УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

We investigate the structure of general solution of a system of nonlinear difference equations with a continuous argument in a neighborhood of equilibrium state.

Досліджено структуру загального розв'язку системи нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом в околі стану рівноваги.

Развитию теории разностных уравнений вида

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in (a, b) \subseteq R = (-\infty, +\infty)$, $f\colon (a, b) \times C^n \to C^n$, посвящены исследования многих математиков. Благодаря этому в настоящее время имеется целый ряд хорошо разработанных направлений. К ним относится также направление, восходящее к работам Биркгофа [1, 2], основной целью которого является построение общего решения в виде некоторой формулы. Уже в работах Биркгофа и его учеников [1–3] было построено общее решение широкого класса систем линейных разностных уравнений вида (1). С тех пор аналогичная задача решается также для различных классов систем нелинейных разностных уравнений [4–9]. Тем не менее, в настоящее время многие вопросы, касающиеся этого случая, исследованы мало. В данной работе продолжается исследование структуры общего решения систем вида (1), начатое в [8, 9]. Более того, основной ее целью является получение для системы нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{2}$$

где $t \in R$, Λ — постоянная вещественная $(n \times n)$-мерная матрица, $f\colon R \times C^n \to \to C^n$, $x(t)$ — неизвестная комплекснозначная вектор-функция, результатов работы [9] при более слабых предположениях относительно вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

1. Приведение системы нелинейных разностных уравнений (2) к линейному виду. Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений (2) при следующих предположениях:

1) собственные числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матрицы Λ вещественны и удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j,$$

$$0 < |\lambda_i| < 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

2) для любого набора $(i_1, \ldots, i_n)$ целых неотрицательных чисел $\left(\sum_{j=1}^{n} i_j \geq 2\right)$ выполняются неравенства

$$\lambda_i \neq \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j \leq k,$$

где

$$k > \frac{\ln \lambda_*}{\ln \lambda^*}, \quad \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}, \quad \lambda^* = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\};$$

3) функции f_i, $i = 1, \ldots, n$, являются непрерывными и ограниченными при $t \in R$ и принадлежат классу C^k по $x_1, \ldots, x_n$ при $|x_i| \leq b$, $i = 1, \ldots, n$;

4) функции f_i, $i = 1, \ldots, n$, и все их частные производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ обращаются в нуль при $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

В дальнейшем будем считать, что $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (в противном случае (в силу условия 1) этого можно достичь с помощью неособой замены переменных вида $x(t) = Cy(t)$).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $1-4$. *Тогда существует замена переменных*

$$y(t) = \gamma(t, x(t)), \tag{3}$$

где вектор-функция $\gamma(t, x)$ *непрерывна и ограничена по* t, *принадлежит классу* C^k *по* x *при* $t \in R$, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq b_* < b$, *причем* $\gamma(t, 0) \equiv 0$, $\left.\dfrac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = E$, E — *единичная* $(n \times n)$*-мерная матрица, приводящая систему уравнений* (2) *к линейному виду*

$$y(t+1) = \Lambda y(t). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно, очевидно, показать, что существует решение системы уравнений*

$$\gamma(t+1, \Lambda x + f(t, x)) = \Lambda \gamma(t, x), \tag{5}$$

удовлетворяющее указанным в теореме условиям.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* $1-4$. *Тогда существует вектор-функция*

$$\kappa(t, x) = x + \sum_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t) x^i, \tag{6}$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ *и* $\kappa_i(t)$ — *некоторые непрерывные и ограниченные при* $t \in R$ *вектор-функции, такая, что*

$$\kappa(t+1, \Lambda x + f(t, x)) - \Lambda \kappa(t, x) = F(t, x), \tag{7}$$

где $F = (F^1, \ldots, F^n)$, *функции* $F^j(t, x)$, $j = 1, \ldots, n$, *непрерывны и ограничены по* t, *принадлежат классу* C^k *по* x *при* $t \in R$, $|x| \leq b_*$ *и обращаются в нуль при* $x = 0$ *вместе со всеми частными производными по* x *порядка* $\leq k$.

Доказательство. Поскольку в силу условий 3, 4 в некоторой области D: $|t| < \infty$, $|x| \leq b_* < b$ вектор-функцию $f(t, x)$ можно представить в виде

$$f_i(t, x) = \sum_{|i|=2}^{k} f_i(t) x^i + \varphi(t, x), \tag{8}$$

где $f_i(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \in R$ вектор-функции, компоненты $\varphi^j(t, x)$, $j = 1, \ldots, n$, вектор-функции $\varphi(t, x)$ являются непрерывными

* В случае $f(t, x) = f(x)$ система (5) достаточно хорошо исследована в [10–12].

и ограниченными при $t \in R$ функциями, принадлежат классу C^k по x при $|x| \le b_*$ и обращаются в нуль при $x = 0$ вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \dots, x_n$ порядка $\le k$, то, принимая во внимание (6), (8), получаем

$$\Lambda x + \sum_{|i|=2}^{k} f_i(t) x^i + \varphi(t,x) + \sum_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t+1)\left(\Lambda x + \sum_{|j|=2}^{k} f_j(t) x^j + \varphi(t,x)\right)^i -$$

$$- \Lambda x - \Lambda \sum_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t) x^i =$$

$$= \sum_{|i|=2}^{k} \lambda^i \kappa_i(t+1) x^i - \sum_{|i|=2}^{k} \Lambda \kappa_i(t) x^i - \sum_{|i|=2}^{k} P_i(t) x^i + R(t,x), \tag{9}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P_i(t) = (P_i^1(t), \dots, P_i^n(t))$, $R(t,x) = (R^1(t,x), \dots$ $\dots, R^n(t,x))$, $P_i^j(t)$, $j = 1, \dots, n$, $|i| = 2, \dots, k$, — некоторые многочлены относительно $\kappa_l(t+1)$ с непрерывными и ограниченными при $t \in R$ коэффициентами, причем $|l| < |i|$ и $P_i(t) = f_i(t)$ при $|i| = 2$, функции $R^j(t,x)$, $j = 1, \dots$ $\dots, n$, непрерывны и ограничены по t, принадлежат классу C^k по x и обращаются в нуль при $x = 0$ вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \dots, x_n$ порядка $\le k$.

Приравнивая в (9) коэффициенты при x^i, $|i| = 2, \dots, k$, нулю, получаем последовательность систем линейных разностных уравнений относительно вектор-функций $\kappa_i(t)$:

$$\lambda^i \kappa_i(t+1) = \Lambda \kappa_i(t) + P_i(t), \qquad |i| = 2, \dots, k. \tag{10}$$

Поскольку $P_i^j(t)$, $j = 1, \dots, n$, $|i| = 2, \dots, k$, — многочлены относительно $\kappa_l(t+1)$ с непрерывными и ограниченными при $t \in R$ коэффициентами, причем $|l| < |i|$, то принимая во внимание условия 1, 2, можно последовательно показать, что системы уравнений (10) имеют непрерывные и ограниченные при $t \in R$ решения $\kappa_i(t) = (\kappa_i^1(t), \dots, \kappa_i^n(t))$, $|i| = 2, \dots, k$. Более того, эти решения имеют вид

$$\kappa_i^j(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} (\lambda^{-i}\lambda_j)^{l-1} \lambda^{-i} P_i^j(t-l), & \text{если } |\lambda^{-i}\lambda_j| < 1, \\ \displaystyle -\sum_{l=0}^{\infty} (\lambda^i \lambda_j^{-1})^{l+1} \lambda^{-i} P_i^j(t+l), & \text{если } |\lambda^{-i}\lambda_j| > 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, непосредственно из (9) вытекает, что если в качестве $\kappa_i(t)$, $|i| = 2, \dots, k$, рассматривать непрерывные и ограниченые при $t \in R$ решения систем уравнений (10) вида (11) и положить $F(t,x) = R(t,x)$, то будет выполняться равенство (7). Лемма 1 доказана.

Теперь докажем, что система уравнений (5) имеет решение $\gamma(t,x)$ с указанными в теореме 1 свойствами. Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, причем последовательные приближения $\gamma_m(t,x)$, $m =$ $= 0, 1, \dots,$ определим с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \gamma_0(t,x) &= \kappa(t,x), \\ \gamma_m(t,x) &= \Lambda^{-1}\gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x)), \quad m = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что в некоторой области D_*: $|t| < \infty$, $|x| \le b_* < b$ последовательность $\gamma_m(t,x)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится к некоторой вектор-функции $\gamma(t,x) = (\gamma_1(t,x), \ldots, \gamma_n(t,x))$ (функции $\gamma_j(t,x)$, $j = 1, \ldots, n$, являются непрерывными по t и принадлежат классу C^k по x), являющейся решением системы уравнений (5). Для этого достаточно, очевидно, показать, что в области D_* равномерно сходится ряд $\gamma_0(t,x) + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_m(t,x) - \gamma_{m-1}(t,x)]$. Положив $\gamma_m(t,x) - \gamma_{m-1}(t,x) = \Gamma_m(t,x)$, $m = 1, 2, \ldots$, запишем его в виде

$$\kappa(t,x) + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m(t,x). \tag{13}$$

При этом имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t,x) &= \Lambda^{-1}\kappa(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \kappa(t,x), \\ \Gamma_m(t,x) &= \Lambda^{-1}\Gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x)), \quad m = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим через C_D^k множество вектор-функций $F(t,x) = (F^1(t,x), \ldots$ $\ldots, F^n(t,x))$, все компоненты которых непрерывны и ограничены по t, k раз непрерывно дифференцируемы по x в области D и обращаются в нуль при $x =$ $= 0$ вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ порядка $\le k$. Для каждой $F(t,x) \in C_D^k$ определим

$$\begin{aligned} |F(t,x)|^0 &= \max_{1 \le j \le n} |F^j(t,x)|, \\ |F(t,x)|^p &= \left|\frac{\partial^p F(t,x)}{\partial x^p}\right| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{1 \le i_l \le n} |F^j_{x_{i_1} \ldots x_{i_p}}(t,x)|, \quad p = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку в силу условий 1, 3, 4 при достаточно малых $|x|$ и всех $t \in R$ выполняется неравенство $|\Lambda x + f(t,x)| \le |x|$, то, используя лемму 1, последовательно можно показать, что $\Gamma_m(t,x) \in C_D^k$, $m = 1, 2, \ldots$. Более того, покажем, что при достаточно малых $|x| \le b_*$, всех $t \in R$ и $m = 1, 2, \ldots$ выполняются оценки

$$|\Gamma_m(t,x)|^p \le M_p \theta^{m-1} |x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k, \tag{16}$$

где $M_p = \text{const} > 0$, $\lambda_*^{-1}\lambda^{*k} < \theta < 1$.

Действительно, так как в силу (14) и (7) при $m = 1$ имеем

$$\Gamma_1(t,x) = \Lambda^{-1}\kappa(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \kappa(t,x) = \Lambda^{-1} F(t,x),$$

то

$$\frac{\partial^p \Gamma_1(t,x)}{\partial x^p} = \Lambda^{-1}\frac{\partial^p F(t,x)}{\partial x^p}, \quad p = 1, 2, \ldots, k,$$

и, следовательно, при всех $(t, x) \in D_*$ получаем

$$|\Gamma_1(t, x)|^p \leq M_p |x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \dots, k,$$

т. е. оценки (16) выполняются при $m = 1$. Рассуждая по индукции, предполагаем, что они доказаны для некоторого $m \geq 1$. Тогда в силу (14) имеем

$$\Gamma_{m+1}(t, x) = \Lambda^{-1}\Gamma_m(t+1, \Lambda x + f(t, x)),$$

$$\frac{\partial^p \Gamma_{m+1}(t, x)}{\partial x^p} = \Lambda^{-1} \frac{\partial^p \Gamma_m}{\partial x^p}(t+1, \Lambda x + f(t, x))\left(\Lambda + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right)^p + R_p,$$

$$p = 1, \dots, k,$$

где $R_1 = 0$, $R_p = \sum_{i=1}^{p-1} P_i \dfrac{\partial^i \Gamma_m}{\partial x^i}(t+1, \Lambda x + f(t, x))$, $p = 2, \dots, k$, и P_i — некоторые многочлены относительно производных функции $f(t, x)$ по x порядка $\leq k$. Поскольку при достаточно малых $|x| \leq b_* < b$ (далее будем считать $b_* < < 1$) и всех $t \in R$ имеем

$$|\Lambda x + f(t, x)| \leq (\lambda^* + \delta)|x|, \quad \left|\Lambda + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leq \lambda^* + \delta < 1,$$

где $\delta = \delta(b_*) \to 0$ при $b_* \to 0$, то

$$|\Gamma_m(t+1, \Lambda x + f(t,x))|^p \leq M_p \theta^{m-1}(\lambda^* + \delta)^{k-p}|x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \dots, k,$$

и, следовательно,

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^0 \leq \lambda_*^{-1} M_0 \theta^{m-1}(\lambda^* + \delta)^k |x|^k,$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^1 \leq \lambda_*^{-1} M_1 \theta^{m-1}(\lambda^* + \delta)^{k-1}|x|^{k-1}(\lambda^* + \delta),$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^p \leq \lambda_*^{-1} M_p \theta^{m-1}(\lambda^* + \delta)^{k-p}|x|^{k-p}(\lambda^* + \delta)^p +$$

$$+ M_p^1 M_1 \theta^{m-1}|x|^{k-1} + \dots + M_p^{p-1} M_{p-1} \theta^{m-1}|x|^{k-p+1}, \quad p = 2, 3, \dots, k,$$

где M_i^j — некоторые положительные постоянные. Выберем b_* настолько малым, чтобы при всех $(t, x) \in D_*$ выполнялись соотношения

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^k < \theta < 1,$$

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^k + M_p^{-1} M_p^1 M_1 |x|^{p-1} + \dots + M_p^{-1} M_p^{p-1} M_{p-1}|x| \leq \theta,$$

$$p = 2, 3, \dots, k.$$

Тогда

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^p \leq M_p \theta^m |x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \dots, k,$$

и, таким образом, оценки (16) имеют место при $(t,x) \in D_*$ и всех $m = 0, 1, \dots$.

Поскольку непосредственно из (16) вытекает

$$\|\Gamma_m(t,x)\|^p = \sup_{(t,x) \in D_*} |\Gamma_m(t, x)|^p \leq M_p \theta^m, \quad p = 0, 1, \dots, k, \quad m = 0, 1, \dots,$$

то последовательность $\dfrac{\partial^p \gamma_m(t,x)}{\partial x^p}$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится в области D_* к $\dfrac{\partial^p \gamma(t,x)}{\partial x^p}$, $p = 0, 1, \ldots, k$, причем $\gamma(t, 0) \equiv 0$ и $\left.\dfrac{\partial \gamma(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = E$ (вытекает из того, что

$$\gamma(t,x) = \kappa(t,x) + \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \Gamma_m(t,x),$$

$$\kappa(t,x) = x + \sum\nolimits_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t)\, x^i,$$

$$\Gamma_m(t,x) \in C^k_{D_*}, \quad m = 1, 2, \ldots \Big).$$

Переходя в (12) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что вектор-функция $\gamma(t,x) = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m(t,x)$ является решением системы уравнений (5). Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, можно получить представление любого непрерывного решения системы уравнений (1) в окрестности тривиального решения. Действительно, поскольку общее непрерывное решение системы уравнений (4) имеет вид

$$y_i(t) = |\lambda_i|^t \omega_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $\omega_i(t)$ — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = \operatorname{sign}\lambda_i\, \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, то в силу (2) и (3), для любого непрерывного решения системы уравнений (1), удовлетворяющего при $t \ge 0$ условию $|x(t)| \le b_*$, получаем

$$x(t) = y(t) + \gamma^{-1}(t, y(t)), \tag{17}$$

где $y(t) = (|\lambda_1|^t \omega_1(t), \ldots, |\lambda_n|^t \omega_n(t))$, $\gamma^{-1}(t,y)$ — некоторая непрерывная и ограниченная по t, k раз непрерывно дифференцируемая по y в некоторой области $R \times [-\tilde{b}, \tilde{b}]$, $\tilde{b} < b_*$, вектор-функция, удовлетворяющая условиям

$$\gamma^{-1}(t,0) \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial \gamma^{-1}(t,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = E,$$

и $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = \operatorname{sign}\lambda_i\, \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Общее решение системы нелинейных разностных уравнений (2) в резонансном случае. Рассмотрим теперь случай, когда не выполняется условие 2 теоремы 1, т. е. имеются наборы $(i_1, \ldots, i_n)$ целых неотрицательных чисел $\left(2 \le \sum_{j=1}^n i_j \le k\right)$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_j = \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1, 3, 4. *Тогда существует замена переменных*

$$y(t) = \gamma(t, x(t)), \tag{19}$$

где вектор-функция $\gamma(t,x)$ *непрерывна и ограниченная по* t, *принадлежит классу* C^k *по* x *при* $t \in R$, $|x| \le b_* < b$, *причем* $\gamma(t,0) \equiv 0$, $\left.\dfrac{\partial\gamma(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = E$, E — *единичная* $(n \times n)$*-мерная матрица, приводящая систему уравнений* (2) *к виду*

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \sum_{|i|=2}^{k} T_i(t)\, y^i(t), \tag{20}$$

где $T_i(t)$ — *некоторые непрерывные и ограниченные при* $t \in R$ *вектор-функции,* $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $y^i = y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}$, *и суммирование проводится по всем наборам* $i = (i_1, \ldots, i_n)$ *целых неотрицательных чисел, для которых выполняются равенства* (18).

Нетрудно убедиться, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование решения с указанными в теореме свойствами системы уравнений

$$\gamma(t+1, \Lambda x + f(t,x)) = \Lambda \gamma(t,x) + T(t, \gamma(t,x)), \tag{21}$$

где $T(t,x) = \sum_{|i|=2}^{k} T_i(t)\, x^i$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* 1, 3, 4. *Тогда в области* D *существует вектор-функция*

$$\kappa(t,x) = x + \sum_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t)\, x^i, \tag{22}$$

где $\kappa_i(t)$ — *некоторые непрерывные и ограниченные при* $t \in R$ *вектор-функции, такая, что*

$$\kappa(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \Lambda \kappa(t,x) - T(t, \kappa(t,x)) = F(t,x), \tag{23}$$

где $F = (F^1, \ldots, F^n)$, *функции* $F^j(t,x)$, $j = 1, \ldots, n$, *непрерывны и ограничены по* t, *принадлежат классу* C^k *по* x *при* $t \in R$, $|x| \le b_*$, *и обращаются в нуль при* $x = 0$ *вместе со всеми частными производными по* x *порядка* $\le k$.

Доказательство. Действительно, принимая во внимание (8), (22), получаем

$$\kappa(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \Lambda \kappa(t,x) - T(t, \kappa(t,x)) =$$

$$= \Lambda x + \sum_{|i|=2}^{k} f_i(t)\, x^i + \varphi(t,x) +$$

$$+ \sum_{|i|=2}^{k} \kappa_i(t+1) \left(\Lambda x + \sum_{|j|=2}^{k} f_j(t)\, x^j + \varphi(t,x) \right)^i -$$

$$- \Lambda x - \sum_{|i|=2}^{k} \Lambda \kappa_i(t)\, x^i - \sum_{|i|=2}^{k} T_i(t) \left(x + \sum_{|j|=2}^{k} \kappa_j(t)\, x^j \right)^i =$$

$$= \sum_{|i|=2}^{k} \left(\lambda^i \kappa_i(t+1) - \Lambda \kappa_i(t) - T_i(t) - P_i(t) \right) x^i + R(t,x),$$

где

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad P_i(t) = (P_i^1(t), \ldots, P_i^n(t)),$$

$$R(t,x) = (R^1(t,x), \ldots, R^n(t,x)),$$

$P_i^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, $|i| = 2, \ldots, k$, — некоторые многочлены относительно $\kappa_l^i(t)$, $\kappa_l(t+1)$ с непрерывными и ограниченными при $t \in R$ коэффициентами, причем $|l| < |i|$ и $P_i(t) = f_i(t)$ при $|i| = 2$, функции $R^j(t,x)$, $j = = 1, \ldots, n$, непрерывны и ограничены по t, принадлежат классу C^k по x при $t \in R$, $|x| \leq$ $\leq b_*$, и обращаются в нуль при $x = 0$ вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ порядка $\leq k$. Приравнивая в последнем соотношении коэффициенты при x^i, $|i| = 2, \ldots, k$, нулю, получаем системы линейных разностных уравнений для $\kappa_i(t)$. При этом если набор $i = (i_1, \ldots, i_n)$ такой, что равенство (18) не выполняется, то система уравнений для $\kappa_i(t)$ имеет вид (10) и для отыскания ее решения следует воспользоваться формулами (11). Если же для некоторого набора i и числа λ_j выполняется равенство (18), то уравнение для соответствующей компоненты $\kappa_i^j(t)$ вектор-функции $\kappa_i(t)$ имеет вид

$$\lambda^i \kappa_i^j(t+1) = \lambda_j \kappa_i^j(t) + T_i^j(t) + P_i^j(t). \tag{24}$$

Для построения ее решения поступим следующим образом. Положим $T_i^j(t) =$ $= -P_i^j(t)$. Тогда в качестве решения уравнения (24) можно взять любую непрерывную 1-периодическую функцию. Для того чтобы определить вектор-функцию однозначно, положим $\kappa_i^j(t) \equiv 0$.

Следовательно, построенные таким образом вектор-функции $\kappa(t,x)$ и $T_i^j(t)$, $|i| = 2, \ldots, k$, удовлетворяют соотношению (23), причем $F(t,x) =$ $= R(t,x)$. Лемма 2 доказана.

Теперь с помощью соотношений

$$\begin{gathered} \gamma_0(t,x) = \kappa(t,x), \\ \gamma_m(t,x) = \Lambda^{-1}\gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \Lambda^{-1}T\big(t, \gamma_{m-1}(t,x)\big), \\ m = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{25}$$

где $\kappa(t,x)$ имеет вид (22) и удовлетворяет равенству (23), определим последовательность вектор-функций $\gamma_m(t,x)$, $m = 0, 1, \ldots$, и докажем, что в области D_* она равномерно сходится к некоторой вектор-функции $\gamma(t,x)$, которая удовлетворяет указанным в теореме условиям и является решением системы уравнений (21).

Поскольку в силу условий 1, 3, 4 при $t \in R$, $|x| \leq b$ (b — достаточно малая положительная постоянная) выполняется неравенство $|\Lambda x + f(t,x)| \leq$ $\leq |x|$, то последовательно можно показать, что вектор-функции $\gamma_m(t,x)$, $m =$ $= 0, 1, \ldots$, являются непрерывными и ограниченными по t, k раз непрерывно дифференцируемыми по x при $(t,x) \in D$. Более того, если положить, как и выше, $\Gamma_m(t,x) = \gamma_m(t,x) - \gamma_{m-1}(t,x)$, $m = 1, 2, \ldots$, то, принимая во внимание лемму 2 и соотношения

$$\Gamma_1(t,x) = \Lambda^{-1}\kappa(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \Lambda T(t, \kappa(t,x)) - \kappa(t,x) = \Lambda^{-1}F(t,x), \tag{26}$$

$$\Gamma_m(t,x) = \Lambda^{-1}\Gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -$$

$$- \Lambda^{-1}\tilde{T}(t, \gamma_{m-2}(t,x), \gamma_{m-1}(t,x))\Gamma_{m-1}(t,x), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

где $\tilde{T}(t, \varphi, \psi)$ — некоторый многочлен степени $\leq k-1$ относительно φ, ψ с непрерывными и ограниченными по t коэффициентами без свободного члена, можно последовательно убедиться, что $\Gamma_m(t,x) \in C_D^k$, $m = 1, 2, \ldots$.

Покажем, наконец, что при $t \in R$, $|x| \leq b_* < b$ и всех $m = 1, 2, \ldots$ имеют место оценки

$$|\Gamma_m(t,x)|^p \leq \tilde{M}_p \tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k, \tag{27}$$

где $\tilde{M}_p = \text{const} > 0$, $\lambda_*^{-1}\lambda^{*k} < \tilde{\theta} < 1$.

Действительно, так как $\Gamma_1(t,x) = \Lambda^{-1}F(t,x)$, то в силу леммы 2 оценки (27) имеют место при $m = 1$. Рассуждая по индукции, предполагаем, что они доказаны для некоторого $m \geq 1$. Тогда при $t \in R$, $|x| \leq b_*$ имеем

$$|\gamma_m(t,x)| \leq |\kappa(t,x)| + \frac{\tilde{M}_0}{1-\tilde{\theta}}|x|^k \leq N_0|x|,$$

$$|\gamma_m(t,x)|^p \leq |\kappa(t,x)|^p + \frac{\tilde{M}_p}{1-\tilde{\theta}}|x|^{k-p} \leq N_p, \quad p = 1, \ldots, k,$$

где N_j — некоторые положительные постоянные, и принимая во внимание соотношения

$$\Gamma_{m+1}(t,x) = \Lambda^{-1}\Gamma_m(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -$$

$$- \Lambda^{-1}\tilde{T}(t, \gamma_{m-1}(t,x), \gamma_m(t,x))\Gamma_m(t,x),$$

$$\frac{\partial^p \Gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x^p} = \Lambda^{-1}\frac{\partial^p \Gamma_m}{\partial x^p}(t+1, \Lambda x + f(t,x))\left(\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)^p +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p-1} P_j^p \frac{\partial^j \Gamma_m}{\partial x^j}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -$$

$$- \Lambda^{-1}\tilde{T}(t, \gamma_{m-1}(t,x), \gamma_m(t,x))\frac{\partial^p \Gamma_m(t,x)}{\partial x^p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{P}_j^p \frac{\partial^j \Gamma_m(t,x)}{\partial x^j}, \quad p = 1, 2, \ldots, k,$$

где P_j^p — некоторые многочлены относительно частных производных функции $f(t,x)$ по x порядка $\leq k$, $\tilde{P}_j^p$ — некоторые многочлены относительно функций $\gamma_{m-1}(t,x)$, $\gamma_m(t,x)$ и их частных производных по x порядка $\leq k$ с непрерывными и ограниченными при $t \in R$ коэффициентами, находим

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^0 \leq \lambda_*^{-1}\tilde{M}_0\tilde{\theta}^{m-1}(\lambda^* + \delta)^k|x|^k + \tilde{N}|x|\tilde{M}_0\tilde{\theta}^{m-1}|x|^k,$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^1 \leq \lambda_*^{-1}\tilde{M}_1\tilde{\theta}^{m-1}(\lambda^* + \delta)^{k-1}|x|^{k-1}(\lambda^* + \delta) +$$

$$+ \tilde{N}\,|x|\,\tilde{M}_1\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-1} + N_0^1\tilde{M}_0\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^k,$$

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^p \le \lambda_*^{-1}\tilde{M}_p\,\tilde{\theta}^{m-1}(\lambda^*+\delta)^{k-p}|x|^{k-p}(\lambda^*+\delta)^p +$$

$$+ M_1^p\tilde{M}_1\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-1} + \ldots + M_{p-1}^p\tilde{M}_{p-1}\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-p+1} +$$

$$+ \tilde{N}\,|x|\,\tilde{M}_p\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-p} + N_0^p\tilde{M}_0\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^k + \ldots$$

$$\ldots + N_{p-1}^p\tilde{M}_{p-1}\,\tilde{\theta}^{m-1}|x|^{k-p+1}, \quad p = 2, 3, \ldots, k,$$

где M_i^j, $\tilde{N}$, N_i^j — некоторые положительные постоянные.

Поскольку $\lambda_*^{-1}\lambda^{*k} < \tilde{\theta} < 1$, то при достаточно малом b_* и всех $|x| \le b_*$ выполняются соотношения

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^*+\delta)^k + \tilde{N}\,|x| \le \tilde{\theta},$$

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^*+\delta)^k + \tilde{N}\,|x| + \tilde{M}_1^{-1}N_0^1\tilde{M}_0|x| \le \tilde{\theta},$$

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^*+\delta)^k + \tilde{N}\,|x| + \tilde{M}_p^{-1}M_1^p\tilde{M}_1|x|^{p-1} + \ldots + \tilde{M}_p^{-1}M_{p-1}^p\tilde{M}_{p-1}|x| +$$

$$+ \tilde{M}_p^{-1}N_0^p\tilde{M}_0|x|^p + \ldots + \tilde{M}_p^{-1}N_{p-1}^p\tilde{M}_{p-1}|x| \le \tilde{\theta}, \quad p = 2, 3, \ldots, k,$$

и, следовательно, имеем

$$|\Gamma_{m+1}(t,x)|^p \le \tilde{M}_p\,\tilde{\theta}^m|x|^{k-p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k,$$

т. е. оценки (27) сохраняются при переходе от m к $m+1$.

Таким образом, оценки (27) имеют место при $(t,x) \in D_*$ и всех $m = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что ряд $\kappa(t,x) + \sum_{m=1}^{\infty}\Gamma_m(t,x)$ и, следовательно, последовательность вектор-функций $\gamma_m(t,x)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся к некоторой вектор-функции $\gamma(t,x)$, которая является непрерывной и ограниченной по t, k раз непрерывно дифференцируемой по x при $(t,x) \in D_*$. Переходя в (25) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что $\gamma(t,x) = \lim\limits_{m\to\infty}\gamma_m(t,x)$ является решением системы уравнений (21). Поскольку $\kappa(t,0) \equiv 0$, $\Gamma_m(t,0) \equiv 0$, $\left.\dfrac{\partial\kappa(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = E$, E — единичная $(n\times n)$-мерная матрица, $\left.\dfrac{\partial\Gamma_m(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, то $\gamma(t,0) \equiv 0$ и $\left.\dfrac{\partial\gamma(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = E$. Теорема 2 доказана.

В силу теоремы 2 построение общего непрерывного при $t \ge 0$ решения системы уравнений (2) сводится к построению общего непрерывного решения системы (20), что является задачей, вообще говоря, не менее сложной, чем начальная. Однако в рассматриваемом случае система уравнений (20) имеет треугольный вид, что существенно упрощает ее исследование. Действительно, в силу условия 1 можно предполагать, что $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_{n-1}| \ge |\lambda_n|$. Тогда между числами λ_j, $j = 1, \ldots, n$, возможны только соотношения вида

$$\lambda_j = \lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_{j-1}^{i_{j-1}}, \quad 2 \le i_1 + \ldots + i_{j-1} \le k, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и, следовательно, система уравнений (20) имеет треугольный вид

$$
\begin{aligned}
y_1(t+1) &= \lambda_1 y_1(t), \\
y_j(t+1) &= \lambda_j y_j(t) + \sum_{i_1+\ldots+i_{j-1}=2}^{k} T^j_{i_1\ldots i_{j-1}}(t)\, y_1^{i_1}(t)\ldots y_{j-1}^{i_{j-1}}(t), \quad j=2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Поскольку, начиная с первого, можно последовательно построить общие непрерывные решения всех уравнений системы (28), то, воспользовавшись заменой переменных (19), нетрудно получить представление общего непрерывного решения и системы уравнений (2) в некоторой области D_*.

3. Инвариантные многообразия систем нелинейных разностных уравнений и их свойства. Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений (2) в случае, когда $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n$. Для удобства запишем ее в виде

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \tilde{\Lambda} x(t) + \tilde{f}(t, x(t), y(t)), \\
y(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}} x(t) + \tilde{\tilde{f}}(t, x(t), y(t)),
\end{aligned} \tag{29}
$$

где $\tilde{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\tilde{\tilde{\Lambda}} = \operatorname{diag}(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{f} : R \times C^p \times C^{n-p} \to C^p$, $\tilde{\tilde{f}} : R \times C^p \times C^{n-p} \to C^{n-p}$, и предположим выполненными следующие условия:

1) $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n$;

2) $\lambda_j \neq \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_p^{i_p}$, $j = 1, \ldots, p$, $i_1 + \ldots + i_p = 2, \ldots, k$, $k > \dfrac{\ln \tilde{\lambda}_*}{\ln \tilde{\lambda}^*}$, где $\tilde{\lambda}_* = \min\{|\lambda_j|, j = 1, \ldots, p\}$, $\tilde{\lambda}^* = \max\{|\lambda_j|, j = 1, \ldots, p\}$;

3) вектор-функции $\tilde{f}(t, x, y)$, $\tilde{\tilde{f}}(t, x, y)$ непрерывны и ограничены по t, принадлежат классу C^k по x, y в некоторой области D: $t \in R$, $|x| \leq b$, $|y| \leq b$;

4) вектор-функции $\tilde{f}(t, x, y)$, $\tilde{\tilde{f}}(t, x, y)$ и их частные производные первого порядка по x, y обращаются в нуль при $x = 0$, $y = 0$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $1-4$. *Тогда существует замена переменных*

$$
x(t) = \bar{x}(t), \quad y(t) = \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t)) \tag{30}
$$

такая, что $(n-p)$*-мерная вектор-функция* $\psi(t, \bar{x})$ *является непрерывной и ограниченной по* t, *принадлежат классу* C^k *по* x *в некоторой области* D_*: $t \in R$, $|\bar{x}| \leq b_* < b$, *и в новых переменных* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *система уравнений* (29) *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t+1) &= \tilde{\Lambda} \bar{x}(t) + \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)), \\
\bar{y}(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}} \bar{y}(t) + \bar{\bar{f}}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)),
\end{aligned} \tag{31}
$$

где вектор-функции $\bar{f}(t, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \bar{y})$ *удовлетворяют условиям* 3, 4 *и* $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$.

Замечание. Условие $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$ означает, что многообразие $y = \psi(t, x)$ является локально инвариантным относительно отображения

$$\begin{cases} x \;\to\; \tilde{\Lambda} x + \tilde{f}(t, x, y), \\ y \;\to\; \tilde{\tilde{\Lambda}} y + \tilde{\tilde{f}}(t, x, y), \\ t \;\to\; t+1. \end{cases}$$

***Доказательство теоремы* 3.** Подставляя (30) в (29), получаем (31), причем вектор-функции $\bar{f}(t, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \bar{y})$ определяются с помощью соотношений

$$\bar{f}(t, \bar{x}, \bar{y}) = \tilde{f}(t, \bar{x}, \bar{y} + \psi(t, \bar{x})),$$

$$\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \bar{y}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}) + \tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \bar{y} + \psi(t, \bar{x})) -$$

$$- \psi(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \bar{y} + \psi(t, \bar{x}))).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для доказательства теоремы 3 достаточно доказать существование решения системы функциональных уравнений

$$\psi(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x}))) = \tilde{\tilde{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}) + \tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x})) \tag{32}$$

с указанными в теореме свойствами. Для простоты изложения в дальнейшем будем считать $k = 2$.

Решение системы уравнений (32) построим с помощью метода последовательных приближений. Для этого положим

$$\psi_0(t, \bar{x}) = \kappa(t, \bar{x}),$$

$$\psi_m(t, \bar{x}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\psi_{m-1}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))) -$$

$$- \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

где $\kappa(t, \bar{x}) = \sum_{|i|=2} \kappa_i(t)\bar{x}^i$ ($\kappa_i(t)$, $|i| = 2$, — некоторые непрерывные и ограниченные при $t \in R$ вектор-функции) и вектор-функция

$$F(t, \bar{x}) = \kappa(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \kappa(t, \bar{x}))) - \tilde{\tilde{\Lambda}}\kappa(t, \bar{x}) - \tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \kappa(t, \bar{x}))$$

является непрерывной и ограниченной по t, принадлежит классу C^2 по $\bar{x}$ при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b$ и обращается в нуль при $\bar{x} = 0$ вместе со всеми своими частными производными по $\bar{x}$ порядка ≤ 2 (вектор-функция $\kappa(t, \bar{x})$ строится точно так же, как была построена вектор-функция $\kappa(t, x)$ в лемме 2).

Пусть b_* — такое малое положительное число, что при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$, $|\bar{y}| \le b_*$ выполняются следующие соотношения:

a) $\left|\dfrac{\partial \tilde{f}(t, \bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^j}\right| \le l, \quad \left|\dfrac{\partial \tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^j}\right| \le l, \quad i, j = 0, 1, \quad i + j = 1,$

причем $l = l(|\bar{x}| + |\bar{y}|) \to 0$ при $|\bar{x}| \to 0$, $|\bar{y}| \to 0$;

б) $\left|\dfrac{\partial^2 \tilde{f}(t,\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^j}\right| \leq L$, $\left|\dfrac{\partial^2 \tilde{\tilde{f}}(t,\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^j}\right| \leq L$, $i, j = 0, 1, 2$, $i + j = 2$, где L — некоторая положительная постоянная;

в) $|\tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\bar{y})| \leq b_*$.

Принимая во внимание условия 1 – 4 и (33), нетрудно показать, что вектор-функции $\psi_m(t,\bar{x})$, $m \geq 0$, являются непрерывными и ограниченными по t, принадлежат классу C^2 по $\bar{x}$ при $t \in R$, $|\bar{x}| \leq b_*$. Более того, покажем, что при $t \in R$, $|\bar{x}| \leq b_*$ и всех $m \geq 0$ выполняются оценки

$$
\begin{gathered}
|\psi_m(t,\bar{x})| \leq M|\bar{x}|^2 \leq b_*, \\
\left|\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \leq M|\bar{x}|, \\
\left|\frac{\partial^2 \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}^2}\right| \leq M,
\end{gathered} \tag{34}
$$

где M — некоторая, достаточно большая $\left(M > \dfrac{L}{\tilde{\tilde{\lambda}}_* - \tilde{\lambda}^{*2}}\right)$ постоянная.

В самом деле, поскольку $\psi_0(t,\bar{x}) = \kappa(t,\bar{x})$, то оценки (34) имеют место при $m = 0$. Предположив справедливость оценок (34) для некоторого $m \geq 0$, покажем, что они сохраняются при переходе от m к $m + 1$. Действительно, принимая во внимание условия а) – в) и соотношения

$$
\begin{gathered}
\psi_{m+1}(t,\bar{x}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\psi_m(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))) - \\
- \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\tilde{\tilde{f}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})), \\
\frac{\partial \psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\frac{\partial \psi_m}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \\
+ \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})))\left(\tilde{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) + \right. \\
\left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right) - \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) + \right. \\
\left. + \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right),
\end{gathered} \tag{35}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \bar{x}^2}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})))\left(\tilde{\Lambda} + \right. \\
\left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)^2 +
\end{gathered}
$$

$$+ \ \tilde{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \psi_m}{\partial \bar{x}} (t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))) \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{x}^2} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \ + \right.$$

$$+ \ 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \bar{y}^2} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \left(\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right)^2 +$$

$$\left. + \ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \frac{\partial^2 \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right) -$$

$$- \ \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}^2} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \ + \right.$$

$$\left. + \ \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}^2} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \left(\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}} (t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \frac{\partial^2 \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right),$$

находим

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_{m+1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right| \leq \ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M (\tilde{\lambda}^* + l + lM|\bar{x}|)^2 \ +$$

$$+ \ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M (\tilde{\lambda}^* |\bar{x}| + l(|\bar{x}| + M|\bar{x}|^2))(L + 2LM|\bar{x}| + LM^2|\bar{x}|^2 + lM) \ +$$

$$+ \ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (L + 2LM|\bar{x}| + LM^2|\bar{x}|^2 + lM) \ \leq$$

$$\leq \ M[\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (\tilde{\lambda}^* + l + lMb_*)^2 \ +$$

$$+ \ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} b_* (\tilde{\lambda}^* + l(1 + Mb_*))(L + 2LMb_* + LM^2 b_*^2 + lM) \ +$$

$$+ \ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (LM^{-1} + 2Lb_* + LMb_*^2 + l)],$$

где $\tilde{\tilde{\lambda}}_* = \min \{ |\lambda_i|, i = p+1, \ldots, n \}$.

Поскольку $\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} \tilde{\lambda}^{*2} < 1$, то при достаточно большом M $\left(M > \dfrac{L}{\tilde{\tilde{\lambda}}_* - \tilde{\lambda}^{*2}} \right)$ и достаточно малом b_* величина, находящаяся в квадратных скобках, не превышает единицы и, следовательно, $\left| \dfrac{\partial^2 \psi_{m+1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right| \leq M$. Отсюда и $\psi_m(t, 0) \equiv$ $\equiv 0$, $\left. \dfrac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0$, $m \geq 0$, непосредственно вытекает, что

$$\left| \frac{\partial \psi_{m+1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right| \leq \ M|\bar{x}|, \qquad |\psi_{m+1}(t, \bar{x})| \leq \ M|\bar{x}|^2,$$

т. е. оценки (34) сохраняются при переходе от m к $m+1$. Таким образом, при $t \in R$, $|\bar{x}| \leq b_*$ оценки (34) выполняются при всех $m \geq 0$.

Теперь докажем, что при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ последовательности $\psi_m(t, x)$, $\dfrac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}$, $m = 0, 1, \dots$, равномерно сходятся. Для этого достаточно, очевидно, показать, что при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ и всех $m \ge 1$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})| \le \tilde{M}\theta^{m-1}|\bar{x}|^2, \\ \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \le \tilde{M}\theta^{m-1}|\bar{x}|, \end{gathered} \tag{36}$$

где $\tilde{M}$ — некоторая положительная постоянная $(|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}F(t, \bar{x})| \le \tilde{M})$, $\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\tilde{\lambda}^{*2} < \theta < 1$.

Действительно, поскольку в силу (33) имеем

$$\psi_1(t, \bar{x}) - \psi_0(t, \bar{x}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\kappa(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \kappa(t, \bar{x}))) -$$
$$- \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\tilde{\tilde{f}}(t, \bar{x}, \kappa(t, \bar{x})) - \kappa(t, \bar{x}) = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}F(t, \bar{x}),$$

то неравенства (36) верны при $m = 1$. Предположим, что неравенства (36) установлены для некоторого $m \ge 1$. Тогда, принимая во внимание (35), (34), условия а) – в), получаем

$$\left|\frac{\partial \psi_{m+1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \le$$
$$\le |\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}|\left|\frac{\partial \psi_m}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))) -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})))\right| \times$$
$$\times \left|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$
$$+ |\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}|\left|\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))) -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})))\right| \times$$
$$\times \left|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$
$$+ |\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}|\left|\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})))\right| \times$$
$$\times \left(\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right| +\right.$$
$$+ \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right|\left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$

$$+ \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right| \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right|\Bigg) +$$

$$+ |\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}| \left(\left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) - \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right| + \right.$$

$$+ \left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) - \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right| \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$

$$\left. + \left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\right| \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \right) \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} \tilde{M} \theta^{m-1} |\tilde{\Lambda} \bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))| \times$$

$$\times \left|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) \frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M |\tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x})) - \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))| \times$$

$$\times \left|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})) \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M |\tilde{\Lambda} \bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_m(t, \bar{x}))| \Bigg(L |\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})| +$$

$$+ M |\bar{x}| L |\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})| + l \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \Bigg) +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} \Bigg(L |\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})| + M |\bar{x}| L |\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})| +$$

$$+ l \left|\frac{\partial \psi_m(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| \Bigg) \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} \tilde{M} \theta^{m-1} (\tilde{\lambda}^* |\bar{x}| + l(|\bar{x}| + M |\bar{x}|^2))(\tilde{\lambda}^* + l + lM |\bar{x}|) +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M l \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|^2 (\tilde{\lambda}^* + l + lM |\bar{x}|) + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M (\tilde{\lambda}^* |\bar{x}| + l(|\bar{x}| +$$

$$+ M |\bar{x}|^2))(L \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|^2 + LM \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|^3 + l \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|) +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (L \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|^2 + LM \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|^3 + l \tilde{M} \theta^{m-1} |\bar{x}|) \leq$$

$$\leq \tilde{M} \theta^{m-1} [\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (\tilde{\lambda}^* + l + lMb_*)^2 + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} lM (\tilde{\lambda}^* + l + lMb_*) b_* +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} M (\tilde{\lambda}^* + l + lMb_*)(Lb_*^2 + LMb_*^3 + lb_*) +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1} (Lb_* + LMb_*^2 + l)] |\bar{x}|.$$

Поскольку $\tilde{\bar{\bar{\lambda}}}_*^{-1}\tilde{\lambda}^{*2} < \theta < 1$, то величина, находящаяся в квадратных скобках, не превышает θ при достаточно малом b_* и, следовательно, $\left|\dfrac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}} - \dfrac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right| \le \tilde{M}\theta^m|\bar{x}|$. Отсюда и $\psi_m(t,0) \equiv 0$, $m \ge 0$, получаем $|\psi_{m+1}(t,\bar{x}) - \psi_m(t,\bar{x})| \le \tilde{M}\theta^m|\bar{x}|^2$.

Таким образом, при достаточно малом b_* неравенства (36) выполняются при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ и всех $m \ge 1$. Тем самым доказано, что при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ последовательности $\psi_m(t,\bar{x})$, $\dfrac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся соответственно к $\psi(t,\bar{x})$ и $\dfrac{\partial\psi(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}$. Переходя в (33) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что вектор-функция $\psi(t,\bar{x}) = \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(t,\bar{x})$ является решением системы уравнений (32). Поскольку вектор-функция $\psi(t,\bar{x})$ является непрерывно дифференцируемой при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$, то для полного доказательства теоремы 3 остается доказать существование $\dfrac{\partial^2\psi(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}$.

Принимая во внимание условия а) – в) и соотношения (35), можно по индукции показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|\bar{x}| \le b_*$, $|\Delta| \le \delta$ и всех $m = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial^2\psi_m(t,\bar{x}+\Delta)}{\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}\right| \le \varepsilon. \tag{37}$$

Тогда в силу (34) и (37) вектор-функции $\dfrac{\partial^2\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}$, $m = 0, 1, \ldots$, являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ и, следовательно, из последовательности $\dfrac{\partial^2\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}$, $m = 0, 1, \ldots$, можно выбрать равномерно сходящуюся при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$ подпоследовательность $\dfrac{\partial^2\psi_{m_i}(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}$, $i = 0, 1, \ldots$. Следовательно, вектор-функция $\psi(t,\bar{x}) = \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(t,\bar{x})$ принадлежит классу C^2 по $\bar{x}$ при $t \in R$, $|\bar{x}| \le b_*$. Теорема 3 доказана.

В силу теоремы 3 исследование окрестности тривиального решения системы уравнений (29) сводится к исследованию окрестности тривиального решения системы (31). Поскольку $\bar{\bar{\bar{f}}}(t,\bar{x},0) \equiv 0$, то, принимая во внимание условия 1 – 4, можно показать, что если $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ — некоторое непрерывное и ограниченное при $t \ge 0$ решение системы (31), то $\bar{y}(t) \equiv 0$. Следовательно, для построения всех непрерывных при $t \ge 0$ решений системы уравнений (31), находящихся в окрестности ее тривиального решения, достаточно построить все непрерывные при $t \ge 0$ решения системы уравнений

$$\bar{x}(t+1) = \tilde{\Lambda}\bar{x}(t) + \bar{\bar{f}}(t,\bar{x}(t),0), \tag{38}$$

находящиеся в окрестности ее тривиального решения $\bar{x}(t) = 0$. Для системы (38) выполняются условия теоремы 1 и, таким образом, ее общее непрерывное при $t \ge 0$ решение имеет вид (17) при $n = p$. Отсюда и из (30) находим, что если $(x(t), y(t))$ — некоторое непрерывное при $t \geq 0$ решение системы уравнений (29), находящееся в достаточно малой окрестности ее тривиального решения $(0, 0)$, то

$$x(t) = z(t) + \gamma^{-1}(t, z(t)), \quad y(t) = \psi(t, z(t) + \gamma^{-1}(t, z(t))),$$

где $z(t) = (|\lambda_1|^t \omega_1(t), \ldots, |\lambda_p|^t \omega_p(t))$ и $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$, — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = (\operatorname{sign} \lambda_i) \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**. – P. 243–284.
2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregualar linear difference equations // Acta math. – 1930. – **54**. – P. 205–246.
3. *Birkhoff G. D., Trjitzinsky W. J.* Analitic theory of singular difference equations // Ibid. – 1932. – **60**. – P. 1–89.
4. *Harris Jr. W. A., Sibuya Y.* General solution of nonlinear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **115**. – P. 62–75.
5. *Takano By. K.* General solution of a nonlinear difference equations of Briot–Bouquet type // Funkc. ekvacioj. – 1971. – **13**, № 3. – P. 179–198.
6. *Takano By. K.* Solutions containing arbitrary periodic functions of systems of nonlinear difference equations // Ibid. – 1973. – **16**, № 2. – P. 137–164.
7. *Пелюх Г. П.* О поведении решений систем нелинейных разностных уравнений // Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 73–80.
8. *Пелюх Г. П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 6. – С. 1083–1085.
9. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 1996. – **32**, № 2. – С. 304–312.
10. *Sternberg S.* Local contractions and a theorem of Poincaré // Amer. J. Math. – 1957. – **79**. – P. 809–824.
11. *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space // Ibid. – 1958. – **80**. – P. 623–631.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Получено 29.12.98