УДК 519.248

Д. Г. Кореневский

Алгебраические коэффициентные условия абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последействием

В настоящей статье получены алгебраические условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем стохастических линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянным запаздыванием аргумента, не зависящие от величины запаздывания τ. Условия выражены в терминах некоторых матричных неравенств для матриц входящих в систему уравнений.

Использован метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова—Красовского, матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы. Рассмотрен случай скалярного винеровского процесса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим основную начальную задачу для векторно-матричных стохастических дифференциальных уравнений Ито с последействием следующего вида

$$\begin{gathered} dx^{\varepsilon}(t) = [Ax^{\varepsilon}(t) + A_1 x^{\varepsilon}(t-\tau)]\,dt + [B(\varepsilon)\,x^{\varepsilon}(t) + B_1(\varepsilon)\,x^{\varepsilon}(t-\tau)]\,dw(t), \\ x^{\varepsilon}(t_0-\theta) = \mathrm{const} = x_0 \neq 0, \quad t_0 - \tau \leqslant \theta \leqslant 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где A, A_1, B, B_1— постоянные матрицы; $\tau = \mathrm{const} > 0$ — запаздывание аргумента t; ε — параметр; $B(0) = B_1(0) = 0$; $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс.

Введем, отправляясь от определения абсолютной устойчивости (асимптотической устойчивости при любом $\tau = \mathrm{const} > 0$) решений детерминированных систем с запаздыванием, данного Л. Э. Эльсгольцем [1] (см. также [2], гл. 3, § 10), следующее аналогичное определение для стохастических систем с последействием (запаздыванием).

Определение 1. *Тривиальное решение* $(x^{(\varepsilon)} = 0)$ *системы с последействием* (1) *называется абсолютно устойчивым с вероятностью* 1, *если оно асимптотически устойчиво с вероятностью* 1 *при любом* $0 < \tau = \mathrm{const} < \infty$, *т. е.*

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} \| x^{\varepsilon}(t) \| = 0 \mid x_0 \neq 0\} = 1, \quad 0 < \tau = \mathrm{const} < \infty.$$

Наряду с системой уравнений (1), называемой в дальнейшем «возмущенной», рассмотрим детерминированную (невозмущенную, $\varepsilon = 0$) систему

$$dx(t)/dt = Ax(t) + A_1 x(t-\tau), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

В предположении, что невозмущенная система (2) абсолютно устойчива, ставится задача определения алгебраических коэффициентных условий абсолютной устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения возмущенной системы (1). Насколько известно автору, в литературе таких условий нет.

При решении этой задачи используется метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова — Красовского (СФЛ — К), матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы, т. е. с матрицей $A + A_1$. Заметим, что одной из первых работ по устойчивости с вероятностью 1 и по вероятности решений стохастических уравнений Ито с последействием, в которой используются СФЛ — К, можно назвать работу [3]. В дальнейшем СФЛ — К в задачах изучения вероятностной устойчивости решений стохастических уравнений Ито с последействием использовались во многих работах (см. обзор в [4]).

2. Результаты, полученные ранее для детерминированных уравнений, и некоторые используемые далее факты. 1′. По-видимому, одной из первых работ, где установлены алгебраические коэффициентные условия устойчивости при любом постоянном запаздывании аргумента, следует считать работу Б. С. Разумихина [5], в которой получены для уравнения первого порядка $dx(t)/dt + ax(t) + bx(t-\tau) = 0$ оценки a, b, обеспечивающие асимптотическую устойчивость независимо от τ. В дальнейшем поиск таких условий для различных классов детерминированных уравнений более высокого порядка был основной задачей многих работ (см. [4, 6]).

В наиболее общем виде алгебраические коэффициентные условия абсолютной устойчивости тривиального решения детерминированных систем уравнений с запаздывающим аргументом, выраженные в форме некоторых матричных неравенств для матриц A и A_1, представлены в монографии Дж. Хейла [7, § 5.2, с. 134—135, с. 160—161].

Отметим, что сформулированная в [6] теорема 1 практически трудно проверяемая. Приведенное в ней для системы

$$dx(t)/dt = A_0 x(t) + \sum_{n=1}^{m} A_n x(t - \Delta_n)$$

условие на спектр системы при $\Delta_n = 0$, состоящее в том, что

$$\bigcup_{z} \sigma\left(A_0 + \sum_{k=1}^{m} z_k A_k\right) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}, \quad |z_k| = 1,$$

классифицируется как необходимое и достаточное для абсолютной устойчивости. В действительности оно является лишь необходимым; при $z_k = 1$ это следует из ранее известных результатов (см., например, [7, с. 160]).

2′. Из предположения, что решение $x = 0$ системы (2) абсолютно устойчиво, следуют два факта, используемые в дальнейшем.

I. Для системы (2) существует положительно определенный квадратичный функционал $V_0(x(t+\theta))$ вида

$$\underset{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0}{V_0(x(t+\theta))} = x^{\mathrm{T}}(t) H_0 x(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(\theta) H_0 x(\theta)\, d\theta, \tag{3}$$

постоянная матрица $H_0 > 0$ которого является решением матричного уравнения Ляпунова

$$(A + A_1)^{\mathrm{T}} H_0 + H_0 (A + A_1) = -Q, \tag{4}$$

где Q — любая заданная симметричная положительно определенная матрица, в частном случае $Q = E$ (E — единичная матрица); τ — символ транспонирования.

Развивая упомянутые условия [7], можно показать с помощью функционала (3), что достаточными условиями абсолютной устойчивости (близкими к необходимым и достаточным и, по-видимому, неулучшаемыми) являются гурвицевость матрицы $A + A_1$ и отрицательная определенность следующей матрицы

$$\begin{bmatrix} A^{\tau}H_0 + H_0A + H_0 & H_0A_1 \\ A_1^{\tau}H_0 & -H_0 \end{bmatrix} \quad (<0). \tag{5}$$

Очевидно, что если стремиться для детерминированных систем (2) получить условия устойчивости, которые не зависят от τ, то нулевое решение уравнения, соответствующего уравнению (2) при $\tau \equiv 0$, должно быть асимптотически устойчивым. Т. е. необходимым условием абсолютной устойчивости нулевого решения системы (2) является гурвицевость матрицы $A + A_1$; это условие следует из непрерывной зависимости корней λ характеристического квазиполинома $\det(A + A_1 \exp(-\tau\lambda) - E\lambda)$ от запаздывания τ.

Примечание. Нетрудно обнаружить, знакомясь с литературой, не указанной в списке [4], что во всех исследованиях по устойчивости детерминированных линейных систем с постоянным запаздыванием с помощью функционалов Ляпунова — Красовского вида (3) получаемые условия устойчивости не зависели явно от величины τ, т. е. фактически эти условия были условиями абсолютной устойчивости. Поэтому библиографию по абсолютной устойчивости можно было бы значительно расширить. Вопрос о том, в какой форме взять функционал, чтобы в условия устойчивости явно входил параметр τ, обсуждается в [7, с. 137].

II. Алгебраические коэффициентные (близкие к необходимым и достаточным) условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица стохастических систем вида (1) без последействия ($\tau \equiv 0$)

$$dx(t) = (A + A_1)\,x(t)\,dt + (B + B_1)\,x(t)\,dw(t) \tag{6}$$

и с устойчивой матрицей $A + A_1$ сводятся к следующему матричному соотношению (см. работу [8]):

$$(A + A_1)^{\tau}H_0 + H_0(A + A_1) + (B + B_1)^{\tau}H_0(B + B_1) < 0. \tag{7}$$

3. Основной результат. Итак, установим условия, налагаемые на матрицы A, A_1, H_0, B, B_1, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость с вероятностью 1 нулевого решения системы (1) при любом $\tau = \mathrm{const} < \infty$.

В силу общих теорем об асимптотической устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений Ито с последействием их решения асимптотически устойчивы с вероятностью 1, если существует положительно определенный функционал Ляпунова — Красовского, математическое ожидание полной производной по времени которого вдоль решений отрицательно (см., например, [3]).

Учитывая, что согласно предположению исходная система (1) линейна и стационарна, а невозмущенная система (2) абсолютно устойчива по Ляпунову, можно выбрать для системы (1) в качестве функционала Ляпунова — Красовского положительно определенный квадратичный функционал $\underset{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}{V}(x^{\varepsilon}(t+\theta))$ фазовых переменных x^{ε},

$$\underset{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}{V}(x^{\varepsilon}(t+\theta)) = (x^{\varepsilon}(t))^{\tau}H_0x^{\varepsilon}(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t}(x^{\varepsilon}(\theta))^{\tau}H_0x^{\varepsilon}(\theta)\,d\theta, \tag{8}$$

постоянная матрица $H_0 > 0$ которого определена из уравнения Ляпунова

(4), соответствующего невозмущенной системе (2) с устойчивой матрицей $A + A_1$.

Стохастический дифференциал dV функционала (8), вычисленный вдоль решений системы (1), имеет вид

$$dV(x^\varepsilon)|_{(1)} = d(x^\varepsilon(t))^\mathrm{T} H_0 x^\varepsilon(t) + (x^\varepsilon(t))^\mathrm{T} H_0\, dx^\varepsilon(t) + [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]^\mathrm{T} H_0 [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]\,dt + (x^\varepsilon(t))^\mathrm{T} H_0 x^\varepsilon(t)\,dt - (x^\varepsilon(t-\tau))^\mathrm{T} H_0 x^\varepsilon(t-\tau)\,dt = \{[Ax^\varepsilon(t) + A_1 x^\varepsilon(t-\tau)]^\mathrm{T} dt + [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]^\mathrm{T} dw(t)\} H_0 x^\varepsilon(t) + (x^\varepsilon(t))^\mathrm{T} H_0 \{[Ax^\varepsilon(t) + A_1 x^\varepsilon(t-\tau)]\,dt + [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]\,dw(t)\} + [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]^\mathrm{T} \times H_0[B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t-\tau)]\,dt + (x^\varepsilon(t))^\mathrm{T} H_0 x^\varepsilon(t)\,dt - (x^\varepsilon(t-\tau))^\mathrm{T} H_0 x^\varepsilon(t-\tau)\,dt. \tag{9}$$

Исходя из (9), находим математическое ожидание полной производной $\mathbf{M}\left\{\dfrac{dV}{dt}\Big|_{(1)}\right\}$:

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dV(x^\varepsilon)}{dt}\Big|_{\substack{(1)\\ x^\varepsilon \equiv x}}\right\} = [Ax(t) + A_1 x(t-\tau)]^\mathrm{T} H_0 x(t) + (x(t))^\mathrm{T} H_0 [Ax(t) + A_1 x(t-\tau)] + x(t))^\mathrm{T} H_0 x(t) - (x(t-\tau))^\mathrm{T} H_0 x(t-\tau) + [B(\varepsilon)x(t) + B_1(\varepsilon)x(t-\tau)]^\mathrm{T} H_0 [B(\varepsilon)x(t) + B_1(\varepsilon)x(t-\tau)]. \tag{10}$$

Правую часть соотношения (10) можно рассматривать как квадратичную форму от $x(t)$, $x(t-\tau)$. Тогда (10) перепишется в следующем матричном виде:

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dV(x^\varepsilon)}{dt}\Big|_{\substack{(1)\\ x^\varepsilon \equiv x}}\right\} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau)\end{bmatrix}^\mathrm{T} \times \begin{bmatrix} A^\mathrm{T} H_0 + H_0 A + B^\mathrm{T} H_0 B + H_0 & H_0 A_1 + B^\mathrm{T} H_0 B_1 \\ A_1^\mathrm{T} H_0 + B_1^\mathrm{T} H_0 B & B_1^\mathrm{T} H_0 B_1 - H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Математическое ожидание (11) отрицательно лишь в случае, когда матрица, входящая в правую часть, отрицательно определенная, т. е. когда

$$\begin{bmatrix} A^\mathrm{T} H_0 + H_0 A + B^\mathrm{T} H_0 B + H_0 & H_0 A_1 + B^\mathrm{T} H_0 B_1 \\ A_1^\mathrm{T} H_0 + B_1^\mathrm{T} H_0 B & B_1^\mathrm{T} H_0 B_1 - H_0 \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *Тривиальное решение* ($x^\varepsilon = 0$) *системы стохастических уравнений Ито с запаздыванием* (1) *абсолютно устойчивое с вероятностью* 1, *если выполнены следующие условия*: 1) *матрица* $A + A_1$ *гурвицева*; 2) *имеет место матричное неравенство* (12).

Нетрудно заметить, что если случайных возмущений нет, т. е. $B = B_1 = 0$, то из условия (12) следует условие (5) для детерминированных систем.

Полученные результаты легко обобщаются на системы стохастических уравнений Ито с векторным винеровским процессом.

1. *Эльсгольц Л. Э.* Сильная абсолютная устойчивость.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Изд-во ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1967, т. 4, с. 273.
2. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.

3. *Kushner H. J.* On the stability of processes defined by stochastic difference — differential equations.— J. Different. Equat., 1968, 4, N 3, p. 424—443.
4. *Кореневский Д. Г.* К алгебраическим условиям абсолютной устойчивости с вероятностью единица решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последействием.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 78—89.
5. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием.— Прикл. математика и механика, 1956, 20, № 4, с. 500—512.
6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 12, с. 17—19.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
8. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный алгебраический критерий асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений линейных систем стохастических уравнений Ито.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 67—77.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.09.84,
после доработки — 23.04.85