УДК 519.21

А. А. Симогин (Донбас. акад. стр-ва и архитектуры),
Б. В. Бондарев, А. И. Дзундза (Донецк. ун-т)

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ МАЛЫХ ГАУССОВСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

When observing the realization of solution of the Cauchy problem, we obtain an estimate of maximal likelihood of an unknown parameter. We construct an exponential inequality for probabilities of large deviations of the estimate from the real value of the parameter.

При спостереженні за реалізацією розв'язку задачі Коші отримано оцінку максимальної правдоподібності невідомого параметра. Побудовано експоненціальну нерівність для ймовірності великих відхилень оцінки від дійсного значення параметра.

Цель данной работы — найти оценку максимального правдоподобия θ_ε неизвестного параметра θ_0 по наблюдаемой реализации случайного поля $X_\varepsilon^{\theta_0}(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times R_1$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, и построить неравенство для вероятности больших уклонений оценки θ_ε от истинного значения параметра θ_0. На основании этого экспоненциального неравенства в дальнейшем можно будет строить доверительный интервал для оценки θ_ε с любой наперед заданной доверительной вероятностью.

При построении оценок и изучении их поведения используется техника, базирующаяся на эффекте абсолютной непрерывности меры, порожденной решением исходного уравнения, относительно некоторой гауссовской меры. Базовым результатом для этого послужила работа А. В. Скорохода [1].

Допустим, что на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задан гауссовский процесс $\xi(t)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, такой, что $M\xi(t) = 0$, $M\xi(t)\xi(s) = R(t, s)$. Рассмотрим в полосе $[0, T] \times R_1$ задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial X_\varepsilon^{\theta_0}}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial X_\varepsilon^{\theta_0}}{\partial x} = \theta_0 f\left(t, x, X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\right) + \varepsilon\sigma(t,x)\xi(t),$$

$$X_\varepsilon^{\theta_0}(0,x) = \psi(x). \tag{1}$$

Здесь $a(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $f(t,x,y)$ — известные неслучайные функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, θ_0 — неизвестный параметр, который надлежит оценить по наблюдаемой на $[0, T]\times R_1$ реализации решения задачи (1) $X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)$.

Решением задачи (1) назовем прогрессивно измеримую функцию $X_\varepsilon^{\theta_0}(t, x, \omega)$, подчиненную потоку σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$ при всех $x \times R_1$, непрерывно дифференцируемую по x в смысле среднего квадратичного и с вероятностью 1 непрерывную по t, удовлетворяющую соотношению

$$X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) - \psi(x) + \int_0^t a(\tau,x)\frac{\partial X_\varepsilon^{\theta_0}}{\partial x}(\tau,x)\,d\tau =$$

$$= \theta_0\int_0^t f\left(\tau, x, X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\right)d\tau + \varepsilon\int_0^t \sigma(\tau,x)\,\xi(\tau)\,d\tau$$

для всех $(t,x) \in [0, T]\times R_1$.

Предположим, что функции $f(t, x, y)$, $\sigma(t, x)$ имеют непрерывные ограниченные производные по x, y и удовлетворяют соотношению $|f(t,x,y)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \le L$, функция $a(t,x)$ — непрерывно дифференцируема по x, $a'_x(t,x)$ — ограничена.

Построим формальное решение задачи (1) методом характеристик [2]. Уравнение характеристики, проходящей через точку $(0, x_0)$, имеет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t, x_0) = a(t, Z(t, x_0)), \qquad Z(0, x_0) = x_0. \tag{2}$$

Решение задачи (2) существует и единственно в силу предположений о функции $a(t,x)$. Оно также непрерывно дифференцируемо по t и по x_0, причем

$$\frac{\partial Z(t,x_0)}{\partial x_0} = 1 + \int_0^t a'_x(s, Z(s,x_0))\frac{\partial Z(t,x_0)}{\partial x_0}\,ds.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial Z(t,x_0)}{\partial x_0} = \exp\left\{\int_0^t a'_x(s, Z(s,x_0))\,ds\right\},$$

т. е. функция $\dfrac{\partial}{\partial x_0}Z(t,x_0)$ не обращается в нуль ни при каких значениях t и x_0. Из последнего также вытекает, что $Z(t,x_0)$, как функция x_0, возрастающая.

Значение функции $X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)$ на характеристике определяется решением стохастического дифференциального уравнения

$$\partial_t V_\varepsilon^{\theta_0}(t,x_0) = \theta_0 f\Big(t, Z(t,x_0), V_\varepsilon^{\theta_0}(t,x_0)\Big)dt + \varepsilon\sigma(t, Z(t,x_0))\xi(t)\,dt,$$
$$V_\varepsilon^{\theta_0}(0,x_0) = \psi(x_0), \tag{3}$$

где через $\partial_t V$ обозначен стохастический дифференциал функции $V(t,x_0)$ по переменной t. Из результатов [3] вытекает существование и единственность решения задачи (3), причем $V_\varepsilon^{\theta_0}(0,x_0)$ непрерывна по t с вероятностью 1 и непрерывно дифференцируема по x_0 в смысле среднего квадратичного. Для фиксированного t функция $F(x,x_0) = Z(t,x_0) - x$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции [4]. Таким образом, в некоторой окрестности точки $Z(t,x_0) - x$ существует непрерывно дифференцируемая по x функция $Z_0(x) = Z_0(t,x)$ такая, что $Z(t, Z_0(x)) = x$. В работе [2] показано, что $Z_0(x) = Z_0(t,x)$ — непрерывно дифференцируема по t для любых x, причем

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t}(t,x) = -\left[\frac{\partial Z}{\partial x_0}(t, Z_0(t,x))\right]^{-1} a\big(t, Z(t, Z_0(t,x))\big).$$

Подставив выражение $Z_0(t,x)$ в функцию $V_\varepsilon^{\theta_0}(t,x_0)$, найдем формальное решение задачи (1):

$$X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) = V_\varepsilon^{\theta_0}(t, Z_0(t,x)). \tag{4}$$

Аналогично тому, как это делалось в работе [2], можно доказать, что $X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)$, определяемое выражением (4), является решением задачи (1).

Представим решение уравнения (1) в интегральном виде

$$X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) = \theta_0\int_0^t f\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\Big)\,d\tau + \varepsilon\int_0^t \sigma(\tau, Z_0(\tau,x))\,\xi(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу Коши для „укороченного" уравнения с тем же начальным условием

$$\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon\sigma(t,x)\xi(t), \qquad Y_\varepsilon(0,x) = \psi(x). \tag{6}$$

Поскольку характеристики задач (1) и (6) совпадают, то решение уравнения (6) в интегральном виде таково:

$$Y_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\int_0^t \sigma(\tau, Z_0(\tau,x))\,\xi(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Случайное поле $Y_\varepsilon(t,x)$ — гауссовское с корреляционной функцией

$$K_\varepsilon(t,s,x) = \varepsilon^2\int_0^t\int_0^s \sigma(\tau, Z_0(\tau,x))\sigma(\rho, Z_0(\rho,x))R(\tau,\rho)\,d\tau\,d\rho.$$

С учетом представления (7) соотношение (5) можно переписать следующим образом:

$$X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) = \theta_0\int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\right)dt + Y_\varepsilon(t,x). \tag{8}$$

Пусть $\mu_x^{\theta_0}$ — мера, порожденная в пространстве непрерывных на $[0,T]\times R_1$ функций полем $X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times R_1$, μ_y — гауссовская мера, порожденная в $C_{[0,T]\times R_1}$ полем $Y_\varepsilon(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times R_1$.

Покажем, что при выполнении некоторых условий меры $\mu_x^{\theta_0}$ и μ_y эквивалентны [1] и запишем плотность меры $\mu_x^{\theta_0}$ относительно меры μ_y. Чтобы к преобразованию (8) можно было применить теорему А. В. Скорохода [1, 5] об абсолютной непрерывности меры при нелинейном преобразовании гауссовского элемента, надо его записать в виде

$$T_\theta^{-1}\colon Y_\varepsilon(t,x) = X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) - \theta_0\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)\,g\left(\tau, x, X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)d\tau. \tag{9}$$

Здесь $K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)$ такая, что

$$K_\varepsilon(t,\tau,x) = \int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)K_\varepsilon^{1/2}(\tau,s,x)\,ds,$$

т. е. $K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)$ имеет вид

$$K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x) = \varepsilon\int_0^t \sigma(\tau, Z_0(\tau,x))R^{1/2}(s,\tau)\,d\tau.$$

Для того чтобы имело место представление (9), достаточно, чтобы уравнение

$$\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)\,g\left(\tau,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)d\tau = \int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\right)d\tau$$

имело решение, а для этого достаточно, чтобы существовало решение уравнения

$$f\left(t, Z_0(t,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\right) = \varepsilon\int_0^T R_\varepsilon^{1/2}(t,\tau)\sigma(\tau, Z_0(\tau,x))\,g\left(\tau,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)d\tau. \tag{10}$$

Далее нетрудно показать, что $\left|\det dT_\theta^{-1}\right| = 1$. Действительно, пусть μ_k, $\varphi_k(t,x)$ — собственные числа и собственные функции оператора dT_θ^{-1}, тогда

$$\mu_k \varphi_k(t,x) = \varphi_k(t,x) - \theta_0 \int\limits_0^t f_x'\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\Big)\varphi_k(\tau,x)\,d\tau,$$

$$(\mu_k - 1)\,\varphi_k(t,x) = -\theta_0 \int\limits_0^t f_x'\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\Big)\varphi_k(\tau,x)\,d\tau,$$

$$(\mu_k - 1)\frac{d\varphi_k(t,x)}{dt} = -\theta_0\, f_x'\Big(t, Z_0(t,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)\Big)\varphi_k(t,x).$$

Пусть $\mu_k \neq 1$, тогда

$$\varphi_k(t,x) = \varphi_k(0,x)\exp\left\{-\frac{\theta_0}{\mu_k - 1}\int\limits_0^t f_x'\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\Big)\,d\tau\right\}.$$

Из последнего выражения с учетом того, что $\varphi_k(0,x) = 0$, следует, что $\varphi_k(t,x) \equiv 0$ для любого k. Но этого не может быть, так как $\varphi_k(t,x)$ — собственные функции оператора dT_θ^{-1}. Следовательно, наше предположение, что $\mu_k \neq 1$, не верно, а значит, $\mu_k = 1$ при всех k. Таким образом, $\left|\det dT_\theta^{-1}\right| = 1$.

Пусть теперь λ_k — собственные числа корреляционного оператора процесса $Y_\varepsilon(t,x)$, а $e_k(t,x)$ — его собственные функции. В силу того, что $\left|\det dT_\theta^{-1}\right| = 1$ (см. [1, с. 209] или [5, с.565]), мера $\mu_x^\theta = \mu_y\big(T_\theta^{-1}(A)\big)$ и мера $\mu_y^\theta(A)$ эквивалентны и плотность можно записать в виде

$$\frac{d\mu_x^\theta}{d\mu}\Big(X_\varepsilon^\theta(\cdot,\cdot)\Big) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\theta}{\lambda_k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T\int\limits_0^t f\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^\theta(\tau,x)\Big)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx \times \right.\right.$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T X_\varepsilon^\theta(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx +$$

$$\left.\left. + \frac{\theta^2}{2\lambda_k}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T\int\limits_0^t f\Big(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^\theta(\tau,x)\Big)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\right]^2\right]\right\}. \qquad (11)$$

Величина θ_ε, доставляющая максимум выражению $\dfrac{d\mu_x^\theta}{d\mu_x^{\theta_0}}\Big(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\Big)$, будет доставлять максимум и выражению $\dfrac{d\mu_x^\theta}{d\mu_y}\Big(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\Big)$ и наоборот, так как

$$\frac{d\mu_x^\theta}{d\mu_y}\Big(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\Big) = \frac{d\mu_x^\theta}{d\mu_x^{\theta_0}}\Big(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\Big)\frac{d\mu_x^{\theta_0}}{d\mu_y}\Big(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\Big).$$

Таким образом, оценку θ_ε максимального правдоподобия неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$ можно искать из условия максимума выражения (11) на реализации решения задачи (1) $X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)$, $(t,x) \in [\,0,T] \times R_1$.

Плотность меры μ_x^{θ} относительно меры $\mu_x^{\theta_0}$, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\frac{d\mu_x^{\theta}}{d\mu_x^{\theta_0}}\left(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\cdot)\right) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\theta-\theta_0}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx \times\right.\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx +$$

$$\left.\left. + \frac{\theta^2+\theta_0^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\right]^2\right]\right\}.$$

Из последнего соотношения следует, что θ_ε — оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра θ_0 — имеет вид

$$\theta_\varepsilon =$$

$$= \frac{-\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx}{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^t f\left(\tau, Z_0(\tau,x), X_\varepsilon^{\theta_0}(\tau,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\right]^2},$$

а нормированное уклонение —

$$\frac{\theta_\varepsilon-\theta_0}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{-\varepsilon\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)\,g\left(\tau, x, X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx}{\varepsilon^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^t K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)\,g\left(\tau, x, X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,d\tau\,dt\,dx\right]^2}.$$

Из (11) следует

$$\mathrm{M}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\theta}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx \times\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)t_k(t,x)\,dt\,dx -$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\theta^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\} = 1.$$

Последнее выражение истинно в силу того, что

$$\int_{C_{[0,T]\times R_1}}\rho(\theta,x)\mu_Y(dx) = 1.$$

Далее следует

$$P\left\{\frac{|\theta_\varepsilon-\theta_0|}{\varepsilon}>R\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\times\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2>\left(R-\frac{1}{2}\delta\right)\right\}+$$

$$+P\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\left[-g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)\right]e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\times\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\left[-g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)\right]e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2>\left(R-\frac{1}{2}\delta\right)\right\}+$$

$$+P\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\left[-g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)\right]e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\le\delta\right\}. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$T_{\theta_0}: X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) = Y_\varepsilon(t,x)+\theta_0\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,\tau,x)\,\overline{g}(\tau,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,d\tau$$

— преобразование, обратное к $T_{\theta_0}^{-1}$, тогда верно представление $\overline{g}(\tau,x,Y_\varepsilon(\cdot,x)) = -g\left(\tau,x,T_{\theta_0}(Y_\varepsilon(\cdot,x))\right)$ и в силу [5, с. 566]

$$M\exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\times\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\}=$$

$$=M\exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,\overline{g}(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\times\right.$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x) e_k(t,x)\,dt\,dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{2\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,\overline{g}(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\Bigg\} = 1.$$

Из (12) и последнего равенства следует

$$\mathrm{P}\left\{\frac{|\theta_\varepsilon-\theta_0|}{\varepsilon} > R\right\} \le 2\exp\left\{-\left(R-\frac{1}{2}\delta\right)\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)[-g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))]e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2 \le \delta\right\}. \quad (13)$$

Оценим вероятность второго слагаемого в правой части (13):

$$\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)[-g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))]e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2 \le \delta\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\mathrm{M}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g\left(s,x,X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,x)\right)e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\mathrm{M}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2 -\right.$$

$$- \theta_0\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T Y_\varepsilon(t,x)e_k(t,x)\,dt\,dx -$$

$$\left. - \frac{\theta_0^2}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\}.$$

Применяя неравенство Гельдера при $p = 1+\theta_0^{-2}$ и $q = 1+\theta_0^2$, получаем

$$\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{\lambda_k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)(-g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x)))e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2 \le \delta\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\left(\mathrm{M}\exp\left\{-\frac{1+\theta_0^2}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T K_\varepsilon^{1/2}(t,s,x)\,g(s,x,Y_\varepsilon(\cdot,x))\,e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0^2}} \le$$

$$\leq \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\left(\mathrm{M}\exp\left\{-\frac{1+\theta_0^2}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_0^T f(s,Z_0(s,x),Y_\varepsilon(\cdot,x))e_k(t,x)\,dt\,ds\,dx\right]^2\right\}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0^2}} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\left(\mathrm{M}\exp\left\{-\frac{1+\theta_0^2}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[\int_0^t f(s,Z_0(s,x),Y_\varepsilon(\cdot,x))\,ds\right]^2 dt\,dx\right\}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0^2}}. \tag{14}$$

Здесь мы воспользовались равенством Парсеваля и выбрали в качестве λ наибольшее из λ_k или их оценки сверху. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть существует решение задачи* (1), *тогда из существования решения уравнения* (10) *при* $R > 1/2$ *и* $\delta > 0$ *следует неравенство*

$$\mathrm{P}\left\{\frac{|\theta_\varepsilon-\theta_0|}{\varepsilon} > R\right\} \leq 2\exp\left\{-\left(R-\frac{1}{2}\delta\right)\right\} + \exp\left\{\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\}\times$$

$$\times\left(\mathrm{M}\exp\left\{-\frac{1+\theta_0^2}{2\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[\int_0^t f(s,Z_0(s,x),Y_\varepsilon(\cdot,x))\,ds\right]^2 dt\,dx\right\}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0^2}},$$

где λ *— наибольшее из собственных чисел корреляционного оператора гауссовского поля*

$$Y_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\int_0^t \sigma(s, Z_0(s,x))\xi(s)\,ds$$

или их оценка сверху.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
2. *Гихман Ил. И., Местечкина Т. М.* Задача Коши для стохастических уравнений в частных производных первого порядка // Теория случайных процессов. – 1983. – Вып. 11. – С. 25–28.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 607 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 663 с.

Получено 09.06.99