УДК 519.21

М. О. Самойленко (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ З РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We prove the Hölder condition for sums of series obtained by the replacement of random variables in the Fourier decomposition of Wiener process by uniformly distributed sequences.

Доведено умову Гельдера для сум рядів, утворених заміною випадкових величин у розкладі Фур'є вінерового процесу рівномірно розподіленими послідовностями.

1. Вступ. Відомо [1], що рівномірно розподілені послідовності мають багато властивостей, характерних для типової реалізації послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин. Природно виникає питання наявності більш глибоких, ніж закон великих чисел, імовірнісних властивостей у рівномірно розподіленої послідовності. У даній роботі для рівномірно розподілених за модулем 1 послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ досліджуються ряди вигляду

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 1/2}{n} \sin nt. \tag{1}$$

Для деяких класів послідовностей доведено, що сума ряду (1) задовольняє умову Гельдера.

2. Незалежно розподілені послідовності. Тут ми введемо клас послідовностей коефіцієнтів, для яких вдається довести збіжність ряду (1) та виявити деякі властивості вінерових траєкторій у його суми. Наведемо спочатку необхідні відомі означення [1].

Для послідовності $\omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ в $[0, 1]^m$ та $\Delta \subset [0, 1]^m$, де m — деяке натуральне число, покладемо

$$A(\Delta, N, \omega) \equiv A(\Delta, N) = \sum_{k=1}^{N} I_{\Delta}(\omega_k).$$

Тоді $A(\cdot, N, \omega)$ — міра на σ-алгебрі борелевих підмножин B_m куба $[0, 1]^m$. Нехай μ — імовірнісна міра на B_m.

Означення 1. *Послідовність* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ *має асимптотичний розподіл за модулем* 1 (*скорочено*: *а.р.* (*мод.* 1)) μ, *якщо послідовність мір* $\{ (1/N)A(\cdot, N, \omega), N \geq 1 \}$ *слабко збігається до міри* μ *при* $N \to \infty$.

Означення 2. *Послідовність* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ *називається рівномірно розподіленою за модулем* 1 (*скорочено*: *р.р.* (*мод.* 1)), *якщо її асимптотичний розподіл за модулем* 1 *є мірою Лебега*.

Означення 3. *Відхиленням N перших членів послідовності* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ *з асимптотичним розподілом* μ *називається величина*

$$D_N^*((\omega_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{x \in [0;1]^m} \left| \frac{A([0;x^1] \times \ldots \times [0;x^m], N)}{N} - \mu([0;x^1] \times \ldots \times [0;x^m]) \right|.$$

Ми побудували $S(t)$, замінивши послідовність незалежних однаково розподілених нормальних випадкових величин у розкладі Фур'є вінерового процесу послідовністю $(a_n - 1/2)_{n=1}^{\infty}$, де $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — р.р. (мод. 1)). Перепишемо в (1) $\sin nt = \sin(2\pi\{nt/2\pi\})$ (через $\{x\}$ будемо позначати дробову частину дійсного числа x, через $[x]$ — цілу). Послідовність $(\{nt/2\pi\})_{n=1}^{\infty}$ також має а. р.

Дійсно, якщо $r \in Q$ зображуване нескоротним дробом p/q, то а.р. $(\{nr\})_{n=1}^{\infty}$ має вигляд $\mu(\Delta) = (1/q)\sum_{k=0}^{q-1} I_{\Delta}(k/q)$, $\Delta \in B_1$. Якщо $r \notin Q$, то $(\{nr\})_{n=1}^{\infty}$ р.р. (мод. 1), як показано в [1]. Далі нас цікавитиме сумісна поведінка $(a_n - 1/2)_{n=1}^{\infty}$ та $(\{nt/2\pi\})_{n=1}^{\infty}$ при кожному значенні t. Для її опису виділимо клас послідовностей $G = \left((\{nr\})_{n=1}^{\infty},\ r \in R\right)$.

Означення 4. *Послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, які мають а.р. відповідно μ_1 та μ_2, назвемо незалежно розподіленими (н.р.), якщо послідовність $(c_n)_{n=1}^{\infty} : c_n = (a_n, b_n)$ має а.р. $\mu = \mu_1 \times \mu_2$.*

Приклад 1. Послідовності $(\{n/2\})_{n=1}^{\infty}$ та $(\{n/3\})_{n=1}^{\infty}$ незалежно розподілені.

Приклад 2. Нехай послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне співвідношення $a_n = F(a_{n-m}, \ldots, \alpha_{n-1})$ при $n > m$ із деякою функцією $F : R^m \to R$, і множина значень $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченна. Тоді існує $r \in Q$ таке, що $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ не є н.р. з $(\{nr\})_{n=1}^{\infty}$.

Дійсно, в умовах прикладу r можна вибрати так, щоб послідовності $((a_n, \{nr\}))_{n=1}^{\infty}$ та $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ мали однаковий найменший період.

Нехай F — клас, елементами якого є всі функції $f : R_+ \to R$ з властивостями:

a) при $s \ge s_0$, $s_0 \in R$, похідна функції $f(s)$ існує та монотонно спадає до нуля;

b) $\lim\limits_{s \to +\infty} sf'(s) = +\infty$.

Зауважимо, що для кожної функції $f \in F$ послідовність $(\{f(n)\})_{n=1}^{\infty}$ р.р. (мод. 1) (теорема Фейєра, [1]).

Твердження 1. *Для будь-якої функції f із класу F послідовність $(a_n = \{f(n)\})_{n=1}^{\infty}$ н.р. з будь-яким елементом класу G.*

Для доведення нам потрібна така лема.

Лема 1. *Якщо $f \in F$, то* $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(1 + f(s))}{s} = 1.$

Доведення леми. Нехай g та h — монотонно зростаючі диференційовні функції та існує таке $S \in R$, що для кожного $s > S$ $h'(s) \ge g'(s)$. Тоді для $s > S$ $h^{-1}(1 + h(s)) \le g^{-1}(1 + g(s))$. З умови b) для функції f випливає, що для кожного $C > 0$ існує таке S_C, що для $s > S_C$ $f'(s) \ge C/s = (C \ln s)'$. Тому

$$\overline{\lim_{s \to +\infty}} \frac{f^{-1}(1 + f(s))}{s} \le \inf_{C > 0} \lim_{s \to +\infty} \frac{\exp((1 + C \ln s)/C)}{s} = \inf_{C > 0} \exp(1/C) = 1.$$

З іншого боку, $f^{-1}(1 + f(s)) \ge s$ через монотонне зростання f. Лему доведено.

Доведення твердження. Нехай $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in G$ і $c_n = (a_n, b_n)$, $n \ge 1$. Доведемо, що для будь-якого Δ вигляду $[0; x] \times [0; y]$, де $(x, y) \in (0; 1] \times [0; 1]$, існує $\lim\limits_{N \to \infty} (1/N) A(\Delta, N, c) = \mu_1([0; x])\, \mu_2([0; y])$, де μ_1 та μ_2 — а.р. послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ відповідно. При $x = 0$ останнє очевидно.

Будемо замість $A(\cdot, N, c)$ вживати скорочений запис $A(\cdot, N)$.

Покладемо $\delta_N = \sup\limits_{m\ge1} D_N^*\big((b_n)_{n=m}^{\infty}\big)$. Нехай $r \in R$ таке, що $b_n = \{nr\}$, $n \ge 1$. Якщо $r \notin Q$, то, згідно з [1], послідовність $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ є відмінно розподіленою за модулем 1, тобто $D_N^*\big((b_n)_{n=m}^{\infty}\big) \to 0$ при $N \to \infty$ рівномірно по m. Якщо $r \in Q$ зображуване нескоротним дробом p/q, то для довільного $\Delta \in B_1$

$$\left|A\big(\Delta, N, (b_n)_{n=1}^{\infty}\big) - A\big(\Delta, N, (b_n)_{n=m}^{\infty}\big)\right| \le q-1.$$

Тому $D_N^*\big((b_n)_{n=m}^{\infty}\big) \le D_N^*\big((b_n)_{n=1}^{\infty}\big) + (q-1)/N \to 0$ при $N \to \infty$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке натуральне M, що для кожного $N \ge M$ $\delta_N < \varepsilon$.

За властивістю a) функції f існує $\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t+M) - f(t)) = \lim\limits_{t\to+\infty} f'(\theta_t)M = 0$, де $\theta_t \in (t; t+M)$. Тому існує таке натуральне K, що для кожного $n \ge K$ $0 < f(n+M) - f(n) < x$.

Введемо позначення:

$$\tilde{A}(\Delta, N) = \sum_{i=K}^{N+K} I_\Delta(c_i),$$

$$\Omega_i^x = \big(n \in N \mid a_n \in [0;x] \,\&\, [f(n)] = i\big), \qquad s_i^x = \left|\Omega_i^x\right|,$$

$$\Omega_i^{xy} = \big(n \in \Omega_i^x \mid b_n \in [0;y]\big), \qquad s_i^{xy} = \left|\Omega_i^{xy}\right|.$$

За властивістю b) функція f нескінченно зростає на $+\infty$, тому всі s_i^x — натуральні числа.

Оскільки f — монотонна функція, Ω_i^x є об'єднанням послідовних чисел (нехай $\Omega_i^x = (m, \ldots, m+l)$). Тому

$$\left|\frac{s_i^{xy}}{s_i^x} - \mu_2([0;y])\right| \le D_{l+1}^*\big((b_n)_{n=m}^{\infty}\big) \le \delta_{l+1},$$

оскільки $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ має той самий а.р., що і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Оцінимо:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} s_i^{xy} - \mu_1([0;x])\mu_2([0;y])\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} \mu_2([0;y])s_i^x - \mu_1([0;x])\mu_2([0;y])\right| + \frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} \delta_{s_i^x} s_i^x \le$$

$$\le \mu_2([0;y])\, D_{[f(K+N)]-[f(K)]}^*\big((a_n)_{n=[f(K)]}^{\infty}\big) + \sup_{i\ge[f(K)]} \delta_{s_i^x} \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} s_i^x \le$$

$$\le \mu_2([0;y])\, D_{[f(K+N)]-[f(K)]}^*\big((a_n)_{n=[f(K)]}^{\infty}\big) + \varepsilon \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} s_i^x,$$

оскільки при $i \ge [f(K)]$ $s_i^x \ge M$, а тому $\delta_{s_i^x} < \varepsilon$. Далі врахуємо, що $D_{[f(K+N)]-[f(K)]}^*\big((a_n)_{n=[f(K)]}^{\infty}\big) \to 0$ при $N \to \infty$, а також $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=[f(K)]}^{[f(K+N)]} s_i^x = \mu_1([0;x])$, оскільки $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ р.р. (мод. 1).

Отже, ряд $S(2\pi\lambda/k)$ розбігається.

Означимо підклас $\tilde{F} \subset F$ функцій із додатковими властивостями:

c) при $s \geq s_1$, $s_1 \in R$, функція $\dfrac{(s+1)f(s)}{(s+2)s}$ монотонно спадає;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{f^{-1}(n)}$ збігається.

***Зауваження* 1.** Функції вигляду $f(s) = s^{\gamma}\ln^{p} s$, де $\gamma \in (0; 1)$ та $p \in R$, і $h(s) = \ln^{r} s$, де $r > 1$, належать до класу $\tilde{F}$.

Твердження 2. *Нехай функція f належить до класу $\tilde{F}$ і $[\alpha; \beta]$ — такий замкнений інтервал, що не містить жодної точки вигляду πk при цілих k. Тоді ряд* (1) *збігається на $[\alpha; \beta]$ рівномірно для $a_n = \{f(n)\}$.*

Доведення. Для натуральних $K \geq N$ покладемо

$$S_K^N(t) \;=\; \sum_{n=N-1}^{K+1} \frac{a_n - 1/2}{n} \sin nt \quad \text{для } t \in [\alpha; \beta].$$

Нехай $N > \max(s_0, s_1)$, де s_0 і s_1 — числа, що існують за властивостями a) та c) функції f. Також можна вважати N достатньо великим, щоб $f(N) > 0$.

Тоді справедлива оцінка

$$\left|S_K^N(t)\right| \;=\; \left|\frac{1}{2\sin t}\sum_{n=N-1}^{K+1} \frac{a_n - 1/2}{n}\left(\cos(n+1)t - \cos(n-1)t\right)\right| \;=$$

$$=\; \frac{1}{2|\sin t|}\left|\sum_{n=N}^{K}\left(\frac{a_{n-1}-1/2}{n-1} - \frac{a_{n+1}-1/2}{n+1}\right)\cos nt + \frac{a_{K+1}-1/2}{K+1}\cos(K+2)t \;+\right.$$

$$\left. +\; \frac{a_K - 1/2}{K}\cos(K+1)t + \frac{a_N - 1/2}{N}\cos(N-1)t + \frac{a_{N-1}-1/2}{N-1}\cos(N-2)t\right| \;\leq$$

$$\leq\; \frac{1}{2|\sin t|}\left(\frac{1}{2(K+1)} + \frac{1}{2K} + \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2(N-2)} + \left|\sum_{n=N}^{K}\left(\frac{a_{n-1}-1/2}{n-1} - \frac{a_{n+1}-1/2}{n+1}\right)\cos nt\right|\right).$$

Перепишемо $a_{n-1} - a_{n+1} \;=\; \{f(n-1)\} - \{f(n+1)\} \;=\; f(n-1) - f(n+1) \;+$ $+\left([f(n+1)] - [f(n-1)]\right) = f(n-1) - f(n+1) + I_{\Omega}(n)$, де $\Omega = (n \in N \mid [f(n+1)] -$ $- [f(n-1)] \neq 0)$. Тоді

$$\frac{a_{n-1}-1/2}{n-1} - \frac{a_{n+1}-1/2}{n+1} \;=\; \frac{n(a_{n-1}-a_{n+1})}{n^2-1} + \frac{a_{n+1}+a_{n-1}-1}{n^2-1} \;=\; \frac{nf(n-1)}{(n+1)(n-1)} \;-$$

$$-\; \frac{nf(n+1)}{(n-1)(n+1)} + \frac{nI_{\Omega}(n)}{n^2-1} + \frac{a_{n-1}+a_{n+1}-1}{n^2-1}.$$

Для довільної додатної монотонно спадної послідовності $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ справедлива оцінка

$$\left|\sum_{n=N}^{K} d_n \cos nt\right| \;=\; \left|\sum_{n=N}^{K-1}\left(\sum_{p=N}^{n}\cos pt\right)(d_n - d_{n+1}) + \left(\sum_{p=N}^{K}\cos pt\right)d_K\right| \;\leq$$

$$\leq\; \sum_{n=N}^{K-1}\frac{2}{|\sin t|}(d_n - d_{n+1}) + \frac{2d_K}{|\sin t|} \;=\; \frac{2d_N}{|\sin t|}.$$

Ми скористаємося нею для $d_n = \dfrac{nf(n-1)}{(n+1)(n-1)}$ та $d_n = \dfrac{nf(n+1)}{(n-1)(n+1)}$, що є монотонно спадними за властивістю c) функції f:

$$\left|\sum_{n=N}^{K}\frac{nf(n-1)}{n^2-1}\cos nt\right| \le \frac{2Nf(N-1)}{|\sin t|(N^2-1)}, \quad \left|\sum_{n=N}^{K}\frac{nf(n+1)}{n^2-1}\cos nt\right| \le \frac{2Nf(N+1)}{|\sin t|(N^2-1)}.$$

Також врахуємо, що

$$\left|\sum_{n=N}^{K}\frac{a_{n-1}+a_{n+1}-1}{n^2-1}\cos nt\right| \le \sum_{n=N}^{K}\frac{2}{n^2-1}.$$

Множина Ω складається із пар натуральних чисел, що відрізняються на 1. Занумеруємо пари числами натурального ряду так, що $\Omega = (d(m), d(m)+1 \mid m \in \in N)$, де $d(m) < f^{-1}(m) \le d(m)+1$. Функція f монотонно зростає, а послідовність $\dfrac{n}{n^2-1}$ монотонно спадає. Тому

$$\frac{d(m)}{d(m)^2-1}+\frac{d(m)+1}{(d(m)+1)^2-1} \le \frac{2d(m)}{d(m)^2-1} \le \frac{2(f^{-1}(m)-1)}{(f^{-1}(m)-1)^2-1} \le$$

$$\le \frac{2f^{-1}(m)}{f^{-1}(m)(f^{-1}(m)-2)} = \frac{2}{f^{-1}(m)-2}.$$

Отже,

$$\left|\sum_{n=N}^{K}\frac{nI_\Omega(n)}{n^2-1}\cos nt\right| \le \sum_{n=[f(N)]}^{[f(K)]}\frac{2}{f^{-1}(n)-2}.$$

Для $\left|S_N^K(t)\right|$ одержуємо оцінку

$$\left|S_N^K(t)\right| \le \frac{1}{2|\sin t|}\left(\frac{1}{2(K+1)}+\frac{1}{2K}+\frac{1}{2(N-1)}+\frac{1}{2(N-2)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=[f(N)]}^{[f(K)]}\frac{2}{f^{-1}(n)-2}+\sum_{n=N}^{K}\frac{2}{n^2-1}\right)+\frac{1}{\sin^2 t}\frac{N}{N^2-1}(f(N-1)+f(N+1)).$$

Звідси видно, що ряд збігається рівномірно на відрізку $[\alpha;\beta]$. Твердження доведено.

Оскільки на $[\alpha;\beta]$ сума ряду (1) є рівномірною границею неперервних функцій, то $S \in C([\alpha;\beta])$. $S(\pi k) = 0$. Тому S — неперервна функція, і (1) є рядом Фур'є.

4. Умова Гельдера для $S(t)$. Будемо розглядати ряд (1) з коефіцієнтами $a_n = \{f(n)\}$, де $f(s) = s^\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$.

Позначимо для $g : [\alpha;\beta] \to R$ $\|g\|_{[\alpha;\beta]} \equiv \|g\| = \sup\limits_{t\in[\alpha;\beta]} |g(t)|$. Оцінки часткових сум, одержані при доведенні твердження 2, дозволяють оцінити швидкість збіжності ряду (1) у рівномірній метриці: якщо $\inf\limits_{t\in[\alpha;\beta]} |\sin t| > 0$, то для такої послідовності коефіцієнтів $\|S_N^\infty\| = O(N^{\gamma-1})$ при $N \to \infty$.

Твердження 3. *Якщо* $\inf\limits_{t\in[\alpha;\beta]} |\sin t| > 0$, *то* $S \in \mathrm{Lip}^{1-\gamma}([\alpha;\beta])$.

Доведення. Для натуральних m позначимо

$$g_m(t) = S_{2^m}(t) - S_{2^{m-1}}(t) = \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{a_n-1/2}{n}\sin nt.$$

Оскільки $\|S-S_n\| = O(N^{\gamma-1})$ при $N\to\infty$, то існує таке число D, що при всіх натуральних N $\|S-S_N\| \le D/N^{\gamma-1}$. Будемо також позначати $\theta = 1-\gamma$. Тоді

$$\|g_m\| = \left\|S_{2^m} - S_{2^{m-1}}\right\| \le \left\|S - S_{2^m}\right\| + \left\|S - S_{2^{m-1}}\right\| \le \frac{D}{2^{m\theta}} + \frac{D}{2^{(m-1)\theta}} =: \frac{\tilde{D}}{2^{m\theta}}.$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} g_m(t)$ збігається на $[\alpha;\beta]$ рівномірно до $\tilde{S}(t) = S(t) - S_1(t)$.

Лема 2. *Існує таке число* H, *що* $\|g_m'\| \le H\, 2^{m\gamma}$ *при всіх натуральних* m.

Доведення. Перетворюючи вираз для похідної функції g_m, маємо

$$g_m'(t) = \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} (a_n - 1/2)\cos nt = \frac{1}{2\sin t}\left(\sum_{n=2^{m-1}+2}^{2^m-1} (a_{n-1} - a_{n+1})\sin nt + \right.$$

$$+ \left(a_{2^m} - 1/2\right)\sin\left(2^m+1\right) + \left(a_{2^m-1} - 1/2\right)\sin 2^m t +$$

$$\left. + \left(a_{2^{m-1}+1} - 1/2\right)\sin 2^{m-1} t + \left(a_{2^{m-1}+2} - 1/2\right)\sin\left(2^{m-1}+1\right)t \right).$$

Позначимо $\operatorname{Sin}([\alpha,\beta]) = \inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |\sin t|$. Тоді

$$\|g_m'\| \le \frac{1}{2\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])}\left(\sum_{n=2^{m-1}+2}^{2^m-1} |a_{n-1} - a_{n+1}| + 4\cdot\frac{1}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])}\left(\sum_{n=2^{m-1}+2}^{2^m-1} |f(n-1) - f(n+1)| + \sum_{n=2^{m-1}+2}^{2^m-1} I_\Omega(n) + 2\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])}\left(f(2^m) - f(2^{m-1}+1) + 2\left(\left[f(2^m-1)\right] - \left[f(2^{m-1}+2)\right]\right) + 1\right) \le$$

$$\le \frac{3}{2\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])}\left(f(2^m) - f(2^{m-1}) + 1\right) = \frac{3}{2\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])} 2^{m\gamma}\left(1 - 2^{-\gamma} + 2^{-m\gamma}\right).$$

Покладемо $H = \dfrac{3}{\operatorname{Sin}([\alpha,\beta])}\left(1 - 2^{-(\gamma+1)}\right)$. Лему доведено.

Далі ми фактично повторимо наведене у роботі [2] доведення теореми Бернштейна. Для кожного $\delta \in (0;1)$ визначимо таке натуральне p, що $2^{p-1} \le 1/\delta < 2^p$. Якщо $t \in [\alpha;\beta]$ і $t+\delta \in [\alpha;\beta]$ або $t-\delta \in [\alpha;\beta]$, то

$$\left|\tilde{S}(t\pm\delta) - \tilde{S}(t)\right| \le \delta\sum_{m=1}^{p-1} \|g_m'\| + 2\sum_{m=p}^{\infty} \|g_m\| \le \delta\cdot H\sum_{m=1}^{p-1} 2^{m\gamma} + 2\tilde{D}\sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{2^{m\theta}} \le$$

$$\le \delta H\frac{1-2^{(p-1)\gamma}}{1-2^\gamma} + 2\tilde{D}\frac{2^{-p\theta}}{1-2^{-\theta}} \le \delta H\frac{2^{(p-1)\gamma}}{2^\gamma - 1} + 2\tilde{D}\frac{\delta^\theta}{1-2^{-\theta}} \le H\frac{\delta\delta^{-\gamma}}{2^\gamma-1} +$$

$$+ 2\tilde{D}\frac{\delta^\theta}{1-2^{-\theta}} = \delta^\theta\left(\frac{H}{2^\gamma-1} + \frac{2\tilde{D}}{1-2^{-\theta}}\right).$$

Отже, $\tilde{S} \in \operatorname{Lip}^\theta([\alpha;\beta])$. $S_1 \in C^{(1)}([\alpha;\beta])$. Тому $S = \tilde{S} + S_1 \in \operatorname{Lip}^\theta([\alpha;\beta])$.

Твердження доведено.

Зауваження 2. Для $a_n = \{\ln^r n\}$, $r > 1$, можна аналогічно одержати, що сума ряду $S \in \operatorname{Lip}^\theta([\alpha;\beta])$ для довільного $\theta < 1$.

За постановку задачі дякую А. А. Дороговцеву.

1. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

Одержано 22.09.98