УДК 517.518.476

О. И. Кузнецова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА N-МЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

We prove new sufficient conditions of the integrability of N-dimensional trigonometric series which follow from unimprovable inequalities of the Sidon type.

Доведено нові достатні умови интегровності N-вимірних тригонометричних рядів, що випливають з неполіпшуваних нерівностей типу нерівності Сидона.

Пусть V — замкнутый ограниченный полиэдр в R^N с вершинами в точках с рациональными координатами, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через начало координат; $nV = \{x \in R^N \colon x/n \in V\}$ — гомотет V.

Множество полиэдров с указанными свойствами обозначим через W. В дальнейшем будем полагать $k = (k_1, \ldots, k_N) \in Z^N$, где Z^N — целочисленная решетка в R^N, $T^N = [-\pi, \pi)^N$ — N-мерный тор, $c, c_1, \ldots$ — различные постоянные, возможно, зависящие от полиэдра V.

Пусть λ_n — последовательность действительных чисел, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для любого полиэдра $V \in W$ рассмотрим N-мерный тригонометрический ряд с определенной по полиэдрам симметрией коэффициентов

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum\nolimits_{k \in lV \setminus (l-1)V} \exp\{ikx\}, \qquad kx = k_1 x_1 + \cdots + k_N x_N. \tag{1}$$

Коэффициенты этого ряда постоянны на множествах $lV \setminus (l-1)V$, $l = 1, 2, \ldots$.

Достаточные условия интегрируемости ряда (1) изучались в работах [1, 2]. В данной статье доказываются новые достаточные условия, содержащие как частные случаи результаты этих работ и вытекающие из неулучшаемых неравенств типа неравенства Сидона, доказанных в [3].

Пусть

$$S_{nV}(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum\nolimits_{k \in lV \setminus (l-1)V} \exp\{ikx\}$$

— частичная сумма ряда (1), $\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1}$.

Теорема. *Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right)^N \right] < \infty, \tag{2}$$

то этот ряд сходится почти всюду на T^N к некоторой функции $f \in L(T^N)$, является ее рядом Фурье, а равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T^N} |f(x) - S_{nV}(x)| dx = 0 \tag{3}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \log^N n = 0. \tag{4}$$

Для одномерных тригонометрических рядов ($V = [-1, 1]$) эта теорема доказана Фридли [4] в несколько более общем виде, который, как нетрудно показать, в кратном случае не имеет места.

Доказательство. Пусть

$$D_{nV}(x) = \sum_{k \in nV} \exp\{ikx\}$$

— ядро Дирихле порядка n, соответствующее множеству V. В [2] доказано, что последовательность D_{nV} ограничена на T^N всюду, кроме множества точек, принадлежащих пересечению T^N с конечным числом гиперплоскостей, т. е. множества нулевой лебеговой меры на T^N. Поскольку $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, в равенстве

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum\nolimits_{k \in lV \setminus (l-1)V} \exp\{ikx\} = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) + \lambda_n D_{nV}(x).$$

при п. в. $x \in T^N$ можно перейти к пределу. Полагаем

$$f(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum\nolimits_{k \in lV \setminus (l-1)V} \exp\{ikx\} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\lambda_l D_{lV}(x).$$

Докажем интегрируемость функции f. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, χ_A — характеристическая функция множества $A \subset R$,

$$\Gamma_n = \Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\left[(j-1)n^{-1},\, jn^{-1}\right]}, \qquad \Gamma_n(1) = a_n,$$

— ступенчатая функция, заданная на отрезке [0, 1].

Следующее неравенство доказано в [3] для существенно более широкого класса полиэдров, чем W (см. теорему 4 и ее доказательство):

$$\frac{1}{n} \int_{T^N} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c \| \Gamma_n \|_\psi.$$

Здесь $\|\cdot\|_\psi$ — норма в пространстве Орлича L_ψ, определенном $\mathcal{N}$-функцией [5] ψ, введенной при доказательстве теоремы 4 и удовлетворяющей при всех $u \in R$ неравенству

$$\psi(u) \le c_1 |u| \left[1 + \left(\log^+ |u| \right)^N \right].$$

Пользуясь этой оценкой и неравенством [5, с. 89]

$$\| \Gamma_n \|_\psi \le \int_0^1 \psi(\Gamma_n)\, dt + 1,$$

а также заменяя a_j на $a_j / \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |a_j| \right)$, получаем

$$\int_{T^N} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c_2 \sum\nolimits_{j=1}^{n} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{n^{-1} \sum_{q=1}^{n} |a_q|} \right)^N \right]. \tag{5}$$

Полагая $n = 2^{l+1}$, $a_1 = \cdots = a_{2^l} = 0$ и

$$\Gamma_{2^l+1,\, 2^{l+1}} = \Gamma\left(0, \ldots, 0, a_{2^l+1}, \ldots, a_{2^{l+1}}\right),$$

имеем

$$\frac{1}{2^{l+1}} \int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c \left\| \Gamma_{2^l+1,\, 2^{l+1}} \right\|_{\psi}$$

и

$$\int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} a_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c_3 \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{2^{-l} \sum_{q=2^l+1}^{2^{l+1}} |a_q|} \right)^N \right]. \qquad (6)$$

Поскольку

$$\int\limits_{T^N} |f(x)|\, dx = \int\limits_{T^N} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) \right| dx \leq \sum_{l=0}^{\infty} \int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx,$$

применяя неравенство (6) при $a_j = \Delta\lambda_j$, из условия (2) получаем, что последняя сумма конечна, т. е. $f \in L(T^N)$.

Доказательство того факта, что ряд (1) является рядом Фурье функции f, аналогично доказательству, приведенному в [2].

Осталось показать, что соотношение (3) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (4). Поскольку

$$\int\limits_{T^N} |f(x) - S_{nV}(x)|\, dx = \int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) - \lambda_n D_{nV}(x) \right| dx,$$

достаточно показать, что

$$\int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Пусть n задано. Выберем l_0 из условия $2^{l_0} + 1 \leq n \leq 2^{l_0+1}$. Указанный интеграл не превышает

$$\int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=n}^{2^{l_0+1}} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx + \sum_{l=l_0+1}^{\infty} \int\limits_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx. \qquad (7)$$

С учетом (6) нужно оценить лишь первую сумму. L_{ψ}-норма функции

$$\Gamma_{n,\, 2^{l_0+1}} = \Gamma\left(0, \ldots, 0, a_n, \ldots, a_{2^{l_0+1}}\right)$$

не превышает $\left\| \Gamma_{2^{l_0}+1,\, 2^{l_0+1}} \right\|_{\psi}$, поскольку для всех $t \in [0, 1]$

$$\left| \Gamma_{n,\, 2^{l_0+1}} \right| \leq \left| \Gamma_{2^{l_0}+1,\, 2^{l_0+1}} \right|.$$

Следовательно, для первого интеграла в (7) также справедлива оценка (6) с $a_j = \Delta\lambda_j$, а вся сумма в (7) не превышает остатка ряда (2) и стремится к нулю при n, а следовательно, и l_0, стремящемся к ∞. Теорема доказана.

Отметим, что при $N = 1$ неравенство (5) получено в [4].

Замечание. Фактически доказано, что если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \left\| \Gamma_{2^l+1,\,2^{l+1}}\left(\Delta\lambda_{2^l+1}, \ldots, \Delta\lambda_{2^{l+1}}\right) \right\|_{\psi} < \infty, \tag{8}$$

то справедливы все утверждения теоремы. Поскольку при любом $p > 1$ $L_p \subset L_\psi$ $\left(\|\cdot\|_\psi \le \|\cdot\|_p\right)$, из (8) непосредственно следует результат работы [2]. В случае L_∞ получаем условие

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^l \max_{2^l < j \le 2^{l+1}} \left|\Delta\lambda_j\right| < \infty,$$

эквивалентное условию, приведенному в [1].

1. *Кузнецова О. И.* Интегрируемость и сильная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 167 – 168.
2. *Кузнецова О. И.* Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1998. – **63**, вып. 3. – С. 402 – 406.
3. *Кузнецова О. И.* Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенства типа Сидона // Укр. мат .журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1630 – 1635.
4. *Fridli S.* An inverse Sidon type inequality // Stud. math. – 1993. – **105**. № 3. – P. 283 – 308.
5. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1968. – 271 с.

Получено 27.04.98,
после доработки — 14.12.98