УДК 512.542

А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков (Гомел. ун-т, Беларусь)

КРАТНО $\mathfrak{L}$-КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We study $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups.

Досліджуються $\mathfrak{L}$-композиційні формації скінченних груп.

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Формация — это класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Введенное В.Гашюцом в 1963 г. это понятие вызвало лавину исследований. Итоги развития теории формаций [1–8] показали, что большое значение в теории групп имеют локальные формации. Более широкий класс составляют композиционные формации, которые были введены [1, 6] с целью изучения необязательно разрешимых групп. По теореме Бэра композиционные формации совпадают с разрешимо насыщенными формациями [3]. В работе [9] введены p-композиционные формации. Целью настоящей работы является дальнейшее изучение внутренних свойств композиционных и частично композиционных формаций.

Мы будем использовать терминологию, принятую в [1–3]. В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p и q — некоторые простые числа, $K[A]$ — полупрямое произведение группы K с некоторой ее группой операторов A, $A \wr B$ — стандартное сплетение группы A с группой B. Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$. Символами $\pi(G)$ и $O_\pi(G)$ обозначаются соответственно множество всех простых делителей порядка группы G и наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}_\pi$ обозначают соответственно класс всех групп, класс всех π-групп, класс всех p-групп, класс всех разрешимых групп и класс всех нильпотентных π-групп. Неединичная группа G называется монолитической, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (монолит группы G). Для произвольного множества групп $\mathfrak{X}$ символ $(\mathfrak{X})$ обозначает абстрактное замыкание $\mathfrak{X}$, т. е. класс всех групп, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Символом $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ обозначается совокупность всех таких простых групп A, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

2. Композиционные спутники. В дальнейшем класс всех простых групп будем обозначать символом $\mathfrak{J}$. Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ через $\mathfrak{T}'$ обозначим множество $\mathfrak{J} \setminus \mathfrak{T}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс простых групп. Тогда любую функцию вида $f: \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \to \{\text{формации групп}\}$ и принимающую одинаковые значения на изоморфных группах будем называть $\mathfrak{L}$*-композиционным спутником.* В случае, когда $A = Z_p$ — группа простого порядка p, вместо записи $f(Z_p)$ будем иногда использовать запись $f(p)$.

Пусть $\mathfrak{L}^+$ — совокупность всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^-$ — совокупность всех простых неабелевых групп из $\mathfrak{L}$. Тогда записи $\mathrm{Supp}(f)$, $\mathrm{Supp}_+(f)$ и $\mathrm{Supp}_-(f)$ обозначают соответственно множества $\{A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$, $\{A \in \mathfrak{L}^+ \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$, $\{A \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$. Спутник f назовем пустым, если $\mathrm{Supp}(f) = \varnothing$.

Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ символ $E(\mathfrak{T})$ обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{T}$. По определению, единичные группы принадлежат $E(\mathfrak{T})$.

Символом $C^A(G)$ обозначим пересечение всех централизаторов всех таких главных факторов H/K группы G, что $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Наряду с записью $C^{Z_p}(G)$ будем применять более короткую запись $C^p(G)$. Легко видеть (см. подробнее [10]), что $C^A(G) = G_{E(A)'}$, если A — простая неабелева группа, и $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны.

В дальнейшем, как правило, без ссылок будем использовать следующую очевидную лемму.

Лемма 1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, A — простая группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $A \notin \mathcal{K}(N)$, то $C^A(G/N) = C^A(G)/N$;*

2) *если $N \subseteq \Phi(L)$ для некоторой нормальной разрешимой подгруппы L группы G, то $C^p(G/N) = C^p(G)/N$* [3];

3) *если $N \in E\mathfrak{L}$,* то $(G/N)_{E\mathfrak{L}} = G_{E\mathfrak{L}}/N$.

Для произвольного $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f положим

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \left\{G \mid G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') \text{ и } G/C^A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L}\right\}.$$

Пусть f — произвольный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, $\mathfrak{T}_1 = \mathrm{Supp}_+(f) \cap \mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{L}^+ \setminus \mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{B}_1 = \mathrm{Supp}_-(f) \cap \mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{L}^- \setminus \mathfrak{B}_1$. Легко видеть, что

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \left(\bigcap_{A \in \mathfrak{T}_2} E(A)'\right) \bigcap \left(\bigcap_{A \in \mathfrak{T}_1} \mathfrak{G}_{cp} f(A)\right) \bigcap \left(\bigcap_{B \in \mathfrak{B}_1} E(B)' f(B)\right) \bigcap$$

$$\bigcap \left(\bigcap_{B \in \mathfrak{B}_2} E(B)'\right) \bigcap (E\mathfrak{L}) f(\mathfrak{L}').$$

Поскольку пересечение и произведение любых двух формаций снова является формацией, то из приведенной формулы вытекает, что для любого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f класс $CF_{\mathfrak{L}}(f)$ является формацией. Если же формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ для некоторого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f, то будем говорить, что она *$\mathfrak{L}$-композиционна*, а f — *$\mathfrak{L}$-композиционный спутник* этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник называется *внутренним* (или *приведенным*).

***Пример* 1.** Пусть формация $\mathfrak{M} \subseteq E\mathfrak{L}'$, а f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{M}$ и $f(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{L}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{M} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Таким образом, любая подформация формации $E\mathfrak{L}'$ $\mathfrak{L}$-композиционна. Отсюда, в частности, вытекает, что пустая формация $\varnothing$ и формация единичных групп (1) $\mathfrak{L}$-композиционны при всех $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, A — простая группа. Положим

$$\mathfrak{X}(C^A) = \begin{cases} \mathrm{form}\left(G/C^A(G) \mid G \in \mathfrak{X}\right), & \text{если } A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & \text{если } A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

В дальнейшем вместо $\mathfrak{X}(\mathfrak{H}(C^A))$ будем писать $\mathfrak{X}\mathfrak{H}(C^A)$.

Следуя [9], формацию $\mathfrak{F}$ называем $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, если ей принадлежит любая группа G с $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— формация,* $\varnothing \neq \mathfrak{L} \subset \mathfrak{J}$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) *формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{N}_p$*-насыщенной для всех* $p \in \omega = \pi(\mathfrak{L}^+)$;

2) $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, *где* $f(A) = \mathfrak{F}$ *для всех* $A \in \{\mathfrak{L}'\} \cup \mathfrak{L}^-$ *и* $f(Z_p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ *для всех* $Z_p \in \mathfrak{L}^+$;

3) *формация* $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}$*-композиционна.*

Доказательство. Пусть выполняется условие 1 и $\mathfrak{M} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где f — спутник из условия. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ очевидно. Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{L}}$. Тогда если $G_{E\mathfrak{L}} = 1$, то $G \simeq G / G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $G / G_{E\mathfrak{L}} \neq 1$. Если R — неабелева группа, то $G / 1 = G / C^A(G) \in \mathfrak{F}$, где $A \in \mathcal{K}(R)$. Противоречие Итак, R — Z_p-группа, где $Z_p \in \mathfrak{L}^+$.

Поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то $G / C^p(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(Z_p)$. В силу результатов работ [9, 11] $\mathfrak{M} \subseteq c\mathrm{form}\,\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Пусть теперь выполняется условие 3 и $G / L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(N) \cap O_p(N)$ для некоторой разрешимой нормальной в G подгруппы N, $p \in \pi(\mathfrak{L}^+)$. Кроме того, пусть $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Тогда поскольку $G / L \in \mathfrak{F}$ и согласно лемме 1 $G / G_{E\mathfrak{L}} \simeq (G / L) / (G / L)_{E(\mathfrak{L})}$ и $G / C^A(G) \simeq (G / L) / C^A(G / L) = (G / L) / C^A(G / L)$ для всех простых групп A, то $G \in \mathfrak{F}$, т. е. формация $\mathfrak{F}$ разрешимо p-насыщена. Теорема доказана.

На основании примера 1 обе формации $\varnothing$ и (1) композиционны.

***Пример* 2.** Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ $\mathfrak{N}_p$-насыщена, а значит, согласно теореме 1 эта формация (Z_p)-композиционна.

***Пример* 3.** Пусть $\mathfrak{L} = (A)$ — класс всех групп, изоморфных простой неабелевой группе A. Покажем, что произвольная формация $\mathfrak{F}$ является (A)-композиционной. Действительно, пусть f — такой (A)-композиционный спутник, что $f(a) = \mathfrak{F}$ для всех $a \in (A) \cup (A)'$. Легко проверить, что $CF_{(A)}(f) = \mathfrak{F}$.

***Пример* 4.** Пусть простая группа A не принадлежит $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ (A)-композиционна. Действительно, пусть f — такой (A)-композиционный спутник, что $f(A) = \varnothing$ и $f((A)') = \mathfrak{F}$. Легко проверить, что $CF_{(A)}(f) = \mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $\mathfrak{L}$-композиционных спутников. Обозначим через $\bigcap_{i\in I} f_i$ такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник f, что $f(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$ для всех $A \in (\mathfrak{L}) \cup \{\mathfrak{L}'\}$. Следующие две леммы доказываются прямой проверкой.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, *где* $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.

Положим $f \leq h$, если $f(A) \subseteq h(A)$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.

Лемма 3. *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *— цепь формаций,* $\{f_i \mid i \in I\}$ *— такая цепь* $\mathfrak{L}$*-композиционных спутников, что* $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$ *и* $f_i \leq f_j$ *имеет место в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j$ *для всех* $i, j \in I$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, *где* $f(A) = \bigcup_{i\in I} f_i(A)$ *для каждого* $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.

Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой фор-*

маций [5], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\mathfrak{H} \in \Theta$. Понятно, что любая полная решетка формаций является полной решеткой в обычном смысле. Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-*формациями*. Ниже везде Θ обозначает некоторую полную решетку формаций.

Спутник f назовем Θ-*значным*, если все его значения принадлежат Θ. Символом $\Theta^{\mathfrak{L}}$ обозначим совокупность всех формаций, которые имеют $\mathfrak{L}$-композиционный Θ-значный спутник. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая Θ-формация, что для любой Θ-формации $\mathfrak{M}$ имеет место включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. И пусть f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $f(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$. Тогда $CF_{\mathfrak{L}}(f) \in \Theta^{\mathfrak{L}}$ и если $\mathfrak{H}$ — произвольная $\Theta^{\mathfrak{L}}$-формация, то, очевидно, $\mathfrak{H} \subseteq$ $\subseteq CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Таким образом, $\Theta^{\mathfrak{L}}$ — полная решетка формаций.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{L}$-композиционных Θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 2 $\bigcap_{i\in I} f_i$ — $\mathfrak{L}$-композиционный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Назовем его *минимальным* $\mathfrak{L}$-*композиционным* Θ-*значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 4. *Если* $f = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ *и* $G / O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(Z_p)$ *для некоторой группы* $Z_p \in \mathfrak{L}^+$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Заметим, что поскольку $O_p(G) \subseteq C^p(G)$, то $G / C^p(G) \in$ $\in f(Z_p)$. А поскольку $\left(G / O_p(G)\right)_{E\mathfrak{L}} = G_{E\mathfrak{L}} / O_p(G)$ и для всех $A \in \mathfrak{L} \setminus (Z_p)$ справедливо

$$G / C^A(G) \simeq \left(G / O_p(G)\right) / \left(C^A(G) / O_p(G)\right) =$$
$$= \left(G / O_p(G)\right) / C^A\left(G / O_p(G)\right),$$

то $G / G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$ и $G / C^A(G) \in f(A)$. Значит, $G \in CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Лемма доказана.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \in \Theta$ и для любой полной решетки формации Θ через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначаем пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, пишем $\Theta\mathrm{form}(G)$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Знак Θ опускается, если Θ — совокупность всех формаций.

Лемма 5. *Если* $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и* f — *минимальный* $\mathfrak{L}$-*композиционный* Θ-*значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\mathfrak{L}') = \Theta\mathrm{form}\left(G / G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{F}\right)$;

2) $f(A) = \Theta\mathrm{form}\left(\mathfrak{X}(C^A)\right)$ *для всех* $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap (\mathfrak{L})$;

3) $f(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{F})$;

4) *если* $f = CF_{\mathfrak{L}}(h)$ *и спутник* h Θ-*значен, то для всех* $Z_p = \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^+$

$$f(Z_p) = \Theta\mathrm{form}\left(G \mid G \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1\right),$$

для всех $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^-$

$$f(A) = \Theta\mathrm{form}\left(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } \mathrm{Soc}(G) \in E(A)\right)$$

и

$$f(\mathfrak{L}') = \Theta\mathrm{form}\left(G \mid G \in h(\mathfrak{L}') \cap \mathfrak{F} \text{ и } G_{E\mathfrak{L}} = 1\right);$$

5) *если* $E(\mathcal{K}(\mathfrak{X})) \in \Theta^{\mathfrak{L}}$, *то* $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Утверждения 1 – 3 вытекают из определений (см. доказательство леммы 5 в [12]). Докажем утверждение 4. Пусть $G \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F}$ и

$O_p(G) = 1$, где $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^+$. Пусть $A = Z_p \wr G = [K]G$, где K — база сплетения A. Согласно лемме 2 [13] $C^p(A) = K$. Значит, вследствие леммы 4 $A \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \simeq A / C^p(A) \in f(Z_p)$. Заметим, что согласно лемме 3.9 [1] для любой группы $A \in \mathfrak{X}$ $O_p(A / C^p(A)) = 1$. При этом $A / C^p(A) \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F}$. Итак,

$$f(Z_p) = \Theta\mathrm{form}\big(G \mid G \in h(Z_p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1\big).$$

Пусть $G \in h(A) \cap \mathfrak{F}$ и $\mathrm{Soc}(G) \in E(A)$, где $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}^-$. Пусть $N_1, \ldots$ $\ldots, N_t$ — набор всех минимальных нормальных в G подгрупп и $D = \bigcap_{i=1}^t C_G(N_i)$. Тогда, поскольку каждая минимальная в G подгруппа является неабелевой, $D = 1$. Значит, $C^A(G) = 1$. Но $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $G \simeq G / C^A(G) \in h(A)$. При этом согласно лемме 1 $\big(G / C^A(G)\big)_{E(A)} = 1$. Следовательно,

$$f(A) = \Theta\mathrm{form}\big(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } \mathrm{Soc}(G) \in E(A)\big).$$

Аналогично проверяется последнее утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть f_1 и f_2 — минимальные $\mathfrak{L}$-композиционные Θ-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.*

***Замечание* 1.** Согласно теореме 1 любая $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник f, что $f(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\}$ и $f(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(C^{Z_p})$ для всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Такой спутник будем называть каноническим. Канонические спутники будем обозначать большими латинскими буквами. Заметим, что если $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$ и f — произвольный внутренний $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то согласно лемме 5 $f \leq F$.

Из леммы 5 и замечания 1 вытекает следующее.

***Замечание* 2.** Если формация $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F) = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, то $f(Z_p) =$ $= \mathfrak{N}_p f\big((Z_p) \cap \mathfrak{F}\big)$ для всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$.

Из леммы 6 и замечания 1 вытекает следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}_1 = CF_{\mathfrak{L}}(F_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = CF_{\mathfrak{L}}(F_2)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $F_1 \leq F_2$.*

Лемма 8. *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in \Theta$ при любом $Z_p \in \mathfrak{L}^+$, $\Theta^{\mathfrak{L}} \subseteq \Theta$. Тогда если $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F) \in \Theta$, то спутник F Θ-значен.*

Доказательство. Пусть h — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\}$ и $h(Z_p) = \Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(C^{Z_p})\big)$ для всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Вследствие теоремы 1 и леммы 5 $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(h)$. А так как $\Theta^{\mathfrak{L}} \subseteq \Theta$, то h — внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Применяя теперь лемму 5, видим, что $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(C^{Z_p})$ при всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Значит, если $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$, то

$$F(Z_p) = \mathfrak{N}_p \Theta\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(C^{Z_p})\big) \in \Theta.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть формация $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{E\mathfrak{L}}$, либо найдется*

$A \in \mathcal{K}(G^{\mathfrak{F}}) \cap \mathfrak{L}$ *такая, что* $G / C^A(G) \notin f(A)$.

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{E\mathfrak{L}}$ и $G / C^A(G) \in f(A)$ для всех $A \in \mathcal{K}(G^{\mathfrak{F}}) \cap \mathfrak{L}$. Тогда $G / G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F} = f(\mathfrak{L}')$. Пусть $A \in (\mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L}) \setminus \mathcal{K}(G^{\mathfrak{F}})$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C^A(G)$ и $C^A(G / G^{\mathfrak{F}}) = C^A(G) / G^{\mathfrak{F}}$. Значит, для всех $A \in \mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L}$ $G / C^A(G) \in f(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}$ A*-композиционна для любой простой группы* A, *не принадлежащей* $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$;

2) *если* $\varnothing \neq \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}$*-композиционна, то* $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{T}$*-композиционна;*

3) *если* $\mathfrak{L} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{L}_i$ *и формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_i$*-композиционной для всех* $i \in I$, *то* $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}$*-композиционна.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает непосредственно из примера 4. Докажем утверждение 3. Пусть f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $f(a) = \mathfrak{F}$ для всех $a \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\}$ и $f(Z_p) = \mathfrak{F}(C^p)$ для всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Покажем, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq CF_{\mathfrak{L}}(f)$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus CF_{\mathfrak{L}}(f)$ с монолитом $R = G^{CF_{\mathfrak{L}}(f)}$. Предположим, что R — $(\mathfrak{L})'$-группа. Тогда $G_{E\mathfrak{L}} = 1$ и поэтому $G \simeq G / G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F} = f(\mathfrak{L}')$. Очевидно также, что для всех $A \in \mathfrak{L} \cup \mathcal{K}(G)$ имеет место $C^A(G / R) = C^A(G) / R$. Из последнего, учитывая, что $G / R \in CF_{\mathfrak{L}}(f)$, имеем $G \in CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Противоречие. Значит, R — (A)-группа, где $A = Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Тогда $Z_p \in \mathfrak{L}_i^+$ для некоторого $i \in I$. Пусть f_i — минимальный $\mathfrak{L}_i$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда согласно лемме 5 $f_i(Z_p) = \mathfrak{F}(C^p) = f(Z_p)$. А поскольку $G \in \mathfrak{F}$ и формация $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}_i$-композиционна, то $G / C^p(G) \in f(Z_p)$, что противоречит лемме 9. Аналогично к противоречию придем и в случае, когда $A \in \mathfrak{L}^-$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Допустим, что обратное включение не верно и G — группа минимального порядка из $CF_{\mathfrak{L}}(f) \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда, очевидно, R — (Z_p)-группа для некоторой группы $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Значит, если $Z_p \in \mathfrak{L}_i^+$ и f_i — минимальный $\mathfrak{L}_i$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G / C^p(G) \in f(Z_p) = \mathfrak{F}(C^p) = f_i(Z_p)$, что вновь противоречит лемме 9. Итак, $CF_{\mathfrak{L}}(f) \subseteq \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Утверждение 2 доказывается аналогично. Теорема доказана.

Любую формацию будем называть $\varnothing$-композиционной.

***Следствие* 1.** *Формация* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является* $\mathfrak{L}$*-композиционной, когда она* $\mathfrak{L}^+$*-композиционна.*

***Замечание* 3.** Согласно теореме 2 и следствию 1 при исследовании $\mathfrak{L}$-композиционных формаций можно ограничиться рассмотрением случаев, когда $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — некоторый класс абелевых простых групп.

Если $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$, то вместо термина „$\mathfrak{L}$-композиционная формация" будем использовать термин „ω-композиционная формация" и писать вместо $f(\mathfrak{L}')$ символ $f(\omega')$. Это согласуется с введенным в [9] понятием p-композиционной формации.

Приведенная выше формула для ω-композиционной формации $CF_\omega(f)$ принимает следующий более простой вид:

$$CF_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\omega_2} E(Z_p)'\right) \bigcap \left(\bigcap_{p\in\omega_1} \mathfrak{G}_{cp} f(p)\right) \bigcap \mathfrak{G}_\omega f(\omega'),$$

где $\omega_1 = \{p \in \omega \mid f(p) \neq \varnothing\}$, $\omega_2 = \omega \setminus \omega_1$.

3. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации. Любую формацию будем считать 0-*кратно* $\mathfrak{L}$-*композиционной*. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ назовем n-*кратно* $\mathfrak{L}$-*композиционной*, если $\mathfrak{F} = CF_\mathfrak{L}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *тотально* $\mathfrak{L}$-*композиционной*, если она n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна для всех натуральных n.

Лемма 10. *Формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна тогда и только тогда, когда она имеет такой спутник f, значения которого на абелевых простых группах $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны.*

Доказательство. Пусть f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, все значения которой на абелевых простых группах $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны. Индукцией по n покажем, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна. При $n = 1$ утверждение вытекает из условия.

Пусть $n > 1$ и лемма верна при $n - 1$. Рассмотрим такой спутник h, что

$$h(C^A) = \begin{cases} F(A) \bigcap \mathfrak{F}, & \text{если} \quad A \in \mathfrak{L}^+; \\ \mathfrak{F}, & \text{если} \quad A \in \mathfrak{L}^- \bigcup \{\mathfrak{L}'\}. \end{cases}$$

Понятно, что h — спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как, согласно нашему предположению, формация $\mathfrak{F}$ $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна, то все значения спутника h являются $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционными формациями. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна. Лемма доказана.

Пусть $c_n^\mathfrak{L}$ — совокупность всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, $c_\infty^\mathfrak{L}$ — совокупность всех тотально $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Условимся вместо $c_1^\mathfrak{L}$ писать $c^\mathfrak{L}$.

На основании примера 1 каждая подформация из $E\mathfrak{L}'$ тотально $\mathfrak{L}$-композиционна. В частности, формации $\varnothing$ и (1) тотально $\mathfrak{L}$-композиционны. А вследствие примера 2 для любого множества простых неабелевых групп $\mathfrak{L}$ каждая формация является тотально $\mathfrak{L}$-композиционной.

Тотально $\mathfrak{L}$-композиционна и формация $E\mathfrak{X}$ при любом наборе простых групп A. Итак, $\varnothing$, (1), $E\mathfrak{X} \in c_\infty^\mathfrak{L} = \bigcap_{n=1}^\infty c_n^\mathfrak{L}$. Кроме того, согласно лемме 2 пересечение любого множества n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций снова является n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной формацией. Таким образом, $c_\infty^\mathfrak{L}$, $c_n^\mathfrak{L}$ — полные решетки формаций.

Из леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Лемма 11. *Если $\mathfrak{F} = c_n^\mathfrak{L}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ и f — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный $c_{n-1}^\mathfrak{L}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\mathfrak{L}') = c_{n-1}^\mathfrak{L}\mathrm{form}(G / G_{E\mathfrak{L}} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(A) = c_{n-1}^\mathfrak{L}\mathrm{form}(\mathfrak{X}(C^A))$ *для всех* $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \bigcap (\mathfrak{L})$;

3) $f(A) = \varnothing$ *для всех* $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{K}(\mathfrak{X})$;

4) *если* $f = CF_\mathfrak{L}(h)$ *и спутник* h $c_{n-1}^\mathfrak{L}$-*значен, то для всех* $Z_p = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \bigcap \mathfrak{L}^+$

$$f(Z_p) = c_{n-1}^\mathfrak{L}\mathrm{form}(G \mid G \in h(Z_p) \bigcap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1),$$

для всех $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}^-$

$$f(A) = c_{n-1}^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\big(G \mid G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } \mathrm{Soc}(G) \in E(A)\big)$$

и

$$f(\mathfrak{L}') = c_{n-1}^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\big(G \mid G \in h(\mathfrak{L}') \cap \mathfrak{F} \text{ и } G_{E\mathfrak{L}} = 1\big).$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$ *— n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $n \geq 1$. Тогда спутник F $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значен.*

Доказательство. В силу леммы 8 достаточно лишь проверить, что для любого $p \in \mathbb{P}$ и каждой n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной формации $\mathfrak{H}$, $n > 0$, формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна. Утверждение очевидно, если $n = 0$. Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ утверждение верно. Пусть $\mathfrak{H} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$, где h — внутренний $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный спутник. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний $\mathfrak{L}$-композиционный спутник m, что $m(Z_p) = (1)$, $m(\mathfrak{L}') = (1)$, $m(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{L} \setminus (Z_p)$. Нетрудно показать (см. ниже пункт 5, теорема 6), что формация $\mathfrak{M}$ имеет такой спутник f, что $f(Z_p) = \mathfrak{H}$, $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{M}$ и $f(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{L} \setminus (Z_p)$. Однако согласно нашему предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Значит, $\mathfrak{M}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$ *— тотально $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $n \geq 1$. Тогда спутник F $c_{\infty}^{\mathfrak{L}}$-значен.*

4. Решетки n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. В работе [14] впервые установлена модулярность решетки всех формации и решетки всех локальных формаций. В этом пункте докажем модулярность решетки $c_n^{\mathfrak{L}}$.

Лемма 12. *Пусть Θ — такая же полная решетка формаций, как и в лемме 8. И пусть $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$, $i = 1, 2$, где $f_i(a) = \mathfrak{F}_i$ для всех $a \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\}$, причем спутники f_1 и f_2 Θ-значны и являются внутренними. Тогда если $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$, то $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(A) = \Theta\mathrm{form}(F_1(A) \cup F_2(A))$ при любом $a \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.*

Доказательство. Пусть h_i — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный Θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(F_i)$, $i = 1, 2$. Пусть $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(F)$ и h — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный Θ-значный спутник $\mathfrak{F}$. Пусть $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Согласно лемме 8 и замечанию 1

$$h_i(Z_p) \subseteq f_i(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_i(Z_p) = F_i(Z_p) \in \Theta.$$

Значит,

$$h(Z_p) = \Theta\mathrm{form}\Big((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)\big(C^{Z_p}\big)\Big) = \Theta\mathrm{form}\Big(\mathfrak{F}_1\big(C^{Z_p}\big) \cup \mathfrak{F}_2\big(C^{Z_p}\big)\Big) =$$

$$= \Theta\mathrm{form}\big(h_1(Z_p) \cup h_2(Z_p)\big) \subseteq f(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_p\Theta\mathrm{form}\big(h_1(Z_p) \cup h_2(Z_p)\big) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{N}_p\big(h(Z_p)\big) = F(Z_p).$$

Итак,

$$h(Z_p) \subseteq f(Z_p) \subseteq F(Z_p)$$

для всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Включения $h(a) \subseteq f(a) \subseteq F(a)$ для всех $a \in \{\mathfrak{L}'\} \cup \mathfrak{L}^-$ очевидны. Значит, $h \leq f \leq F$. Поэтому $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Лемма доказана.

Для произвольных совокупностей групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим $\mathfrak{M} \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Если m и h — $\mathfrak{L}$-композиционные $c_n^{\mathfrak{L}}$-значные спутники, то через $m \vee_n^{\mathfrak{L}} h$ обозначим такой спутник, что $\left(m \vee_n^{\mathfrak{L}} h\right)(A) = m(A) \vee_n^{\mathfrak{L}} h(A)$ при всех $A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.

В общем случае символ $\vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} (f_i \mid i \in I)$ обозначает такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник m, что $m(a) = \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} (f_i(a) \mid i \in I)$ для всех $a \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\}$.

Из леммы 12 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 13. *Пусть f_i — такой внутренний $\mathfrak{L}$-композиционный $c_n^{\mathfrak{L}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, что $f_i(a) = \mathfrak{F}_i$ для всех $a \in \{\mathfrak{L}'\} \cup \mathfrak{L}^-$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_{n+1}^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_2 = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f = f_1 \vee_n^{\mathfrak{L}} f_2$.*

Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *однопорожденная $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация* (или, иначе, *однопорожденная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация*), если найдется такая группа F, что $\mathfrak{F} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(G)$.

Теорема 4. *Для любого непустого множества простых групп $\mathfrak{L}$ и любого целого неотрицательного n решетка $c_n^{\mathfrak{L}}$ алгебраична и модулярна.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что решетка $c_n^{\mathfrak{L}}$ является алгебраической.

Очевидно, что любая n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация $\mathfrak{M}$ есть объединение (в решетке $c_n^{\mathfrak{L}}$) своих однопорожденных $c_n^{\mathfrak{L}}$-подформаций. Индукцией по n покажем, что каждая однопорожденная $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в $c_n^{\mathfrak{L}}$. Пусть

$$\mathfrak{F} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{M} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Предположим, что $n = 0$. Тогда

$$G \in \mathrm{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = HR_0\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Следовательно, $G \simeq T / N$ для некоторой группы $T \in R_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Значит, найдутся такие $i_1, \ldots, i_a \in I$, что $T \in R_0\left(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_{i_a}\right)$. Поэтому $G \in \mathrm{form}\left(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_{i_a}\right)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}\left(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_{i_a}\right)$.

Пусть $n > 0$ и однопорожденные $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-формации являются компактными элементами в $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$. Пусть f_i — минимальный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный экран формации $\mathfrak{F}_i$, f — минимальный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный экран формации $\mathfrak{F}$, m — минимальный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный экран формации $\mathfrak{M}$. Вследствие леммы 5

$$f(A) = c_{n-1}^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\left(G / C^A(G)\right)$$

при всех $A \in \mathcal{K}(G)$, $f(A) = \varnothing$ при всех $A \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{K}(G)$ и

$$f(\mathfrak{L}') = c_{n-1}^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\left(G / G_{E\mathfrak{L}}\right).$$

В силу леммы 6 $f \leq m$. Согласно лемме 5 $m = \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} (f_i \mid i \in I)$. Значит, для каждого $A \in \pi\mathcal{K}(G)$ найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_t \in I$, что

$$G / C^A(G) \in f_{i_1}(A) \vee_{n-1}^{\tau} \cdots \vee_{n-1}^{\tau} f_{i_t}(A).$$

Поскольку $|\mathcal{K}(G)| < \infty$, то из последнего вытекает, что найдутся индексы $j_1, \ldots, j_k \in I$ такие, что $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee_n^{\mathfrak{L}} \cdots \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_{j_k}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee_n^{\mathfrak{L}} \cdots \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_{j_k}$. Итак, решетка $c_n^{\mathfrak{L}}$ алгебраична и ее компактными элементами являются однопорожденные $c_n^{\mathfrak{L}}$-формации.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. При $n = 0$ это утверждение теоремы верно в силу леммы 1 [14] (см. также §9 работы [2]). Пусть $n > 0$ и второе утверждение теоремы верно при $n - 1$.

Пусть $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(F_i)$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $i = 1, 2, 3$. Предположим, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \bigcap \left(\mathfrak{F}_2 \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_3\right) = \mathfrak{F}_2 \vee_n^{\mathfrak{L}} \left(\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_3\right).$$

Пусть f_i — такой $\mathfrak{L}$-композиционный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный спутник, что $f_i(a) = \mathfrak{F}_i = F_i(A)$ для всех $a \in \{\mathfrak{L}'\} \bigcup \mathfrak{L}^-$ и $f_i(Z_p) = c_{n-1}^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\left(\mathfrak{F}_i\left(C^{Z_p}\right)\right)$ при всех $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Согласно лемме 10 $\mathfrak{F}_i = CF_{\mathfrak{L}}(f_i)$. Пусть $r_1 = f_2 \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} f_3$. По лемме 13 $\mathfrak{F}_2 \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_3 = CF_{\mathfrak{L}}(r_1)$ А по лемме 2 $h_1 = f_1 \cap r_1$ — внутренний $\mathfrak{L}$-композиционный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \bigcap \left(\mathfrak{F}_2 \vee_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_3\right)$.

Понятно, что $f_2(A) \subseteq f_1(A)$ при всех $A \in \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}$. Значит, согласно нашему предположению, при всех $A \in \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}$

$$f_1(A) \bigcap \left(f_2(A) \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} f_3(A)\right) = f_2(A) \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} \left(f_1(A) \bigcap f_3(A)\right).$$

Следовательно, $h_1 = f_2 \vee_{n-1}^{\mathfrak{L}} (f_1 \cap f_3)$. Однако $f_1 \cap f_3$ — внутренний $\mathfrak{L}$-композиционный $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3$. Значит, согласно лемме 13 $\mathfrak{F}_2 \vee_n^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = CF_{\mathfrak{L}}(h_1)$, что доказывает требуемое равенство. Теорема доказана.

5. Максимальные подформации n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Для любых двух n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ с $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F} /_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{H}$ обозначается решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\mathfrak{M}$ с условием $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ — *максимальная $c_n^{\mathfrak{L}}$-подформация* в $\mathfrak{F}$ (или, иначе, *максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация формации* $\mathfrak{F}$), если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации и решетка $\mathfrak{F} /_n^{\mathfrak{L}} \mathfrak{M}$ имеет лишь два элемента.

Изучение максимальных подформаций различных типов и их пересечений было начато в работах А. Н. Скибы [13, 15]. В данном пункте описываются наиболее общие свойства пересечений максимальных n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций.

Лемма 14. *Пусть* $\mathfrak{F} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X} \bigcup \{G\})$ *и* $\mathfrak{M} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) \neq \mathfrak{F}$, $n \geq 0$. *Тогда в* $\mathfrak{F}$ *найдется максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация, которая содержит* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть Σ — множество всех тех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций из $\mathfrak{F}$, которые содержат $\mathfrak{M}$, но не содержат G. Множество Σ частично упорядочено по включению. Пусть $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольная цепь из Σ и $\mathfrak{H}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Согласно лемме 3 $\mathfrak{H}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Ясно, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ и $G\notin\mathfrak{H}$. Поэтому, согласно лемме Цорна, каждый элемент из Σ содержится в некотором максимальном элементе из Σ. Покажем, что любой из таких элементов $\mathfrak{H}_1$ является максимальной n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной подформацией в $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{F}_1\subset\subset\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}_1$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Тогда поскольку $\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{F}_1$, то $G\notin\mathfrak{F}_1$. Значит, $\mathfrak{F}_1\in\Sigma$. Однако последнее противоречит определению формации $\mathfrak{H}_1$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация. Обозначим через $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$ пересечение всех максимальных $c_n^{\mathfrak{L}}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если таких подформаций в $\mathfrak{F}$ нет, то положим $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$.

Группу $G\in\mathfrak{F}$ назовем *$c_n^{\mathfrak{L}}$-необразующей для* $\mathfrak{F}$, если всегда из $\mathfrak{F}==c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G\})$ следует $\mathfrak{F}=c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Теорема 5. *Если $\mathfrak{F}$ — непустая n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $n\geq 1$ и $\mathfrak{F}\neq(1)$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$ *состоит из всех $c_n^{\mathfrak{L}}$-необразующих групп для $\mathfrak{F}$;*

2) *если $\mathfrak{M}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $n\geq 0$, причем $\mathfrak{M}\subseteq\subseteq\mathfrak{F}$, то $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})\subseteq\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть G — произвольная $c_n^{\mathfrak{L}}$-необразующая группа в $\mathfrak{F}$. И пусть $\mathfrak{F}_1$ — некоторая максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$. Если $G\notin\mathfrak{F}_1$, то

$$c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\{G\}) = \mathfrak{F} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}_1.$$

Противоречие. Значит, $G\in\mathfrak{F}_1$.

Наоборот, пусть $G\subseteq\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F}==c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G\})$, но $c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})\neq\mathfrak{F}$. Тогда в силу леммы 14 в $\mathfrak{F}$ найдется такая максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация $\mathfrak{H}$, что $c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})\subseteq\mathfrak{H}$; но $G\subseteq\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$, значит, $\mathfrak{H}=\mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, $c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})=\mathfrak{F}$. Это доказывает утверждение 1.

Пусть теперь $\Phi=\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})$. Предположим, что $\Phi\not\subseteq\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется такая максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация $\mathfrak{F}_1$, что $\Phi\not\subseteq\mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{F}_1$. Поскольку по теореме 4 решетка n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций модулярна, то имеет место решеточный изоморфизм

$$\left(\mathfrak{F}_1\vee_n^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}\right)/_n^{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{F}_1\simeq\mathfrak{M}\,/_n^{\mathfrak{L}}\,(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}_1).$$

Поскольку при этом решетка $\left(\mathfrak{F}_1\vee_n^{\mathfrak{L}}\mathfrak{M}\right)/_n^{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{F}_1$ содержит лишь два элемента, то $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}_1$ — максимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная подформация в $\mathfrak{M}$. Значит, $\Phi\subseteq\mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{M})\subseteq\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Поскольку в каждой однопорожденной $c_n^{\mathfrak{L}}$-формации $\mathfrak{F}$ $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})\neq\mathfrak{F}$, то особенно интересен случай, когда $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$ совпадает с максимальной $c_n^{\mathfrak{L}}$-подформацией в $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ — множество всех ее собственных n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций. Тогда если

$$\mathfrak{M} = c_n^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) \subset \mathfrak{F},$$

то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *неприводимая* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формация*. Если же $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *приводимая* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формация*.

Значение этих понятий связано со следующей очевидной леммой.

Лемма 15. *Если $\mathfrak{F}$ — неприводимая $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация, $n \geq 0$, то $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация с единственной максимальной $c_n^{\mathfrak{L}}$-подформацией.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $\mathfrak{H}$ — произвольный класс групп. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$, то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_n^{\mathfrak{L}}$*-критическая* или, иначе, *минимальная n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная не $\mathfrak{H}$-формация*.

Лемма 16. *Пусть $\mathfrak{H}$ — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация, $n \geq 0$, $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_n^{\mathfrak{L}}$-критическая формация. Тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация и $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{H}$.*

6. О произведении $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Напомним, что в работе [16] описаны экраны композиционных произведений двух формаций. В этом пункте некоторые результаты из [16] распространяются на $\mathfrak{L}$-композиционные формации.

Теорема 6. *Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = CF_{\mathfrak{L}}(h)$, $\mathfrak{M} = CF_{\mathfrak{L}}(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда если $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$ и для всех $A \in \mathfrak{L}$*

$$f(A) = \begin{cases} m(A)\mathfrak{H}, & \text{если} \quad m(A) \neq \varnothing; \\ h(A), & \text{если} \quad m(A) = \varnothing. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где f — спутник, описанный в условии теоремы. Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_1}$. Пусть R — A-группа. Если $R \not\subseteq G_{E\mathfrak{L}}$, то $G_{E\mathfrak{L}} = 1$. Значит, $G \simeq G / G_{\mathfrak{E}\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F} = f(\mathfrak{L}')$. Кроме того, поскольку согласно лемме 1 для всех $B \in (\mathfrak{L}) \cap \mathcal{K}(G)$ $C^B(G)/R = C^B(G/R)$ и $G/R \in \mathfrak{F}_1$, то $G / C^B(G) \in f(B)$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, $A \in (\mathfrak{L})$. Значит, согласно лемме 9 $G / C_A(G) \notin f(A)$.

Если $G \in \mathfrak{H}$, то

$$G / C_A(G) \in h(A) \subseteq m(A)\mathfrak{H} \cup h(A).$$

Значит, $G / C_A(G) \in f(A)$. Противоречие. Следовательно, $G \notin \mathfrak{H}$. Тогда $R \subseteq G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Значит,

$$G^{\mathfrak{H}} / C^A\left(G^{\mathfrak{H}}\right) = G^{\mathfrak{H}} / C^A(G) \cap G^{\mathfrak{H}} \simeq C^A(G) G^{\mathfrak{H}} / C^A(G) =$$

$$= \left(G / C^A(G)\right)^{\mathfrak{H}} \in m(A).$$

Поэтому $G / C^A(G) \in m(A)\mathfrak{H} = f(A)$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и поэтому

$R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, поскольку $(G/R)^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/R$ и $G/R \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$. Если $G_{E\mathfrak{L}} = 1$, то $G \simeq G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$, что противоречит определению группы G. Итак, R — A-группа для некоторой простой группы $A \in (\mathfrak{L})$.

Пусть $m(A) \neq \varnothing$. Тогда $G/C^A(G) \in m(A)\mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}C^A(G)/C^A(G) \in m(A)$ и поэтому $G^{\mathfrak{H}}/C^A(G) \cap G^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/C^A\left(G^{\mathfrak{H}}\right) \in m(A)$. Однако $G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$, следовательно, $G^{\mathfrak{H}}/C^B\left(G^{\mathfrak{H}}\right) \in m(B)$ для всех простых групп $B \in (\mathfrak{L}) \cap \mathcal{K}\left(G^{\mathfrak{H}}\right)$. Очевидно также, что $G^{\mathfrak{H}}/\left(G^{\mathfrak{H}}\right)_{E\mathfrak{L}} \in m(\mathfrak{L}')$. Значит, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть $m(A) = \varnothing$. Поскольку $G \in CF_{\mathfrak{L}}(f)$, то $G/C^A(G) \in f(A) = h(A) \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $G^{\mathfrak{H}} \subseteq C^A(G)$ и поэтому $R \subseteq Z\left(G^{\mathfrak{H}}\right)$. Следовательно, $R = Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Так как $m(Z_p) = \varnothing$, то согласно теореме 1 $Z_p \notin \mathcal{K}(\mathfrak{M})$. По условию $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$ и поэтому $G^{\mathfrak{H}}/R$ — p'-группа. Если $R \not\subseteq \Phi(G)$, то $R = C_G(R) = C^{Z_p}(G)$. Однако $G \in CF_{\mathfrak{L}}(f)$, значит, $G/R \in h(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}$. Согласно лемме 4 $G \in \mathfrak{H} \subseteq \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть $R \in \Phi(G)$. Тогда в силу леммы 4.4 [1] $G^{\mathfrak{H}} = R \times B$, где B — p'-группа, а значит, B — нормальная в G подгруппа. Поскольку группа G монолитична, то последнее означает, что $R = G^{\mathfrak{H}}$ и $G/C^{Z_p}(G) \in h(Z_p)$. Противоречие. Таким образом, $CF_{\mathfrak{L}}(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$. Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\mathfrak{M} = CF_{\mathfrak{L}}(M)$, $\mathfrak{H} = CF_{\mathfrak{L}}(H)$ — *формации и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, *где* $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$ *и*

$$f(A) = \begin{cases} M(A)\mathfrak{H}, & \textit{если} \quad m(A) \neq \varnothing; \\ H(A), & \textit{если} \quad m(A) = \varnothing. \end{cases}$$

***Следствие* 4.** *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционны,* $n \geq 0$ *и* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционной является и формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$.

Доказательство. При $n = 0$ следствие верно. Пусть $n > 0$ и при $n-1$ следствие верно. Пусть $\mathfrak{M} = CF_{\mathfrak{L}}(M)$ и $\mathfrak{H} = CF_{\mathfrak{L}}(H)$. Согласно следствию 3 $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$ и

$$f(A) = \begin{cases} M(A)\mathfrak{H}, & \text{если} \quad m(A) \neq \varnothing; \\ H(A), & \text{если} \quad m(A) = \varnothing. \end{cases}$$

Согласно лемме 11 при любом $A = (\mathfrak{L})$ обе формации $M(A)$ и $H(A)$ $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны. Кроме того, согласно нашему предположению обе формации $\mathfrak{F}$ и $M(Z_p)\mathfrak{H}$ являются $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционными. Значит, спутник f $c_{n-1}^{\mathfrak{L}}$-значен. Следствие доказано.

***Следствие* 5.** *Произведение любых двух наследственных* n*-кратно композиционных формаций является* n*-кратно композиционной формацией.*

Отметим нерешенные проблемы.

Проблема 1. *Алгебраична ли решетка* $c_{\infty}^{\mathfrak{L}}$?

Проблема 2. *Модулярна ли решетка* $c_{\infty}^{\mathfrak{L}}$?

Проблема 3. *Верно ли, что при любых целых неотрицательных* n *и* m *у решеток* $c_n^{\mathfrak{L}}$ *и* $c_m^{\mathfrak{L}}$ *системы тождеств совпадают?*

Проблема 4. *Верно ли, что для любой конечной модулярной решетки* L *найдется такое* n, *что* L *вложима в* $c_n^{\mathfrak{L}}$?

Проблема 5. *Описать такие* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционные формации* $\mathfrak{F}$, *для которых* $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ *является решеткой с дополнениями.*

Проблема 6. *Описать такие* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционные формации* $\mathfrak{F}$, *для которых длина решетки* $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ *не превышает* 2.

Нетрудно показать, что если $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $c_n^{\mathfrak{L}}$-формация ($n\ge 0$), то в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций, а также лишь конечное множество наследственных n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных подформаций.

Проблема 7. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— однопорожденная* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формация,* $n\ge 0$. *Верно ли, что решетка* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционных подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *конечна (не более чем счетна)?*

Проблема 8. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— однопорожденная* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формация,* $n\ge 0$. *Верно ли, что решетка* $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ *конечна?*

Проблема 9. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— однопорожденная* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формация,* $n\ge 0$. *Верно ли, что в* $\mathfrak{F}$ *имеется лишь конечное множество нормально наследственных* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционных подформаций?*

Проблема 10. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация,* $n\ge 0$. *Равносильны ли следующие условия:*

1) *решетка* $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}(1)$ *конечна;*

2) *решетка* $\mathfrak{F}/_n^{\mathfrak{L}}(1)$ *имеет конечную длину?*

Проблема 11. *Верно ли, что для любой группы* G *можно указать такую однопорожденную* $c_n^{\mathfrak{L}}$*-формацию* $\mathfrak{F}$ $(n\ge 0)$, *что* $G\in\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})$?

Из теоремы 6 вытекает, что если $\mathfrak{F}$ — разрешимая n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация и $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})=(1)$, где $n\ge 0$, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$. В связи с этим интересны следующие две проблемы.

Проблема 12. *Каковы* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционные формации* $\mathfrak{F}$ *с* $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})=(1)$?

Проблема 13. *Описать разрешимые* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционные формации* $\mathfrak{F}$ *с* $\Phi_n^{\mathfrak{L}}(\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{N}$.

Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *$\mathfrak{L}$-композиционная формация классического типа*, если $\mathfrak{F}=CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где каждое неабелево значение спутника f является $\mathfrak{L}$-композиционной формацией.

Проблема 14. *Описать минимальные* n*-кратно* $\mathfrak{L}$*-композиционные не* $\mathfrak{H}$*-формации, где* $\mathfrak{H}$ *—* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация классического типа.*

По всей видимости, решение проблемы 14 является весьма трудной задачей. Поэтому естественны следующие проблемы.

Проблема 15. *Описать минимальные* $\mathfrak{L}$*-композиционные не* $\mathfrak{H}$*-формации, где* $\mathfrak{H}$ *—* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация классического типа.*

Проблема 16. *Описать минимальные* $\mathfrak{L}$*-композиционные не* $\mathfrak{H}$*-формации, где* $\mathfrak{H}$ *— разрешимая* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация классического типа.*

Проблема 17. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *—* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация классического типа. Верно ли тогда, что в каждой* $\mathfrak{L}$*-композиционной формации* $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$ *содержится минимальная* $\mathfrak{L}$*-композиционная не* $\mathfrak{H}$*-подформация?*

Проблема 18. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — *однопорожденная* $\mathfrak{L}$*-композиционная формация. Верно ли, что если* $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, *то формация* $\mathfrak{M}$ *является* $\mathfrak{L}$*-композиционной?*

Отметим, что ответ на вопрос 18 положителен [17] в случае, когда $\mathfrak{L}$ — класс всех простых групп.

Проблема 19. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ — *формации. Найти необходимые и достаточные условия* p*-композиционности формации* $\mathfrak{F}$ *в зависимости от свойств формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется S-неразложимой [18], если $\mathfrak{F}$ нельзя представить в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ наследственны и отличны от (1) и $\mathfrak{F}$.

Проблема 20. *Пусть* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \cdots \mathfrak{M}_n$, *где* $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ — S*-неразложимые наследственные* $\mathfrak{L}$*-композиционные формации. Верно ли тогда, что* $t = n$ *и* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_i$ *при всех* $i = 1, 2, \ldots, n$?

Несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$ называется [5] любое произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t$, $t \geq 2$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$ при всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Проблема 21. *Описать несократимые факторизации однопорожденных* $\mathfrak{L}$*-композиционных формаций.*

Настоящая статья является дальнейшим развитием идей и результатов статьи [12], вышедшей также в английском переводе [19]. Основные идеи статьи анонсированы в [20].

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
4. *Селькин М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 144 с.
5. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
6. *Шеметков Л.А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 2. – С. 179–198.
7. *Шеметков Л.А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. симп. по теории групп. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 37–50.
8. *Shemetkov L.A.* Some ideas and results in the theory of formations of finite groups. – Coventry, Warwick Preprints. – 1991. – № 13. – 44 p.
9. *Shemetkov L.A.* Frattini extensions of finite groups and formations // Communs Algebra. – 1997. – **25**, № 3. – P. 955–964.
10. *Каморников С.Ф., Шеметков Л.А.* О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. – 1995. – **34**, № 5. – С. 493–513.
11. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып.7. – С. 39–43.
12. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. – 1999. – **2**, № 2. – С. 114–147.
13. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. навук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
14. *Скиба А.Н.* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 149–156.
15. *Скиба А.Н.* Формация с заданной системой подформаций // Докл. АН БССР. – 1979. – **23**, № 12. – С. 1073–1076.
16. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций // Там же. – 1984. – **28**, № 2. – С. 101–103.
17. *Скиба А.Н.* О факторизациях композиционных формаций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 3. – С. 389–395.
18. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О наследственно неразложимых формациях групп // Докл. АН БССР. – 1989. – **33**, № 7. – С. 581–583.
19. *Shemetkov L.A., Skiba A.N.* Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups // Sib. Adv. Math. – 2000. – **10**, № 2. – P. 1–30.
20. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – **43**, № 4. – С. 5–8.

Получено 12.02.99