УДК 517.92

И. Н. Щитов

Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными

Метод усреднения, разработанный для систем с медленными и быстрыми переменными в [1, 2], в первом приближении сводит исследование системы

$$\dot{x} = \varepsilon X (t, z, x, \varepsilon), \qquad \dot{z} = Z (t, z, x, \varepsilon) \tag{1}$$

к исследованию системы

$$\dot{y} = \varepsilon Y (y), \tag{2}$$

где $Y(x)$ — среднее от функции $X_0(t, z, x) = X(t, z, x, 0)$ вдоль траекторий вырожденной системы

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{z} = Z_0(t, z, x) = Z(t, z, x, 0). \tag{3}$$

Более общий подход может состоять в замене системы (1) некоторой более простой системой того же вида

$$\dot{y} = \varepsilon Y(t, p, y), \qquad \dot{p} = P(t, p, y). \tag{4}$$

Оказывается, что для близости медленных составляющих $x(t)$ и $y(t)$ решений $(x(t), z(t))$ и $(y(t), p(t))$ систем (1) и (4) на некотором асимптотически большом интервале $[t_0, T(\varepsilon)]$ достаточно выбирать систему (4) таким образом, чтобы асимптотическое поведение при $t \to \infty$ интегралов от функций $X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, y)$, вычисленных вдоль траекторий вырожденных систем (3) и

$$\dot{y} = 0, \qquad \dot{p} = P(t, p, y) \tag{5}$$

соответственно, было одинаковым (в смысле, который уточняется ниже). Это обобщает результаты заметки [3], относящиеся к системам в стандартной форме.

1. Пусть $\dim x = \dim y = n$, $\dim z = m$, $\dim p = k$. Будем считать, что $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ правые части систем (1) и (4) определены и непрерывны в областях $G_1 \subset [0, \infty) \times R^m \times R^n$, $G_2 \subset [0, \infty) \times R^k \times R^n$ соответственно, проекции которых на R^n совпадают и равны Ω.

Предположим, что через каждую точку $(t_0, z_0, x_0) \in G_1$ проходит единственная интегральная кривая вырожденной системы (3), которая определена для всех $t \geqslant t_0$ и лежит в G_1, и что аналогичным свойством в области G_2 обладают интегральные кривые системы (5).

Введем для общих решений систем (3) и (5) в областях G_1 и G_2 обозначения: $x = x_0$, $z = \varphi(t, t_0, z_0, x_0)$; $y = y_0$, $p = \psi(t, t_0, p_0, y_0)$ (здесь $\varphi(t_0, t_0, z_0, x_0) = z_0$, $\psi(t_0, t_0, p_0, y_0) = p_0$).

Определение 1. *Пусть $r(t)$ положительная неубывающая функция. Функции $X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, x)$ называются интегрально $r(t)$-эквивалентными вдоль траекторий вырожденных систем* (3) *и* (5), *если для любого $\delta > 0$ найдется $T_1 > 0$ такое, что при $T \geqslant T_1$*
$$\left\| \int_t^T [X_0(\tau, \varphi(\tau, t, z, x), x) - Y(\tau, \psi(\tau, t, p, x), x)]\, d\tau \right\| \leqslant \delta r(T)$$
для $(t, z, x) \in G_1$, $(t, p, x) \in G_2$, $t \leqslant T$, т. е.
$$\left\| \int_t^T [X_0(\tau, \varphi(\tau, t, z, x), x) - Y(\tau, \psi(\tau, t, p, x), x)]\, d\tau \right\| = o(r(T))$$
при $T \to \infty$ равномерно по $(t, z, x) \in G_1$, $(t, p, x) \in G_2$ таким, что $t \leqslant T$.

Системы (1) и (4), удовлетворяющие условиям определения 1, будем называть $r(t)$-сравнимыми.

Формулируемая ниже теорема позволяет сводить на некотором конечном асимптотически большом интервале вычисление $x(t)$ из (1) к вычислению $y(t)$ из (4). Содержащиеся в ее условиях вспомогательные функции $L(t)$, $N(t)$ и т. д. считаем непрерывными и положительными.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ $X(t, z, x, \varepsilon)$, $Z(t, z, x, \varepsilon) \in C(G_1)$, $Y(t, p, x)$, $P(t, p, x) \in C(G_2)$, *$X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, x)$ непрерывно дифференцируемы по z и p;*

2) *$X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, x)$ удовлетворяют в G_1 и G_2 соответственно условию Липшица по x с функцией $L_1(t)$; $Z_0(t, z, x)$ и $P(t, p, x)$ удовлетворяют в G_1 и G_2 условию Липшица по x с функцией $L_2(t)$;*

3) $\|X_0(t, z, x)\| \leqslant N_1(t)$, $\|Y(t, p, x)\| \leqslant N_1(t)$, $\|X(t, z, x, \varepsilon) - X_0(t, z, x)\| \leqslant \gamma(\varepsilon) N_1(t)$, $\|Z(t, z, x, \varepsilon) - Z_0(t, z, x)\| \leqslant \gamma(\varepsilon) N_2(t)$, *где $\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;*

4) *$X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, x)$ интегрально $r(t)$-эквивалентны вдоль траекторий вырожденных систем* (3) *и* (5);

5) *функции* $\varphi(\tau, t, z, x)$ *и* $\psi(\tau, t, p, x)$ *непрерывно дифференцируемы по* τ, t, z *и* τ, t, p *соответственно;*

6) $\left\| \int\limits_t^T \frac{\partial X_0}{\partial z}(\tau, \varphi(\tau, t, z, x), x) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\tau, t, z, x)\, d\tau \right\| \leqslant K(T)$, $\left\| \int\limits_t^T \frac{\partial Y}{\partial p}(\tau, \psi \times (\tau, t, p, x), x) \frac{\partial \psi}{\partial p}(\tau, t, p, x)\, d\tau \right\| \leqslant K(T)$ *для* $(t, z, x) \in G_1$, $(t, p, x) \in G_2$ *таких, что* $t \leqslant T$.

Тогда, если $(x(t), z(t))$ *и* $(y(t), p(t))$ — *решения систем* (1) *и* (4), *определенные для* $t \in [t_0, T_0(\varepsilon)]$, *лежащие вместе с некоторыми* ρ-*окрестностями в* G_1 и G_2 *соответственно и удовлетворяющие условию* $x(t_0) = y(t_0)$, *то* $\forall \eta > 0$ *и* $\forall M > 0$ *найдется* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливо неравенство*

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant \eta, \qquad \forall t \in [t_0, T(\varepsilon)], \tag{6}$$

где

$$T(\varepsilon) = \sup\left\{ T : T \leqslant T_0(\varepsilon),\ r(T) + \int\limits_{t_0}^{T} [L_1(t) + N_1(t) + K(T)(L_2(t) + N_2(t))] \times dt \leqslant \frac{M}{\varepsilon} \right\}.$$

Доказательство. Отметим необходимые для дальнейшего свойства функций $\varphi(\tau, t, z, x)$ и $\psi(\tau, t, p, x)$:

а) $\varphi(t, t, z, x) = z$, $\psi(t, t, p, x) = p$;

б) $\varphi(\tau, t, \varphi(t, t_0, z, x), x) = \varphi(\tau, t_0, z, x)$, $\psi(\tau, t, \psi(t, t_0, p, x), x) = \psi(\tau, t_0, p, x)$;

в) $\varphi(\tau, t, z, x)$ как функция аргументов t, z и $\psi(\tau, t, p, x)$ как функция аргументов t, p — первые интегралы систем (3) и (5) соответственно.

Действительно, например, если $x = x_0$, $z = \varphi(t, t_0, z_0, x_0)$ — решение системы (3), то по свойству б) $\varphi(\tau, t, \varphi(t, t_0, z_0, x_0), x_0) = \varphi(\tau, t_0, z_0, x_0) = \mathrm{const}$.

Пусть $z(t)$ и $p(t)$ — быстрые составляющие решений систем (1) и (4). Введем функцию

$$u(t, x, \varepsilon) = -\int\limits_t^{T(\varepsilon)} X_0(\tau, \varphi(\tau, t, z(t), x), x)\, d\tau + \int\limits_t^{T(\varepsilon)} Y(\tau, \psi(\tau, t, p(t), x), x)\, d\tau, \tag{7}$$

определенную для $(t, x) \in [t_0, T(\varepsilon)] \times \Omega$ таких, что $(t, z(t), x) \in G_1$ и $(t, p(t), x) \in G_2$; обозначим это множество через D.

По условию, решение $(x(t), z(t))$ содержится в G_1 вместе с ρ-окрестностью, поэтому первое слагаемое в правой части (7) определено в ρ-окрестности кривой $x(t)$; аналогично второе слагаемое определено в ρ-окрестности кривой $y(t)$, и поскольку $x(t_0) = y(t_0)$, то для t из некоторого отрезка $[t_0, t_1]$ $\rho/2$-окрестность кривой $x(t)$ содержится в D. Пусть $[t_0, T_1(\varepsilon)]$ — максимальный отрезок, обладающий этим свойством, и $S_{\rho/2}$ — соответствующая $\rho/2$-окрестность кривой $x(t)$, лежащая в D.

Докажем, что неравенство (6) справедливо для $t \in [t_0, T_1(\varepsilon)]$.

Получим некоторые оценки, связанные с $u(t, x, \varepsilon)$. Так как $X_0(t, z, x)$ и $Y(t, p, x)$ интегрально $r(t)$-эквивалентны, существует функция $\alpha(t)$, удовлетворяющая условию $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и такая, что $\forall (t, z, x) \in G_1$, $\forall (t, p, x) \in G_2$, $\forall t \leqslant T$ $\left\| \int\limits_t^T [X_0(\tau, \varphi(\tau, t, z, x), x) - Y(\tau, \psi(\tau, t, p, x), x)]\, d\tau \right\| \leqslant \alpha(T)\, r(T)$.

Если положить $\beta(\varepsilon) = \varepsilon \alpha(T(\varepsilon))\, r(T(\varepsilon))$, то $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для $(t, x) \in S_{\rho/2}$ имеем:

$$\| \varepsilon u(t, x, \varepsilon) \| = \left\| \varepsilon \int\limits_t^{T(\varepsilon)} [X_0(\tau, \varphi(\tau, t, z(t), x), x) - Y(\tau, \psi(\tau, t, p(t), x), x)]\, d\tau \right\| \leqslant \beta(\varepsilon);$$

кроме того, для $\partial u/\partial t$ справедливо в $S_{\rho/2}$ следующее неравенство, при выводе которого используются свойства а) — в):

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, \varepsilon) - X_0(t, z(t), x) + Y(t, p(t), x) \right\| \leqslant \left\| \int\limits_t^{T(\varepsilon)} \left[\frac{\partial X_0}{\partial z}(\tau, \varphi(\tau, t, z(t), x), x) \times \right.\right.$$

$$\times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau, t, z(t), x) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\tau, t, z(t), x) Z(t, z(t), x(t), \varepsilon) \right) -$$

$$- \frac{\partial Y}{\partial p}(\tau, \psi(\tau, t, p(t), x), x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\tau, t, p(t), x) + \frac{\partial \psi}{c p}(\tau, t, p(t), x) \times \right.$$

$$\left.\left.\left. \times P(t, p(t), y(t)) \right) \right] d\tau \right\| \leqslant \left\| \int\limits_t^{T(\varepsilon)} \frac{\partial X_0}{\partial z}(\tau, \varphi(\tau, t, z(t), x), x) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\tau, t, z(t), x)\, d\tau\, [Z(t, z(t), x(t), \varepsilon) - Z_0(t, z(t), x)] \right\| +$$

$$+ \left\| \int\limits_t^{T(\varepsilon)} \frac{\partial Y}{\partial p}(\tau, \psi(\tau, t, p(t), x) \frac{\partial \psi}{\partial p}(\tau, t, p(t), x)\, d\tau\, [P(t, p(t), y(t)) - \right.$$

$$\left. - P(t, p(t), x)] \right\| \leqslant K(T(\varepsilon)) L_2(t) (2\| x(t) - x \| + \| x(t) - y(t) \|) +$$

$$+ K(T(\varepsilon)) \gamma(\varepsilon) N_2(t).$$

Введем сглаживающую функцию [4]

$$\Delta(x, \varepsilon) = \begin{cases} A(\varepsilon)(1 - \| x \|^2/\beta(\varepsilon))^2, & \| x \| \leqslant \beta^{1/2}(\varepsilon), \\ 0, & \| x \| > \beta^{1/2}(\varepsilon), \end{cases}$$

где $A(\varepsilon)$ выбрано из условия $\int\limits_{R^n} \Delta(x, \varepsilon)\, dx = 1$, и положим $I(\varepsilon) = \int\limits_{R^n} \| \partial \Delta/\partial x \|\, dx$. Легко проверить, что $I(\varepsilon) = C\beta^{-1/2}(\varepsilon)$, где C — некоторая независящая от ε постоянная.

Сглаживая $u(t, x, \varepsilon)$, получим функцию $\hat{u}(t, x, \varepsilon) = \int\limits_{S_{\rho/2}} \Delta(x - x', \varepsilon)$ $u(t, x', \varepsilon) dx'$, для которой справедливы оценки $\| \varepsilon\, \hat{u}(t, x, \varepsilon) \| \leqslant \beta(\varepsilon)$, $\left\| \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, \varepsilon) \right\| \leqslant C\beta^{1/2}(\varepsilon)$. Пусть настолько мало, что $\beta^{1/2}(\varepsilon) < \rho/4$; тогда для $t \in [t_0, T_1(\varepsilon)]$ в $\rho/4$-окрестности $S_{\rho/4}$ кривой $x(t)$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = \int\limits_{S_{\rho/2}} \Delta(x - x', \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x', \varepsilon)\, dx',$$

и поэтому

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) - X_0(t, z(t), x) + Y(t, p(t), x) \right\| \leqslant \left\| \int\limits_{S_{\rho/2}} \Delta(x - x', \varepsilon) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x', \varepsilon) - X_0(t, z(t), x') + Y(t, p(t), x') \right) dx' \right\| +$$

$$+ \left\| \int\limits_{S_{\rho/2}} \Delta(x - x', \varepsilon) (X_0(t, z(t), x) - X_0(t, z(t), x') - Y(t, p(t), x) + \right.$$

$$\left. + Y(t, p(t), x'))\, dx' \right\| \leqslant K(T(\varepsilon)) L_2(t) (2\| x(t) - x \| + \| x(t) - y(t) \|) +$$

$$+ 2(K(T(\varepsilon)) L_2(t) + L_1(t)) \beta^{1/2}(\varepsilon) + K(T(\varepsilon)) \gamma(\varepsilon) N_2(t).$$

Теперь можно оценить разность $x(t) - y(t)$. Используя выведенные выше неравенства для $\widehat{u}(t, x, \varepsilon)$, на отрезке $[t_0, T_1(\varepsilon)]$ получаем:

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \left\| \varepsilon \int_{t_0}^{t} [X(t, z(t), x(t), \varepsilon) - Y(t, p(t), y(t))]\, dt - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} \widehat{u}(t, x(t), \varepsilon)\, dt \right\| + \|\varepsilon \widehat{u}(t, x(t), \varepsilon)\| + \|\varepsilon \widehat{u}(t_0, x(t_0), \varepsilon)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} [Y(t, p(t), x(t)) - Y(t, p(t), y(t))]\, dt \right\| + \left\| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[X_0(t, z(t), x(t)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - Y(t, p(t), x(t)) - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t, x(t), \varepsilon) \right] dt \right\| + \left\| \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(t, x(t), \varepsilon) \times \right.$$

$$\left. \times X(t, z(t), x(t), \varepsilon)\, dt \right\| + \varepsilon\gamma(\varepsilon) \int_{t_0}^{t} N_1(t)\, dt + 2\beta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \int_{t_0}^{t} [L_1(t) +$$

$$+ K(T(\varepsilon)) L_2(t)] \|x(t) - y(t)\|\, dt + (2 + C) M \beta^{1/2}(\varepsilon) + 2\gamma(\varepsilon) M +$$

$$+ 2\beta(\varepsilon) \leqslant \beta_1(\varepsilon) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} [L_1(t) + K(T(\varepsilon)) L_2(t)] \|x(t) - y(t)\|\, dt,$$

где $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда в силу леммы Гронуолла — Беллмана

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \beta_1(\varepsilon) \exp \left[\varepsilon \int_{t_0}^{t} (L_1(t) + K(T(\varepsilon)) L_2(t))\, dt \right] \leqslant \beta_1(\varepsilon) \exp M \leqslant \eta,$$

если ε достаточно мало. Таким образом, неравенство (6) доказано для $t \in [t_0, T_1(\varepsilon)]$.

Остается показать, что $T_1(\varepsilon) = T(\varepsilon)$ для достаточно малых ε. Выберем $\eta \leqslant \rho/4$. Если $T_1(\varepsilon) < T(\varepsilon)$, то, поскольку $\|x(T_1(\varepsilon)) - y(T_1(\varepsilon))\| \leqslant \rho/4$, $3\rho/4$-окрестность точки $(T_1(\varepsilon), x(T_1(\varepsilon)))$ содержится в ρ-окрестности точки $(T_1(\varepsilon), y(T_1(\varepsilon)))$ и, значит, принадлежит D, что противоречит выбору $T_1(\varepsilon)$. Теорема доказана.

2. Одна из возможностей упрощения системы (1) связана с операцией частичного усреднения [5]. С помощью установленной теоремы можно получить обоснование для различных схем частичного усреднения. Например, можно использовать такое определение этой операции.

Пусть G — область в $[0, \infty) \times R^m \times R^n$ и через любую точку $(t_0, z_0, x_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая системы (3), определенная для $t \geqslant t_0$ и лежащая в G.

Определение 2. *Функция* $Y(t, z, x)$ *получена из функции* $X_0(t, z, x)$ *с помощью операции частичного усреднения вдоль траекторий вырожденной системы* (3), *если существует непрерывная функция* $\Phi(t, s, z, q, x)$ *такая, что в* G *выполнены условия:*

1) $X_0(t, z, x) = \Phi(t, t, z, z, x)$;

2) $Y(t, z, x) = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{T} \Phi(t, s, z, \varphi(s, t_0, z_0, x), x)\, ds$ *независимо от выбора* t_0 *и* z_0;

3) *если* $\|X_0(t, z, x)\| \leqslant N(t)$, $\|Y(t, z, x)\| \leqslant N(t)$ *для* $(t, z, x) \in G$, *то функции* $X_0(t, z, x)$ и $Y(t, z, x)$ *интегрально* $r(t)$-*эквивалентны вдоль траекторий системы* (3) *для* $r(t) = \int N(t)\, dt$.

Пусть $Y(t, z, x)$ получена из $X_0(t, z, x)$ с помощью операции частичного усреднения; тогда системе (1) можно сопоставить $r(t)$-сравнимую систему

$$\dot{y} = \varepsilon Y(t, p, y), \qquad \dot{p} = Z_0(t, p, y). \tag{8}$$

Переформулировав доказанную теорему для этого случая, можно получить теорему о частичном усреднении в системах вида (1).

Пусть $Y(x)$ — независящее от t_0 и z_0 равномерное среднее $X_0(t, z, x)$ вдоль траекторий вырожденной системы (3) в смысле [1], т. е.

$$Y(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_0(t, \varphi(t, t_0, z_0, x), x)\, dt$$

равномерно по $(t_0, z_0, x) \in G$; легко проверяется, что функции $X_0(t, z, x)$ и $Y(x)$ интегрально t-эквивалентны вдоль траекторий вырожденной системы (3), т. е. системы (1) и (2) t-сравнимы. Поэтому следствием полученной теоремы является теорема Волосова об усреднении в системах вида (1). По сравнению с формулировкой, приведенной в [2], некоторые условия этой теоремы можно ослабить; в частности, не нужно предполагать существование обладающей специальными свойствами гиперповерхности в области G, что связано со специальным выбором функции $u(t, x, \varepsilon)$ в доказательстве основной теоремы. Отметим, что условие 6) в этом случае — ослабленное условие 8 из [2].

Используя обычную терминологию, будем говорить, что медленные и быстрые движения разделяются, если система (1) $r(t)$-сравнима с системой вида

$$\dot{y} = \varepsilon Y(t, y). \tag{9}$$

Движения разделяются, например, если в системе (1) можно провести усреднение.

3. Применим изложенный выше подход к исследованию в почти интегрируемой системе с одной степенью свободы

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon g(z, \dot{z}) \tag{10}$$

режимов, отличных от колебательных и вращательных (изученных в [2]). Пусть $F(z) = \int f(z)dz$ и для $z \geqslant z_1$ $F(z) \leqslant c_0$; вводя новую переменную $c = \dot{z}^2 + F(z)$, перейдем от (10) к эквивалентной системе (ограничиваясь случаем $\dot{z} > 0$)

$$\dot{c} = 2\varepsilon g(z, \sqrt{c - F(z)}) \sqrt{c - F(z)}, \qquad \dot{z} = \sqrt{c - F(z)}. \tag{11}$$

Решения второго уравнения вырожденной системы ($\varepsilon = 0$) для $c \geqslant c_0$, $z_0 \geqslant z_1$ получаются обращением интеграла

$$t = \int_{z_0}^{z} (c - F(z))^{-1/2}\, dz \tag{12}$$

и удовлетворяют условию $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Как следует из предыдущего, на некотором отрезке $[0, T(\varepsilon)]$, определяемом в каждом конкретном случае формулами пункта 1, систему (11) можно заменить $r(t)$-сравнимой системой

$$\dot{c} = 2\varepsilon a(z, c), \qquad \dot{z} = \sqrt{c - F(z)}, \tag{13}$$

если $a(z, c)$ — такая функция, что равномерно по c, z_0 и $t_0 \leqslant T$ при $T \to \infty$

$$\int^{T} [g(z(t), \sqrt{c - F(z(t))}) \sqrt{c - F(z(t))} - a(z(t), c)]\, dt = o(r(T)). \tag{14}$$

Условию (14) можно придать также другой вид, выбрав в качестве переменной интегрирования z:

$$\int_{z_0}^{z} [g(z, \sqrt{c - F(z)}) - a(z, c)(c - F(z))^{-1/2}]\, dz = o(r(t(z))) = o(R(z)), \tag{15}$$

где $t(z)$ задается формулой (12). Можно указать два интегрируемых случая.

1. Если $g(z, \sqrt{c-F(z)}) \sim \varphi(z)$ при $z \to \infty$, то можно положить $a(z, c) = \varphi(z)\sqrt{c-F(z)}$, $R(z) = \int |\varphi(z)|\,dz$.

2. Если $r(t) = t$ и $a(z, c)$ не зависит от z, то $a(c)$ — среднее вдоль траекторий вырожденной системы и, как легко показать, из (15) следует

$$a(c) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{t(z)} \int_{z_0}^{z} g(z, \sqrt{c-F(z)})\,dz. \tag{16}$$

В частности, среднее существует, если существует предел $g_0(c) = \lim_{z\to\infty} g(z, \sqrt{c-F(z)}) \sqrt{c-F(z)}$, тогда $a(c) = g_0(c)$.

Среднее существует также, если $f(z)$ и $g(z, \dot z)$ периодичны по z с периодом 2π и среднее $f(z)$ по периоду равно нулю. Это случай вращательных режимов, подробно изученный в [2]; для него формула (16) принимает тот же вид, что и в [2]:

$$a(c) = T^{-1}(c) \int_0^{2\pi} g(z, \sqrt{c-F(z)})\,dz, \quad T(c) = \int_0^{2\pi} (c-F(z))^{-1/2}\,dz.$$

Возможен также более общий подход к исследованию системы (11), при котором заменяется и уравнение для быстрой переменной. Например, если $\sqrt{c-F(z)} \sim \Phi(z, c)$ при $z \to \infty$, то от системы (11) можно перейти к системе $(R(z) = \sup\limits_c \int |\Phi(c, z)|\,dz)$ $\dot c = 2\varepsilon g(z; \Phi(C, z))$, $\dot z = \Phi(c, z)$.

Пример 1. Рассмотрим плоское движение материальной точки в центральном поле сил, близком к ньютонову [6]:

$$\ddot z = E/z^3 - \mu/z + \varepsilon g(z, \dot z). \tag{17}$$

Замена $c = \dot z^2 + F(z)$, где $F(z) = E/2z^2 - \mu/z$, приводит (17) к системе вида (11), при этом значениям $c > 0$ отвечают решения $z(t)$ вырожденной задачи, удовлетворяющие условию $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (гиперболические траектории). Так как $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, то систему (11) можно в этом случае заменить значительно более простой системой (с быстро вращающейся фазой): $\dot c = 2\varepsilon g(z, \sqrt{c})\sqrt{c}$, $\dot z = \sqrt{c}$. частности, если $g(z, \dot z)$ периодична по z, то в получившейся системе можно еще провести усреднение.

Пример 2. Рассмотрим уравнение колебаний маятника Фроуда [2]:

$$\ddot\psi + \varepsilon\alpha\dot\psi + \varepsilon\gamma\dot\psi|\dot\psi| + k^2\sin\psi = M. \tag{18}$$

Так как $F(\psi) = -k^2\cos\psi - M\psi$, то $\forall c$, если $\dot\psi_0$ достаточно велико, решение вырожденной задачи $\psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (вращательный режим). Очевидно, $\sqrt{c-F(\psi)} \sim \sqrt{M\psi}$ при $\psi \to \infty$, и поэтому систему (11), отвечающую уравнению (19), можно заменить легко интегрируемой системой $\dot c = 2\varepsilon\sqrt{M\psi}(\alpha + \gamma\sqrt{M\psi}$, $\dot\psi = \sqrt{M\psi}$. Здесь $T(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/3}$.

В [2] эта задача рассматривалась для малых M.

1. *Волосов В. М.* О методе усреднения.— Докл. АН СССР, 1961, 137, № 1, с. 21—24.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М. : Изд-во МГУ, 1971.— 508 с.
3. *Щитов И. Н.* Об одном методе асимптотического интегрирования систем в стандартной форме.— Докл. АН СССР, 1983, 272, № 2, с. 315—319.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
5. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 216 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.— М. : Наука, 1981.— 400 с.

Днепропетров. гос. ун-т Поступила 12.12.83