu},\ (\lambda - \lambda_1)^{v_1},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_\tau)^{v_\tau},$$

где

$$1 \le \nu, \tau \le m; \quad u_j \ge 1,\ j = \overline{1, \nu}; \quad v_j \ge 1,\ j = \overline{1, \tau}; \quad \lambda_j \ne 1,\ j = \overline{1, \tau};$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} u_j + \sum_{j=1}^{\tau} v_j = m.$$

Среди собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ матрицы A могут быть равные. Из рассмотрения не исключается случай, когда нет элементарных делителей вида $(\lambda - 1)^{u_j}$. Будем тогда полагать $\nu = 0$ и $u_0 = 0$. В другом крайнем случае, когда все элементарные делители имеют вид $(\lambda - 1)^{u_j}$, будем полагать $\tau = 0$ и $\lambda_0 = 0$.

Обозначим через r спектральный радиус матрицы A и введем параметры R и q следующим образом.

1. Пусть $r < 1$. Тогда полагаем $R = 1$ и $q = 1$.

2. Пусть $r = 1$. Положим

$$u = \max_{1 \le j \le \nu} u_j, \qquad v = \max_{j \in \mathcal{A}_1} v_j,$$

где $\mathcal{A}_1 \subset \{1, 2, \ldots, \tau\}$ такое, что $j \in \mathcal{A}_1$ тогда и только тогда, когда $|\lambda_j| = 1$. Если $\mathcal{A}_1 = \varnothing$, то положим $v = 0$.

В этом случае полагаем $R = 1$ и $q = \max\{u + 1, v\}$.

3. Пусть $r > 1$. Положим

$$v = \max_{j \in \mathcal{A}_2} v_j,$$

где $\mathcal{A}_2 \subset \{1, 2, \ldots, \tau\}$ такое, что $j \in \mathcal{A}_2$ тогда и только тогда, когда $|\lambda_j| = r$.

В этом случае полагаем $R = r$ и $q = v$.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \ge 1)$ — *мартингал-разность, выполнены условия* (30), (32) *и* $a_n R^n n^{q-1} \downarrow 0,\ n \to \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \|B_i\|\, i^{q-1})^2 < \infty,$$

то имеет место УЗБЧ

$$a_n \left\| \sum_{i=1}^{n} Y_i \right\| \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Доказательство. Положим

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad n \geq 1.$$

Тогда соотношение (38) эквивалентно соотношению

$$a_n \| V_n \| \to 0 \;\text{ п. н.}, \;\; n \to \infty, \tag{39}$$

где последовательность $(V_n,\ n \geq 1)$ удовлетворяет стохастическому рекуррентному уравнению вида

$$\begin{gathered} V_n = (I + A)\, V_{n-1} - A\, V_{n-2} + B_n Z_n, \qquad n \geq 1, \\ V_0 = 0, \quad V_{-1} = -Y_0. \end{gathered} \tag{40}$$

Для исследования соотношения (39) удобно перейти к стохастическому рекуррентному уравнению первого порядка в пространстве $\mathbb{R}^{2m}$, положив

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I + A & -A \\ I & O \end{pmatrix}, \qquad W_n = \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0,$$

$$\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} B_n & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} Z_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1,$$

где O — нулевая матрица размера $m \times m$. Тогда согласно (40)

$$W_n = \tilde{A}\, W_{n-1} + \tilde{B}_n U_n, \qquad n \geq 1. \tag{41}$$

Теперь для доказательства соотношения (39) достаточно показать, что

$$a_n \| W_n \| \to 0 \;\text{ п. н.}, \;\; n \to \infty.$$

Так как $\det A \neq 0$, то и $\det \tilde{A} \neq 0$. Тогда из (41) получим

$$a_n \| W_n \| \leq a_n \|\tilde{A}^n\| \, \|W_0\| + \left\| a_n \tilde{A}^n \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}^{-i} \tilde{B}_i U_i \right\|.$$

В работе [13] показано, что выполняется неравенство

$$\|\tilde{A}^n\| \leq M R^n (n+1)^{q-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где M — некоторая конечная постоянная.

Дальнейшие рассуждения такие же, как и при доказательстве теоремы 4 (см. также следствие 8).

Теорема 6 доказана.

***Замечание* 4.** При доказательстве теорем 4 и 6 нельзя воспользоваться следствием 4, поскольку для последовательностей нормирующих матриц $(A_n,\ n \geq 1)$, возникающих в ходе доказательства этих теорем, не выполняется в общем случае условие монотонности, сформулированное в следствии 4.

Теорема 7. *Пусть в уравнении* (29) $(Z_n,\ n \geq 1)$ — *последовательность* *ортогональных случайных векторов, выполнены условия* (30), (32) *и* $a_n R^n n^{q-1} \ln n \downarrow 0,\ n \to \infty$. *Тогда если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \|B_i\| i^{q-1} \ln i)^2 < \infty,$$

то имеет место (38).

Доказательство теоремы 7 проводится аналогично доказательству теоремы 6 с использованием следствия 1.

В заключение приведем еще одно из возможных применений теоремы 3. Через $\mathcal{M}_d$ обозначим пространство всех квадратных матриц порядка $d \geq 2$ и $(A_n, n \geq 1) \subset \mathcal{M}_d$.

Теорема 8. *Пусть* $(S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — *мартингал со значениями в* $\mathcal{M}_d$, $S_0 = 0$ *и для любого* $i \geq 1$

$$\|A_n(S_i - S_{i-1})\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Если для любой последовательности $(n_j, j \geq 1) \in \mathfrak{N}$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E} \|A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j})\|^2 < \infty,$$

то

$$\|A_n S_n\| \to 0 \ \text{п. н.}, \ n \to \infty. \tag{42}$$

Доказательство. Для любого неслучайного вектор-столбца X размерности d $(S_n X, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ — мартингал в $\mathbb{R}^d$. Из условия теоремы следует

$$\|A_n(S_i X - S_{i-1} X\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E} \|A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} X - S_{n_j} X)\|^2 < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 3

$$\|A_n S_n X\| \to 0 \ \text{п. н.}, \ n \to \infty.$$

Полагая здесь последовательно $X = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ \ldots \ , X = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, получаем

$$\|(A_n S_n)_k\| \to 0 \ \text{п. н.}, \ n \to \infty, \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $(A_n S_n)_k$ — k-й столбец матрицы $A_n S_n$. Отсюда следует (42).

Теорема 8 доказана.

Следствие **10.** *Пусть* $(U_n, n \geq 1)$ — *последовательность независимых случайных матриц в* $\mathcal{M}_d$, *причем* $\mathrm{E}\, U_n = I$ *для всех* $n \geq 1$, *и* $(A_n, n \geq 1) \subset \mathcal{M}_d$. *Тогда если*

$$\|A_n\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sup_{n \geq i} \mathrm{E} \| A_n U_1 \ldots U_{i-1} (U_i - I) \|^2 < \infty,$$

то

$$\| A_n U_1 \ldots U_n \| \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty.$$

Доказательство следствия вытекает из теоремы 8, если заметить, что $(S_n = U_1 \ldots U_n - I,\ n \geq 1)$ — мартингал со значениями в $\mathcal{M}_d$.

1. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – **32**, № 2. – С. 266–281.
2. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
3. *Buldygin V., Solntsev S.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 516 p.
4. *Мельников А. В.* Закон больших чисел для многомерных мартингалов // Докл. АН СССР. – 1986. – **286**, № 3. – С. 546–550.
5. *Kaufmann H.* On the strong law of large numbers for multivariate martingales // Stochast. Proces. Appl. – 1987. – **26**, № 1. – P. 73–85.
6. *Lai T. L., Robbins H., Wei C. Z.* Strong consistency of least squares estimates in multiple regression II // J. Multivar. Anal. – 1979. – **9**, № 3. – P. 343–361.
7. *Lai T. L.* Some almost sure convergence properties of weighted sums of martingale difference sequences // Almost everywhere convergence II (Evanston, IL, 1989). – Boston: Acad. Press, 1991. – P. 179–190.
8. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin etc.: Springer, 1997. – 385 p.
9. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
10. *Blackwell D., Dubins L.* Merging of opinoins with increasing information // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**, № 3. – P. 882–886.
11. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
12. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
13. *Коваль В. А.* Асимптотическое поведение решений стохастических рекуррентных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 184 с.

Получено 05.08.98,
после доработки — 24.03.99