УДК 519.966

**А. Р. Миротин** (Гомел. ун-т)

# ВПОЛНЕ МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ НА ПОЛУГРУППАХ ЛИ

Integral representation of a completely monotone function on a Lie semigroup is obtained and the equivalence of "difference" and "differential" definitions of the function of this sort is proved.

Одержано інтегральне зображення цілком монотонної функції на півгрупі Лі і доведено рівносильність „різницевого" та „диференціального" означень такої функції.

**1.** В данной работе для вполне монотонных функций на полугруппах Ли устанавливаются интегральные представления типа Девинатца – Нассбаума [1] и доказывается обобщение известной теоремы С. Н. Бернштейна о равносильности двух определений вполне монотонной функции на полупрямой, в одном из которых используются разностные, а в другом — дифференциальные операторы. Из этого факта выводится ряд свойств вполне монотонных функций на полугруппах Ли, в том числе описание безгранично делимых вполне монотонных функций.

**2.** Далее $S$ — подполугруппа группы $G$. Для $a \in S$ разностный оператор $\Delta_a$ действует на функции $f\colon S \to \mathbb{R}$ по правилу $\Delta_a f(x) := f(xa) - f(x)$.

**Определение 1** [1] (§5). *Функция* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *называется вполне монотонной, если*:

1) $f(xyz) = f(xzy)$ *при всех* $x, y, z \in S$;

2) $(-1)^n \Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_n} f(x) \geq 0$ *при всех* $a_1, \ldots, a_n, x \in S$.

Условие 1 определения 1 представляется, на первый взгляд, искусственным. Однако справедливо следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Если полугруппа* $S$ *инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы* $G$, *а функция* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* 2, *то она удовлетворяет и условию* 1.

***Доказательство.*** Зафиксируем точку $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n$ и для мультииндекса $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $x^k := x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$. Покажем, что последовательность $\varphi_k := f(x^k)$ моментная, т. е. для нее разрешима $n$-мерная проблема моментов Хаусдорфа. Заметим, прежде всего, что в силу инвариантности $S$ для любых $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$ найдется такой элемент $a \in S$, что $x^{k+l} = x^k a$. В самом деле, найдется такой элемент $a_1 \in S$, что

$$x^{k+l} = x_1^{l_1}(x_1^{k_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} x_n^{k_n}) = (x_1^{k_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} x_n^{k_n})\, a_1.$$

Аналогично, найдется элемент $a_2 \in S$ такой, что $x_2^{l_2}(x_2^{k_2} \ldots x_n^{l_n} x_n^{k_n}) = (x_2^{k_2} \ldots \ldots x_n^{l_n} x_n^{k_n})\, a_2$ и т. д. В итоге получим $x^{k+l} = x^k a$, где $a = a_n \ldots a_1$. Поэтому

$$\Delta_l \varphi_k := \varphi_{k+l} - \varphi_k = f(x^{k+l}) - f(x^k) = \Delta_a f(x^k).$$

Рассуждая по индукции, предполагаем, что для некоторого $m$ уже доказано, что для любых $l_1, \ldots, l_m, k \in \mathbb{Z}_+^n$ найдутся такие $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S$, что

$$\Delta_{l_1} \ldots \Delta_{l_m} \varphi_k = \Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_m} f(x^k). \tag{1}$$

Тогда имеем

$$\Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{m+1}} \varphi_k = \Delta_{l_1}(\Delta_{a_2} \ldots \Delta_{a_{m+1}} f(x^k)) =$$

$$= \Delta_{a_2} \dots \Delta_{a_{m+1}} f(x^{k+l_1}) - \Delta_{a_2} \dots \Delta_{a_{m+1}} f(x^k) = \Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \dots \Delta_{a_{m+1}} f(x^k).$$

Таким образом, (1) доказано для любых $m$ и $l_1, \dots, l_m, k \in \mathbb{Z}_+^m$. В силу свойства 2 определения 1 отсюда следует разрешимость проблемы моментов (см., например, [2], предложение 4.6.11):

$$\varphi_k = \int_{[0,1)^n} t^k \, d\sigma(t).$$

Из последней формулы при $k = (1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ и вытекает условие 1.

**3.** В данном пункте мы обобщим интегральное представление вполне монотонных функций, полученное в [1] для открытых подполугрупп топологической группы $G$, на случай подполугрупп с плотной внутренностью. Всюду далее $S_1^*$ — множество всех неотрицательных ограниченных полухарактеров полугруппы $S$, т. е. ненулевых непрерывных гомоморфизмов из $S$ в мультипликативную полугруппу $[0, 1]$, $e$ — единица группы $G$.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — топологическая группа с первой аксиомой счетности, $\operatorname{int} S$ плотно в $S$, $e \in S$. Для любой непрерывной вполне монотонной функции $f$ на $S$ существует единственная положительная ограниченная регулярная борелевская мера $\mu$ на $S_1^*$ такая, что при всех $x$ из $S$ справедливо равенство*

$$f(x) = \int \rho(x) \, d\mu(\rho). \tag{2}$$

*Обратно, любая функция вида* (2) *непрерывна и вполне монотонна на $S$.*

***Доказательство.*** В силу теоремы 6 из [1] существует единственная положительная регулярная борелевская мера $\mu_0$ на $(\operatorname{int} S)_1^*$ такая, что при всех $x$ из внутренности $\operatorname{int} S$

$$f(x) = \int \chi(x) \, d\mu_0(\chi). \tag{3}$$

Покажем, что отображение сужения $i: \rho \mapsto \rho \mid \operatorname{int} S$ является гомеоморфизмом топологических пространств $S_1^*$ и $(\operatorname{int} S)_1^*$. Инъективность и непрерывность $i$ очевидна. Докажем его сюръективность. Пусть $\chi \in (\operatorname{int} S)_1^*$. Зафиксируем $y \in \operatorname{int} S$, $\chi(y) \neq 0$, и положим

$$\rho(x) := \frac{\chi(xy)}{\chi(y)}, \quad x \in S \tag{4}$$

($\operatorname{int} S$ — идеал полугруппы $S$). Поскольку $\chi(xy) = \chi(yx)$ $(= \chi(yxy)/\chi(y))$ при $x \in S$, то для любых $x_1, x_2 \in S$

$$\rho(x_1 x_2) = \frac{\chi(y x_1 x_2 y)}{\chi(y)^2} = \frac{\chi(y x_1)}{\chi(y)} \frac{\chi(x_2 y)}{\chi(y)} = \rho(x_1) \rho(x_2).$$

Поскольку функция $\rho$ непрерывна и ограничена, то $\rho \in S_1^*$ и осталось заметить, что $\chi = \rho \mid \operatorname{int} S$ и $i^{-1}: \chi \mapsto \rho$ непрерывно в силу (4). Если $\mu := i^{-1}(\mu_0)$, то в силу (3) формула (2) справедлива при всех $x \in \operatorname{int} S$. По непрерывности она справедлива для всех $x \in S$. Обратное утверждение теоремы проверяется непосредственно.

**4.** В этом пункте $G$ — связная (конечномерная) группа Ли, $L(G)$ — ее алгебра Ли. Для левоинвариантного векторного поля $X \in L(G)$ через $\sigma_X(t) =$

$$+ \ (f(s\sigma_{X_1}(1)\dots\sigma_{X_{m-1}}(1)) - f(s\sigma_{X_1}(1)\dots\sigma_{X_{m-2}}(1))) \ + \dots$$

$$\dots + \ (f(s\sigma_{X_1}(1)) - f(s)). \tag{6}$$

Каждое слагаемое в правой части (6) имеет вид $f(x\sigma_{X_i}(1)) - f(x)$, где $x = s\,\sigma_{X_1}(1)\,\dots\,\sigma_{X_{i-1}}(1) \in \operatorname{int} S$ (в последнем слагаемом $x = s$). Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(x\sigma_X(t))$ из $C^\infty[0, +\infty)$. Тогда при некотором $\xi \in (0, 1)$ имеем

$$f(x\sigma_X(1)) - f(x) \ = \ \varphi(1) - \varphi(0) \ = \ \varphi'(\xi) \ = \ \frac{d}{dt} f(x\sigma_X(t))\Big|_{t=\xi} \ =$$

$$= \ \frac{d}{dt} f(x\sigma_X(\xi)\,\sigma_X(t))\Big|_{t=0} \ = \ Xf(x\sigma_X(\xi)). \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает справедливость (5) при $n = 1$. Считая при некотором $n$ равенство (5) доказанным и подставляя в него $\Delta_{a_{n+1}} f$ вместо $f$, имеем

$$\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_{n+1}} f(s) \ = \ \sum_{j=1}^{m} X_{nj} \dots X_{1j} (\Delta_{a_{n+1}} f)(s_j) \ = \ \sum_{j=1}^{m} \Delta_{a_{n+1}} (X_{nj} \dots X_{1j} f)(s_j),$$

$$a_1, \dots, a_{n+1}, \ s \in \operatorname{int} S;$$

осталось применить к каждому слагаемому равенство (5) при $n = 1$ (с заменой $f$ на $X_{nj} \dots X_{1j} f$). Из (5) непосредственно следует, что $(-1)^n \Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_n} f(s) \geq 0$ при $a_1, \dots, a_n, \ s \in \operatorname{int} S$. По непрерывности это неравенство распространяется на все $a_1, \dots, a_n, \ s \in S$.

**_Следствие_ 1.** *Если функция $f$ непрерывна и вполне монотонна на $S$, $X \in L(S)$, то функция $-Xf$ также непрерывна и вполне монотонна на $S$.*

**_Следствие_ 2.** *Произведение двух непрерывных вполне монотонных функций на $S$ также вполне монотонно на $S$.*

Доказательство можно провести, как в [5, с. 497] (теорема 2).

**_Следствие_ 3.** *Пусть $\varphi$ — непрерывная вполне монотонная функция на $\mathbb{R}_+$, $g$ — такая неотрицательная непрерывная функция на $S$, что при всех $X \in L(S)$ функция $Xg$ вполне монотонна. Тогда композиция $\varphi \circ g$ также вполне монотонна на $S$.*

Доказательство можно провести, например, как в [6, с. 258].

**Определение 2.** *Непрерывную вполне монотонную функцию $f$ на $S$ будем называть безгранично делимой, если при всех натуральных $n$ функция $\sqrt[n]{f}$ вполне монотонна и $f(e) = 1$.*

**Теорема 3.** *Функция $f$ на $S$ безгранично делима тогда и только тогда, когда $f = e^{-g}$, где $g$ удовлетворяет условиям следствия 3 и $g(e) = 0$.*

***Доказательство.*** *Необходимость.* В силу неравенства $-\Delta_s f(e) \geq 0$ и предложения 2 имеем $1 = f(e) \geq f(s) > 0$. Поэтому $f(s) = e^{-g(s)}$, где функция $g : S \to \mathbb{R}_+$ непрерывна. Согласно теореме 1 при всех $n \in \mathbb{N}$, $s \in S$

$$e^{-g(s)/n} \ = \ \int \rho(s)\, d\mu_n(\rho),$$

где $\mu_n$ — мера на $S_1^*$. Поэтому функция

$$h_n(s) \ := \ \Delta_a(n(1 - e^{-g(s)/n})) \ = \ n(-\Delta_a) e^{-g(s)/n} \ =$$

$$= \ n(-\Delta_a) \int \rho(s)\, d\mu_n(\rho) \ = \ n \int \rho(s)\,(1 - \rho(a))\, d\mu_n(\rho), \quad a \in S,$$

вполне монотонна на $S$. Но тогда и функция

$$\lim_{n\to\infty} h_n(s) = \Delta_a \lim_{n\to\infty} n(1-e^{-g(s)/n}) = \Delta_a g(s)$$

также вполне монотонна, и осталось заметить, что при $X \in L(S)$

$$X g(s) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \Delta_{\sigma_X(t)} g(s).$$

*Достаточность* сразу вытекает из следствия 3.


1. *Devinatz A., Nussbaum A. E.* Real characters of certain semigroups with applications // Duke Math. J. – 1961. – **28**, № 2. – P. 221 – 237.
2. *Berg C. et. al.* Harmonic analysis on semigroups. – New York: Springer, 1984. – 289 p.
3. *Hilgert J. et. al.* Lie groups, convex cones and semigroups. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1989. – 664 p.
4. *Neeb K.–H.* Invariant subsemigroups of Lie groups // Mem. Amer. Math. Soc. – 1993. – **104**, № 499. – 193 p.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей: В 2-х т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 751 с.
6. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.


Получено 27.05.98