УДК 517.944

Ю. О. Митропольський (Ін-т математики НАН України, Київ),
Н. Г. Хома, С. Г. Хома (Тернопіл. акад. нар. госп-ва)

ГЛАДКИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

On the basis of exact solution of the linear Dirichlet problem

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t),$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0,$$
$$0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

we obtain conditions of the solvability of the corresponding Dirichlet problem for a quasilinear equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t)$.

На основі точного розв'язку лінійної задачі Діріхле

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t),$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0,$$
$$0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

одержано умови розв'язності відповідної задачі Діріхле для квазілінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t)$.

За аналогією дослідження крайових періодичних задач [1] в даній роботі встановлюються умови існування гладкого розв'язку задачі Діріхле для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку.

Спочатку покажемо, що існує точний розв'язок лінійної задачі Діріхле:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 2\pi, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3}$$

Позначимо через G_x простір функцій двох змінних, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ разом з похідною по x; $\tilde{C}^{i,j}(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$ — простір обмежених функцій, i раз диференційовних по x і j раз диференційовних по t; $\tilde{C}^{0,0}(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]) = \tilde{C}(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$; $L(X, Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень X в Y; S — клас функцій $f(x, t)$ двох змінних, що задовольняють такі умови:

$$f(x, t) = f(x + 2\pi, t) = -f(-x, t) = f(x, 2\pi - t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Розглянемо функцію

$$v(x, t) = u^0(x, t) + (P_{2\pi} f)(x, t) \equiv (Pf)(x, t), \tag{4}$$

де

$$u^0(x, t) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x+t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x-t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi \right\} d\tau, \tag{5}$$

$$(P_{2\pi} f)(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi - \frac{1}{4} \int_t^{2\pi} d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} Q(\tau)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&Q(\tau) = 1, \quad \text{якщо} \quad 0 \le \tau \le t, \\
&Q(\tau) = -1, \quad \text{якщо} \quad t < \tau \le 2\pi.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $f \in G_x \cap S$, *то функція* $v = u^0 + P_{2\pi} f \equiv Pf$ — *єдина функція із простору* $\tilde{C}^{2,2} \cap S$, *що задовольняє умови* (1)–(3). *Крім цього,* $P \in L(\tilde{C} \cap S, \tilde{C}^{1,1} \cap S)$, $P \in L(G_x \cap S, \tilde{C}^{2,2} \cap S)$, *причому*

$$\|v(x,t)\|_{\tilde{C}} \le 2\pi^2 \|f(x,t)\|_{\tilde{C}}; \tag{8}$$

$$\|v_t(x,t)\|_{\tilde{C}} \le 2\pi \|f(x,t)\|_{\tilde{C}}; \tag{9}$$

$$\|v_x(x,t)\|_{\tilde{C}} \le 2\pi \|f(x,t)\|_{\tilde{C}}, \tag{10}$$

де $\|f(x,t)\|_{\tilde{C}} = \sup\{|f(x,t)| : x \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 2\pi\}$.

Доведення. В тому, що функція $v = u^0 + P_{2\pi} f \equiv Pf$ є розв'язком рівняння (1), переконуємось безпосередньою перевіркою. Звідси на основі інтегралів із змінною верхньою межею випливає, що оператор P кожну неперервну обмежену функцію, визначену на $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, переводить в обмежену гладку функцію, а кожну гладку обмежену функцію — у двічі диференційовну обмежену функцію. Оскільки згідно з умовами теореми 1 $f \in S$, то внаслідок непарності і 2π-періодичності функції f за змінною x маємо, що функція $v = u^0 + P_{2\pi} f$ задовольняє крайові умови (2), тобто $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le 2\pi$. Покажемо, що функція $Pf = u^0 + P_{2\pi} f$ задовольняє умову

$$(Pf)(x, 2\pi - t) = (Pf)(x,t). \tag{11}$$

На основі рівності (5) при $f \in S \cap G_x$ маємо

$$
\begin{aligned}
u^0(x, 2\pi - t) &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x+2\pi-t+\tau}^{x+2\pi-t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi + \int_{x-2\pi+t+\tau}^{x-2\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi \right\} d\tau = \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x-t-\tau} f(2\pi+\eta,\tau)\, d\eta + \int_{x+t+\tau}^{x+t-\tau} f(-2\pi+\eta,\tau)\, d\eta \right\} d\tau = u^0(x,t).
\end{aligned}
$$

Отже, для функції $u^0(x,t)$ справедлива рівність

$$u^0(x, 2\pi - t) = u^0(x,t). \tag{12}$$

Тепер, враховуючи значення (6) оператора $P_{2\pi}$, одержуємо

$$(P_{2\pi} f)(x, 2\pi - t) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi-t} d\tau \int_{x-2\pi+t+\tau}^{x+2\pi-t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi - \frac{1}{4} \int_{2\pi-t}^{2\pi} d\tau \int_{x-2\pi+t+\tau}^{x+2\pi-t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Звідси, зробивши заміну змінної $\tau = 2\pi - \theta$ і врахувавши, що $f \in S \cap G_x$, знайдемо

$$
\begin{aligned}
(P_{2\pi} f)(x, 2\pi - t) &= -\frac{1}{4} \int_{2\pi}^{t} d\theta \int_{x+t-\theta}^{x-t+\theta} f(\xi, 2\pi - \theta)\, d\xi + \\
&+ \frac{1}{4} \int_t^0 d\theta \int_{x+t-\theta}^{x-t+\theta} f(\xi, 2\pi - \theta)\, d\xi = (P_{2\pi} f)(x,t).
\end{aligned}
$$

Таким чином, для функції $P_{2\pi}f$ виконується рівність

$$(P_{2\pi}f)(x, 2\pi - t) = (P_{2\pi}f)(x, t). \tag{13}$$

Отже, для функції $Pf = u^0 + P_{2\pi}f$ при умові, що $f \in S \cap G_x$, завжди справедлива рівність (11).

Оскільки на основі (4) – (6) маємо

$$(Pf)(x, 0) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\tau \int\limits_{x+\tau}^{x-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi - \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\tau \int\limits_{x+\tau}^{x-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi \equiv 0,$$

то, враховуючи рівність (11), переконуємось, що функція $v = u^0 + P_{2\pi}f \equiv Pf$ задовольняє крайові умови (3), тобто $(Pf)(x, 0) = (Pf)(x, 2\pi) = 0$.

Перейдемо до встановлення оцінок (8) – (10). На основі формули (5) маємо

$$\|u^0(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} |\tau|\, d\tau = \pi^2 \|f(x,t)\|_{\bar{C}}; \tag{14}$$

$$\|u_t^0(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} d\tau = \pi \|f(x,t)\|_{\bar{C}}; \tag{15}$$

$$\|u_x^0(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} d\tau = \pi \|f(x,t)\|_{\bar{C}}. \tag{16}$$

Аналогічно, на основі формули (6) одержуємо

$$\|(P_{2\pi}f)(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} |t-\tau|\, d\tau \leq \pi^2 \|f(x,t)\|_{\bar{C}}; \tag{17}$$

$$\|(P_{2\pi}f)_t(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} d\tau = \pi \|f(x,t)\|_{\bar{C}}; \tag{18}$$

$$\|(P_{2\pi}f)_x(x,t)\|_{\bar{C}} \leq \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\bar{C}} \int\limits_0^{2\pi} d\tau = \pi \|f(x,t)\|_{\bar{C}}. \tag{19}$$

Отже, на основі оцінок (14) – (19) переконуємось у справедливості оцінок (8) – (10).

Єдиність розв'язку задачі (1) – (3) випливає з того, що відповідна однорідна задача Діріхле

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0,$$

має лише нульовий розв'язок [2]. Таким чином, теорему 1 доведено.

Аналогічно до лінійної задачі (1) – (3) і зображення її розв'язку (4) – (6) для квазілінійної задачі Діріхле

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 2\pi, \tag{20}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{21}$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{22}$$

розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$u(x, t) = (PF[u, u_t])(x, t),$$

$$u_t(x,t) = \left(PF[u,u_t]\right)_t(x,t) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{1}\left\{F[u,u_t](x+(-1)^j(t-\tau),\tau) - F[u,u_t](x+(-1)^j(t+\tau),\tau)\right\}d\tau \;+$$

$$+\;\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} Q(\tau)\left\{F[u,u_t](x+t-\tau,\tau) - F[u,u_t](x-t+\tau,\tau)\right\}d\tau, \tag{23}$$

$$u_x(x,t) = \left(PF[u,u_t]\right)_x(x,t),$$

де $F[u,u_t]_t(x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$, а оператор P визначено формулою (4).

Означення. *Неперервний розв'язок* $(u,u_t,u_x) \in \tilde{C}$, $u \in \tilde{C}\cap S$, *системи інтегральних рівнянь* (23) *будемо називати гладким розв'язком задачі Діріхле* (20) – (22).

Використовуючи інтегральне зображення (4) – (6) розв'язку $v = Pf$ лінійної задачі (1) – (3), на основі теореми 1 переконуємося у справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $f \in \tilde{C}\cap S$. *Тоді лінійна задача* (1) – (3) *має єдиний гладкий розв'язок* $v = Pf \in S$, *для якого справедливі оцінки* (8) – (10).

Доведемо аналогічне твердження для квазілінійної задачі (20) – (22).

Теорема 3. *Нехай скалярна функція* $F[u,u_t](x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$ *задовольняє умови*:

1) $f(x,t,u,u_t) \in C(\mathbb{R}\times[0,2\pi]\times(\|u\|_{\tilde{C}}<\infty)\times(\|u_t\|_{\tilde{C}}<\infty))$;

2) $0 < \|F[0,0](x,t)\|_{\tilde{C}} = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'',u_t''](x,t) - F[u',u_t'](x,t)| \le N_1|u''-u'| + N_2|u_t''-u_t'|$, $N_1, N_2 = \mathrm{const}$;

4) $F[0,0](x,t) \in S$;

5) *для всіх* $u \in S\cap\tilde{C}^{1,1}$ *функція* $F[u,u_t](x,t) \in S\cap\tilde{C}$.

Тоді при виконанні умови

$$2\pi^2 N_1 + 2\pi N_2 < 1 \tag{24}$$

задача Діріхле (20) – (22) *має єдиний гладкий* $(u \in S\cap\tilde{C}^{1,1})$ *розв'язок.*

Зауваження. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u,u_t](x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$ була визначена для значень $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2\pi]$ і всіх u і u_t, достатньо припустити, щоб F була визначена для всіх $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2\pi]$, $\|u\|_{\tilde{C}} \le N$, $\|u_t\|_{\tilde{C}} \le N/\pi$, де N задовольняє нерівності

$$2\pi^2\Gamma < N\left(1-(2\pi^2 N_1 + 2\pi N_2)\right) \tag{25}$$

або

$$2\pi^2 M < N, \tag{26}$$

якщо $M = \|F[u,u_t](x,t)\|_{\tilde{C}}$ для всіх $\|u\|_{\tilde{C}} \le N$, $\|u_t\|_{\tilde{C}} \le N/\pi$.

Доведення. Нехай D — банаховий простір функцій $f \in S\cap\tilde{C}^{0,1}$ з нормою

$$\|f\|_{\tilde{C}^{1,1}} = \max\left(\|f(x,t)\|_{\tilde{C}}, \pi\|f_t(x,t)\|_{\tilde{C}}\right). \tag{27}$$

Розглянемо в кулі $\|u\|_{\tilde{C}} \le N$ із D деяку функцію $f(x, t)$. Нехай $u(x, t)$ — єдиний гладкий розв'язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[f, f_t](x, t), \tag{28}$$

який задовольняє умови (21), (22). На основі умов 1 і 5 теореми 3 такий розв'язок $u(x, t)$ згідно з теоремою 2 існує. Означимо тепер в кулі $\|f\|_{\tilde{C}} \le N$ із D оператор T_0, поклавши згідно з першим рівнянням системи (23) для скорочення запису $(T_0[f])(x, t) \equiv (PF[f, f_t])(x, t) = u(x, t)$.

Якщо $u_0(x, t) = (T_0[0])(x, t)$, то, враховуючи умову 2 теореми 3, із оцінок (8) – (10) при $f(x, t) = F[0, 0](x, t)$ одержуємо

$$\|u_0(x,t)\|_{\tilde{C}} \le 2\pi^2\Gamma, \qquad \pi\|u_{0t}(x,t)\|_{\tilde{C}} \le 2\pi^2\Gamma. \tag{29}$$

Отже, норма функції $u_0(x, t) = (T_0[0])(x, t) \in D$ задовольняє нерівність

$$\|(T_0[0])(x,t)\|_{\tilde{C}^{1,1}} \le 2\pi^2\Gamma. \tag{30}$$

Тепер, якщо $u_1(x, t) = (T_0[f_1])(x, t)$, $u_2(x, t) = (T_0[f_2])(x, t)$, то згідно з оцінками (8) – (10) і умовою 3 теореми 3 маємо

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le 2\pi^2\left(N_1\|f_1 - f_2\|_{\tilde{C}} + N_2\|f_{1t} - f_{2t}\|_{\tilde{C}}\right),$$

$$|u_{1t}(x,t) - u_{2t}(x,t)| \le 2\pi\left(N_1\|f_1 - f_2\|_{\tilde{C}} + N_2\|f_{1t} - f_{2t}\|_{\tilde{C}}\right).$$

Якщо останню нерівність помножити на π, а вираз $2\pi^2 N_2\|f_{1t} - f_{2t}\|_{\tilde{C}}$ записати у вигляді $2\pi N_2(\pi\|f_{1t} - f_{2t}\|_{\tilde{C}})$, то одержимо нерівність

$$\|T_0[f_1] - T_0[f_2]\|_{\tilde{C}^{1,1}} \le (2\pi^2 N_1 + 2\pi N_2)\|f_1 - f_2\|_{\tilde{C}^{1,1}}. \tag{31}$$

Із нерівностей (24), (25), (30) і (31) випливає, що виконуються всі умови теореми функціонального аналізу про нерухому точку (див., наприклад, [3, с. 43 – 46]), а це означає, що теорему 3 доведено.

Аналогічно, якщо $\|F[u, u_t](x,t)\|_{\tilde{C}} \le M$ для $\|u\|_{\tilde{C}} \le N$, $\|u_t\|_{\tilde{C}} \le N/\pi$, то із співвідношення (29), яке стосується похідної $u_{0t}(x, t)$, видно, що при умові $\|f\|_{\tilde{C}^{1,1}} \le N$ $u = T_0[f]$ задовольняє нерівність

$$\|u\|_{\tilde{C}^{1,1}} \le 2\pi^2 M. \tag{32}$$

Отже, якщо справедлива нерівність (26), то оператор T_0 відображає кулю $\|f\|_{\tilde{C}^{1,1}} \le N$ саму в себе, а це означає згідно з умовою (24), що виконуються умови згаданої вище теореми про нерухому точку.

Таким чином, теорему 3 і зауваження до неї доведено.

1. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370 – 1373.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Одержано 25.05.99