УДК 517.5

Н. М. Консевич (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ M-ЧЛЕННИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,p}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

Order estimates of the best trigonometric approximations of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic multivariate functions in the space L_q are obtained for $1 < p < q \le 2$ and $1 < q \le p < \infty$.

Одержано порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 < p < q \le 2$, $1 < q \le p < \infty$.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\| f(x) \|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

де $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ — d-вимірний куб. Надалі будемо вважати, що функції $f(x)$ належать простору

$$L_p^0(\pi_d) = \left\{ f\colon\ f \in L_p(\pi_d),\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0,\ j = \overline{1, d} \right\}.$$

Нехай $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in Z$, і $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$. Поставимо у відповідність кожному вектору s множину

$$\rho(s) = \{ k\colon\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \}$$

і позначимо

$$\delta_s(f; x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k(f)\, e^{i(k, x)},$$

де $c_k(f) = c_k = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t)\, e^{-i(k,t)}\, dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Зазначимо, що вектори $k = (k_1, \ldots, k_d)$, з яких складається сукупність множин $\rho(s)$ для $s\colon (s, 1) = s_1 + \ldots + s_d \le n$, $n \in N$, утворюють „ступінчастий гіперболічний хрест" [1, с. 7].

Для $f \in L_q$ будемо досліджувати поведінку величини

$$e_M(f, L_q) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{\Theta_M} \inf_{P(\Theta_M; x)} \| f(x) - P(\Theta_M; x) \|_q, \tag{1}$$

де $P(\Theta_M; x)$ — тригонометричний поліном вигляду $\sum_{j=1}^{M} c_{k^j}(f)\, e^{i(k^j, x)}$, c_{k^j} — довільні коефіцієнти, $\Theta_M = \{k^1, \ldots, k^M\}$ — набір векторів $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисловими координатами. Величину (1) називають найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції $f(x)$.

Якщо F — деякий функціональний клас, то величину

$$e_M(F, L_q) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in F} e_M(f, L_q) \tag{2}$$

називають найкращим M-членним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

Уперше величини (1) для функцій однієї змінної $f(x)$, що належать L_2, було введено С. Б. Стечкіним [2] при розгляді питання абсолютної збіжності ортогональних рядів. Потім з'явились роботи [3–6], в яких досліджується поведінка величин (2) для певних класів функцій. Для класів функцій багатьох змінних таку тематику розвинуто в роботах [1, 7–10] та ін.

У даній статті F — клас $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних, який для функцій однієї змінної започаткував О. І. Степанець [11] (див. також [12]). Наведемо визначення класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Нехай $f(x) \in L_1^0(\pi_d)$ і

$$S[f] = \sum_k c_k(f)\, e^{i(k,x)}$$

— її ряд Фур'є. Далі, нехай $\psi_j(\cdot) \neq 0$, $j = \overline{1,d}$, — довільні функції натурального аргументу і β_j — фіксовані дійсні числа. Припустимо, що ряд

$$\sum_k \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{(i\pi\beta_j/2)\,\mathrm{sign}\,k_j}}{\psi_j(|k_j|)}\, c_k(f)\, e^{i(k,x)}$$

є рядом Фур'є деякої функції із $L_1^0(\pi_d)$. Цю функцію позначимо $f^{\psi}_{\beta}(x)$ і назвемо (ψ,β)-похідною функції $f(x)$, а множину функцій $f(x)$, що задовольняють таку умову, позначимо через L^{ψ}_{β}. Якщо $f(x) \in L^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $f^{\psi}_{\beta} \in$ $\in U_p \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi\colon \varphi \in L_p,\ \|\varphi\|_p \le 1\}$, то говорять, що $f(x)$ належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Зазначимо, що у випадку, коли $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in Z$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля $W^r_{\beta,p}$ [1, с. 31].

Далі, позначимо через D множину функцій натурального аргументу $\psi_j(\cdot)$, що задовольняють умови:

а) $\psi_j(\cdot)$ — додатні та незростаючі;

б) $\forall j = \overline{1,d}$ $\quad \exists M_j > 0$ таке, що для кожного $k \in N$ виконується нерівність $\dfrac{\psi_j(k)}{\psi_j(2k)} \le M_j$.

Легко перевірити, що, наприклад, функції $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $\psi_j(|k_j|) =$ $= |k_j|^{-r_j} \ln^{\alpha_j}(|k_j| + 1)$, $r_j > 0$, $k_j \in Z$, $\alpha_j \in R$; $\psi_j(|k_j|) = \ln^{\alpha_j}(|k_j|+1)$, $\alpha_j <$ < 0, $k_j \in Z$, належать до множини D.

Для подальшого нам потрібні наступні твердження.

Теорема А (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [13, с. 52–56]). *Нехай* $1 <$ $< p < \infty$. *Існують додатні числа* C_1, C_2 *такі, що для кожної функції* $f \in$ $\in L_p^0(\pi_d)$ *має місце співвідношення*

$$C_1 \|f\|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f;x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_2 \|f\|_p.$$

Для спрощення запису інколи будуть зустрічатись позначення $\asymp$, $>>$, $<<$. Нагадаємо, що функції $\mu_1(n)$ і $\mu_2(n)$ називаються функціями одного порядку $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$, якщо існує таке n_0, що для кожного $n > n_0$ виконується нерівність $C_1 \mu_1(n) \le \mu_2(n) \le C_2 \mu_1(n)$. Сталі C_1, C_2 далі можуть залежати тільки від параметрів класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору R^d. В аналогічний спосіб визначаються порядкові нерівності $\mu_1(n) >> \mu_2(n)$ і $\mu_1(n) << \mu_2(n)$.

Лема 1 [1, с. 28]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_p^0(\pi_d)$. *Тоді*

$$\sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_q^p \, 2^{(s,1)(1/q-1/p)p} << \|f\|_p^p.$$

Лема 2 [14, с. 94]. *Нехай* $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_{\beta,p}^{\psi}$, $\psi_j(\cdot) \in D$, $\beta_j \in R$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-якого* $s \in N^d$ *справедлива оцінка*

$$\|\delta_s(f;x)\|_p \asymp \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}) \|\delta_s(f_\beta^\psi;x)\|_p.$$

Надалі всі результати будуть сформульовані в термінах таких апроксимативних характеристик:

$$\Phi(n) = \min_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^d \psi_j(2^{s_j}).$$

Перш ніж перейти до встановлення оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у просторі L_q для випадку $1 < p < q \le 2$, введемо множину $D_{p,q}$ функцій $\psi_j(|k_j|)$, що задовольняють наступні умови:

а) $\psi_j(|k_j|) \in D$;

б) $\forall j = \overline{1,d}$ $\quad \psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{1/p-1/q}$ не зростають.

Зауважимо, що якщо для кожного $j = \overline{1,d}$ функції $\psi_j(\cdot) \in D_{p,q}$, $\beta_j \in R$, то при $1 < p < q < \infty$ виконується вкладення $L_{\beta,p}^{\psi} \subset L_q$ [15, с. 53].

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q \le 2$, $\psi_j \in D_{p,q}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім цього,* $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{2(1/p-1/q)}$ *зростають. Тоді для будь-якого* $\beta \in R^d$ *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)} << e_M(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q) <<$$

$$<< \Psi(\log M) M^{1/p-1/q},$$

де n *задовольняє умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. Встановимо оцінку зверху.

Нехай $f(x)$ — довільна функція із класу $L_{\beta,p}^{\psi}$ і задано число M. Виберемо n, виходячи з умови $M \asymp 2^n n^{d-1}$, і запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f;x) + \sum_{n \le (s,1) < n_0} \delta_s(f;x) + \sum_{(s,1) \ge n_0} \delta_s(f;x), \qquad (3)$$

де $n_0 = [n + (d-1)\log n]$. Будемо будувати поліном, що наближає функцію $f(x)$, у вигляді

$$P(\Theta_M; x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f; x) + Q(x), \tag{4}$$

де $Q(x)$ — поліном, що містить за порядком M гармонік і вигляд якого буде встановлено нижче.

Для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ покладемо

$$\mathcal{S}_l = \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x)\|_q^p \, 2^{(s,1)(1/q-1/p)p} \right)^{1/p}, \tag{5}$$

де $l \in N$, $l \in [n, n_0)$. Звідси випливає рівність

$$\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x)\|_q^p = \mathcal{S}_l^p \, 2^{l(1/p-1/q)p}.$$

Далі, нехай $A_l = \{ s : (s, 1) = l, \ l \in [n, n_0) \}$. Розташуємо числа $\|\delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x)\|_q$ за порядком спадання і позначимо їх $\alpha_j(f^{\psi}_{\beta}; l)$, де $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, |A_l|$, $|A_l|$ — кількість векторів s із множини A_l. Тоді

$$i\alpha_i^p(f^{\psi}_{\beta}; l) \le \sum_{i=1}^{|A_l|} \alpha_i^p(f^{\psi}_{\beta}; l) = \sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x)\|_q^p = \mathcal{S}_l^p \, 2^{l(1/p-1/q)p}.$$

Звідси

$$\alpha_i(f^{\psi}_{\beta}; l) \le i^{-1/p} \, 2^{l(1/p-1/q)} \mathcal{S}_l. \tag{6}$$

Кожному $l \in [n, n_0)$, $l \in N$ поставимо у відповідність число

$$m_l = [2^n n^{d-1} 2^{-l} \mathcal{S}_l^p] + 1 \tag{7}$$

і зауважимо, що кількість чисел m_l не перевищує за порядком $|A_l|$.

Далі покладемо

$$Q(x) = \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}' \ \delta_s(f; x), \tag{8}$$

де при кожному l, $n \le l < n_0$, внутрішня сума складається з m_l „блоків" $\delta_s(f; x)$ за тими s, яким відповідають найбільші значення норми $\|\delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x)\|_q$. А суму, що містить решту „блоків" $\delta_s(f; x)$, позначимо

$$\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}'' \ \delta_s(f; x) =$$

$$= \sum_{n \le (s,1) < n_0} \delta_s(f; x) - \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}' \ \delta_s(f; x). \tag{9}$$

Враховуючи співвідношення (3), (4), (8), (9) і використовуючи нерівність Мінковського, одержуємо

$$\|f(x) - P(\Theta_M; x)\|_q = \left\| \sum_{(s,1) \ge n_0} \delta_s(f; x) + \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}'' \ \delta_s(f; x) \right\|_q \le$$

$$\le \left\| \sum_{(s,1) \ge n_0} \delta_s(f; x) \right\|_q + \left\| \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}'' \ \delta_s(f; x) \right\|_q = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 .$$

Оцінимо кожний доданок окремо. Внаслідок теореми 2.1 з [15] маємо

$$\sum\nolimits_1 = \left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n_0} \delta_s(f;x) \right\|_q << \Psi(n_0)\, 2^{n_0(1/p-1/q)}, \tag{10}$$

де $\Psi(n_0) = \max\limits_{(s,1)=n_0} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j})$.

Доданок $\sum_2$ оцінюємо, використовуючи послідовно теорему Літтлвуда–Пелі, нерівність $|a+b|^\alpha \le |a|^\alpha + |b|^\alpha$ при $0 \le \alpha = \frac{q}{2} \le 1$, нерівність Мінковського та лему 2. Одержуємо

$$\sum\nolimits_2 << \left\| \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' |\delta_s(f;x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le$$

$$\le \left\| \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' |\delta_s(f;x)|^q \right)^{1/q} \right\|_q \le \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \|\delta_s(f;x)\|_q^q \right)^{1/q} <<$$

$$<< \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_q^q \right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \left(\max_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_q^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l) \sum_{i > m_l} (\alpha_i(f_\beta^\Psi;l))^{q-p} (\alpha_i(f_\beta^\Psi;l))^p \right)^{1/q}. \tag{11}$$

Продовжимо оцінку (11), застосовуючи нерівність (6) до $(\alpha_i(f_\beta^\Psi;l))^{q-p}$:

$$\le \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)(q-p)} \mathcal{S}_l^{q-p} \sum_{i > m_l} i^{(p-q)/p} (\alpha_i(f_\beta^\Psi;l))^p \right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} \mathcal{S}_l^{q-p} m_l^{(p-q)/p} 2^{l(1/q-1/p)p} \sum_{i > m_l} (\alpha_i(f_\beta^\Psi;l))^p \right)^{1/q} <<$$

$$\le \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} \mathcal{S}_l^{q-p} m_l^{(p-q)/p} 2^{l(1/q-1/p)p} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_q^p \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} \mathcal{S}_l^q m_l^{(p-q)/p} \right)^{1/q}.$$

Отже,

$$\sum\nolimits_2 << \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} \mathcal{S}_l^q m_l^{(p-q)/p} \right)^{1/q}. \tag{12}$$

Підставляючи значення для m_l (7) у вираз (12), одержуємо

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l) 2^{2l(1/p-1/q)q} \mathcal{S}_l^p \right)^{1/q}. \quad (13)$$

За умовою теореми $\Psi(l) 2^{2l(1/p-1/q)}$ зростає. Тому внаслідок леми 1 та з урахуванням рівності $n_0 = [n + (d-1)\log n]$ маємо

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \Psi(n_0) 2^{2n_0(1/p-1/q)} \left(\sum_{n \le l < n_0} \mathcal{S}_l^p \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \Psi(n_0) 2^{n_0(1/p-1/q)} \| f_\beta^\psi \|_p^{p/q} \ll \Psi(n_0) 2^{n_0(1/p-1/q)}. \quad (14)$$

Враховуючи оцінки (10) і (14) для доданків $\sum_1$ і $\sum_2$, а також співвідношення $n_0 \asymp \log M$, остаточно записуємо

$$\| f(x) - P(\Theta_M; x) \|_q = \Psi(n_0) 2^{n_0(1/p-1/q)} \ll$$

$$\ll \Psi(\log M) M^{1/p-1/q}.$$

Оцінку зверху доведено. Оцінку знизу встановлено в [9]. Теорему доведено.

Якщо на функції $\psi_j \in D$, $j = \overline{1, d}$, накласти дещо інші умови, то за допомогою даного методу доведення оцінки зверху величини $e_M(L_{\beta,p}^\psi, L_q)$ можна отримати наступний результат.

Теорема 1′. *Нехай* $1 < p < q \le 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in R$, $j = \overline{1, d}$, *і, крім цього,* $\psi_j(|k_j|)\, |k_j|^{2(1/p-1/q)}$ *не зростають. Тоді*

$$\Phi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)} \ll e_M(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)}, \quad (15)$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Відмінність доведення оцінки зверху в теоремі 1′ від доведення оцінки зверху в теоремі 1 полягає в застосуванні до співвідношення (13) умови: $\Psi(l) 2^{2l(1/p-1/q)}$ не зростає. Внаслідок цього

$$\sum\nolimits_2 \ll \Psi(n) 2^{n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)}.$$

В результаті елементарних перетворень маємо

$$e_M(L_{\beta,p}^\psi, L_q) \ll \Psi(n_0) 2^{n_0(1/p-1/q)} +$$

$$+ \Psi(n) 2^{n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)}.$$

***Зауваження* 1.** У тому випадку, коли $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in Z$, і $1 < p < q \le 2$, $r_1 > 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, точні порядки величин $e_M(W_{\beta,p}^r, L_q)$ отримані в роботі [1, с. 92], а у випадку $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 \le 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ — у [8].

***Зауваження* 2.** Оцінку зверху співвідношення (15) було встановлено в роботі [9] іншим методом.

***Зауваження* 3.** Порівнюючи результати теорем 1 і 1′ з оцінкою величини найкращого наближення $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)}$ за допомогою тригонометричних поліномів з „номерами" гармонік із „ступінчастого гіперболічного хреста" [15, с. 52], бачимо, що мають місце співвідношення

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)} \asymp E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q,$$

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q\, n^{-(d-1)(1/p-1/q)}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

відповідно до теорем 1 та 1′.

Тепер перейдемо до розгляду випадку $1 < q \le p < \infty$. Зазначимо, що при цьому для виконання вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$ достатньо, щоб $\psi_j(\cdot) \in D$; $\beta_j \in R$, $j = \overline{1, d}$ (див. [15]).

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, s_j — парні числа, $s_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho^+(s) = \{k = (k_1, \ldots, k_d):\ 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ k_j \in N,\ j = \overline{1, d}\}$$

і для $n \in N$ покладемо

$$S_n = \left\{s:\ (s, 1) = 2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \qquad Q^1_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s).$$

Далі через $\Im(Q^1_n)$ позначимо множину тригонометричних поліномів $t(x)$ вигляду

$$t(x) = \sum_{|k| \in Q^1_n} c_k e^{i(k,x)}, \quad |k| = (|k_1|, \ldots, |k_d|).$$

Введемо простір $B^0_{q,\theta}$, в якому для поліномів $t(x) \in \Im(Q^1_n)$ норма визначається таким чином:

$$\|t\|_{B^0_{q,\theta}} = \left(\sum_{s \in S_n} \|A_s(t; x)\|^{\theta}_q\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le q \le \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|t\|_{B^0_{q,\infty}} = \max_{s \in S_n} \|A_s(t; x)\|_q, \quad 1 \le q \le \infty,$$

де $A_s(t; x) = t(x) * A_s(x) = t(x) * \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j))$, $V_m(t)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2m - 1$, „ $*$ " — операція згортки. Множину поліномів $\Im(Q^1_n)$ з так визначеною нормою позначимо через $\Im(Q^1_n)_{B^0_{q,\theta}}$.

Зауважимо, що у випадку $1 < q < \infty$

$$\|t\|_{B^0_{q,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in S_n} \|\delta_s(t; x)\|^{\theta}_q\right)^{1/\theta}.$$

Для множини поліномів $\Im(Q^1_n)_{B^0_{\infty,\infty}}$ має місце наступне твердження.

Теорема В [10, с. 71]. *Існує стала $C(d) > 0$ така, що для будь-якого набору функцій $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{l} \subset B^0_{1,1}$, $l < C'|Q^1_n|$, справедлива оцінка*

$$e_M(\Im(Q_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \Phi)_{B^0_{1,1}} >> n^{d-1}$$

для всіх $M \le C(d)\,|Q_n^1|$.

Зазначимо, що якщо Φ — система експонент, $\Phi = \{e^{i(k,x)}\}_{k\in Z^d}$, то визначення величини $e_M(F,\Phi)_q$ в роботі [10] збігається з визначенням величини $e_M(F, L_q)$ (див. (2)).

Теорема 2. *Нехай* $1 < q \le p < \infty$, $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-якого* $\beta \in \in R^d$ *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) << e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_q) << \Psi(n),$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху випливає з відповідної оцінки зверху для величини найкращого наближення $E_n(L^\psi_{\beta,p})_q$. Адже відомо [15, с. 57], що при $1 < q \le p < \infty$ порядок величини $E_n(L^\psi_{\beta,p})_q$ реалізується „ступінчасто-гіперболічними" сумами Фур'є вигляду $S_n(f;x) = \sum_{(s,1)<n}\sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,x)}$ і має місце співвідношення

$$E_n(L^\psi_{\beta,p})_q \asymp \Psi(n).$$

Тому при умові $M \asymp 2^n n^{d-1}$

$$e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_q) << \Psi(n).$$

Встановимо оцінку знизу. Зазначимо, що достатньо розглянути випадок $1 < < q \le 2 \le p < \infty$, оскільки у випадку $1 < q \le p \le 2$ виконується вкладення $L^\psi_{\beta,2} \subseteq L^\psi_{\beta,p}$ і $e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \ge e_M(L^\psi_{\beta,2}, L_q)$, а у випадку $2 < q \le p < \infty$ — $e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_q) >> e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_2)$.

За заданим M виберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Звузимо клас функцій $L^\psi_{\beta,p}$. Будемо розглядати клас $L^\psi_{\beta,p} \cap \Im(Q_n^1)$, що містить у собі функції з $L^\psi_{\beta,p}$, які є одночасно поліномами з $\Im(Q_n^1)$. Тоді

$$e_M(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \ge e_M(L^\psi_{\beta,p} \cap \Im(Q_n^1), L_q). \qquad (16)$$

Далі, нехай $P_{Q_n^1}$ — оператор ортогонального проектування на $\Im(Q_n^1)$, який ставить у відповідність кожній функції з L_q поліном із $\Im(Q_n^1)$. Подіємо оператором $P_{Q_n^1}$ на поліном $P(\Theta_M;x) \in L_q$. За теоремою Літтлвуда – Пелі

$$\|P_{Q_n^1}(P(\Theta_M;x))\|_q << \|P(\Theta_M;x)\|_q.$$

Звідси випливає, що для довільного $P(\Theta_M;x) \in L_q$ і $f(x) \in L^\psi_{\beta,p} \cap \Im(Q_n^1)$

$$\|f(x) - P(\Theta_M;x)\|_q >> \|P_{Q_n^1}(f(x) - P(\Theta_M;x))\|_q =$$

$$= \|f(x) - P_{Q_n^1}(P(\Theta_M;x))\|_q.$$

Тому

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p} \cap \Im(Q^1_n), L_q) >> e_M(L^{\psi}_{\beta,p} \cap \Im(Q^1_n), L_q \cap \Im(Q^1_n)). \tag{17}$$

Об'єднуючи співвідношення (16) і (17), одержуємо

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) >> e_M(L^{\psi}_{\beta,p} \cap \Im(Q^1_n), L_q \cap \Im(Q^1_n)).$$

Далі, в роботі [14] було показано, що для будь-якого полінома $t \in \Im(Q^1_n)$ має місце оцінка

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p << \left\| \left(\sum_{s \in S_n} \left| \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\psi_j(2^{s_j})} \delta_s(t;x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le$$

$$\le \Phi^{-1}(n) \left\| \left(\sum_{s \in S_n} |\delta_s(t;x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p, \tag{18}$$

де $\Phi(n) = \min\limits_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j})$.

Продовжимо оцінку (18), використавши той факт, що

$$\|\delta_s(t;x)\|_p \asymp \|A_s(t;x)\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Маємо

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p << \Phi^{-1}(n) \left(\sum_{s \in S_n} \|A_s(t;x)\|_p^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \Phi^{-1}(n) \max_{s \in S_n} \|A_s(t;x)\|_p \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{1/2} <<$$

$$<< \Phi^{-1}(n) \max_{s \in S_n} \|A_s(t;x)\|_\infty n^{(d-1)/2} = \Phi^{-1}(n) n^{(d-1)/2} \|t\|_{B^0_{\infty,\infty}}.$$

Це означає, що

$$C\Phi(n) n^{-(d-1)/2} \Im(Q^1_n)_{B^0_{\infty,\infty}} \subset L^{\psi}_{\beta,p} \cap \Im(Q^1_n). \tag{19}$$

Таким чином, з (19) випливає співвідношення

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) >> e_M(L^{\psi}_{\beta,p} \cap \Im(Q^1_n), L_q \cap \Im(Q^1_n)) >>$$

$$>> \Phi(n) n^{-(d-1)/2} e_M(\Im(Q^1_n)_{B^0_{\infty,\infty}}, L_q \cap \Im(Q^1_n)).$$

Для продовження оцінки знизу скористаємось зв'язком між нормами поліномів із $\Im(Q^1_n)$ у просторах L_q та $B^0_{1,1}$, який встановлено в роботі [10, с. 75]:

$$\|t\|_q >> n^{-(d-1)/2} \|t\|_{B^0_{1,1}} \quad \text{при} \quad 1 < q \le 2.$$

Одержимо

$$e_M(\Im(Q^1_n)_{B^0_{\infty,\infty}}, L_q \cap \Im(Q^1_n)) >> n^{-(d-1)/2} e_M(\Im(Q^1_n)_{B^0_{\infty,\infty}}, \Im(Q^1_n)_{B^0_{1,1}}),$$

а отже,

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) >> \Phi(n)\, n^{-(d-1)}\, e_M(\Im(Q_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \Im(Q_n^1)_{B^0_{1,1}}). \tag{20}$$

Нарешті, застосовуючи до правої частини (20) теорему В при $\Phi = \{e^{i(k,x)}\}_{k\in Q_n^1}$ і $l = |Q_n^1|$, отримуємо шукану оцінку знизу

$$e_M(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) >> \Phi(n).$$

Оцінку знизу доведено. Теорему доведено.

***Зауваження* 4.** У випадку, коли $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in Z$, і $1 < q \leq \leq p < \infty$, $r_1 > 0$, оцінку знизу величин $e_M(W^r_{\beta,p}, L_q)$ одержано в роботі [10].

1. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной. – М., 1986. – 112 с. – (Тр. Мат. ин-та АН СССР; Т. 178).
2. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.
3. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161–178.
4. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 5. – С. 1127–1130.
5. *Makovoz G. I.* On trigonometric n-width and their generalization // J. Approxim. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361–366.
6. *Кашин Б. С.* Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 187–191.
7. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20–27.
8. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. – С. 16–33.
9. *Романюк А. С.* Неравенство типа Бора–Фавара и наилучшие M-членные приближения классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 98–108.
10. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57–86.
11. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
12. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
14. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92–105.
15. *Романюк А. С.* Приближение периодических функций многих переменных в метрике L_q // Приближение периодических функций в метрике пространства L_p. – Киев, 1987. – С. 42–58. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47).

Одержано 27.09.99