УДК 517.956.227+517.946

А. А. Панков

Об однородных случайных псевдодифференциальных операторах 1-го порядка

Цель настоящей работы — распространить на однородные случайные операторы (в той степени, в какой это удается сделать) результаты [1]. Последние являются утверждениями о совпадении спектров в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и в $B^2(\mathbb{R}^n)$ для почти периодических операторов 1-го порядка (эллиптический и гипоэллиптический почти периодические случаи вместе с подробным обсуждением истории вопроса см. в [2, 3]). Подход [1] основан на использовании теоремы о совпадении слабых и сильных расширений оператора в комбинации с техникой, развитой в [3], и не может быть полностью реализован для случайных операторов. Причина здесь в том, что конструкции [3] и их варианты [1, 4, 5] существенно используют специфику почти периодического случая. Тем не менее, он приводит к некоторым результатам об обратимости соответствующих операторов в пространствах однородных случайных полей (но не к теоремам о совпадении спектров). Отметим, однако, что в [6] при естественном условии апериодичности получена теорема о совпадении спектров для однородных случайных эллиптических операторов положительного порядка. Доказательство этого основано на функциональном исчислении и в полной мере использует специфику эллиптического случая.

Пусть Ω — вероятностное пространство с мерой μ, на котором действует n-мерная динамическая система T_x, т. е. такое семейство отображений $T_x : \Omega \to \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$, что выполнены следующие условия:

1) групповое свойство: $T_0 = \mathrm{id}$, $T_{x+y} = T_x T_y$;

2) измеримость: отображение $T : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$, $T : (x, \omega) \to T_x\omega$ измеримо* ($\mathbb{R}^n$ снабжено σ-алгеброй борелевских множеств);

3) T_x сохраняет меру, т. е. $\mu(T_xF) = \mu(F)$ для всех измеримых $F \subset \Omega$.

В пространстве $L^2(\Omega)$ динамическая система T_x порождает n-параметрическую группу унитарных операторов $(U_x f)(\omega) = f(T_x\omega)$. Будем предполагать, что группа U сильно непрерывна. По теореме фон Неймана ([7], теорема VIII. 9) это всегда так, если мера μ имеет счетный базис и, следовательно, $L^2(\Omega)$ сепарабельно. Через $\hat{\partial} = (\hat{\partial}_1, \ldots, \hat{\partial}_n)$ обозначим набор производящих операторов группы U_x.

Обозначим через $C_b^\infty(\Omega)$ множество тех функций $u \in L^\infty(\Omega)$, для которых $u(T_x\omega) \in C_b^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ при почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ и

$$|\partial_x^\alpha u(T_x\omega)| \leqslant C_\alpha(u), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где $C_\alpha(u)$ не зависит то ω (неслучайная константа). Здесь и далее $\partial = \partial_x = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Множество $C_b^\infty(\Omega)$ плотно в $L^2(\Omega)$ [8, 9]. Отметим, что функции на Ω естественным образом отождествляются с однородными случайными полями на $\mathbb{R}^n$.

В [8, 10] введены классы однородных случайных символов RS^m ($\mathrm{RS}_{1,0}^m$ в обозначениях [8]) вида $a(\omega, x, \xi)$ и соответствующие классы RL^m однородных случайных операторов $A = Op(a(\omega, x, \xi))$. Оператор A действует на функции $u \in C_b^\infty(\Omega)$ по формуле

$$(Au)(\omega) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\xi} a(\omega, 0, \xi)\, u(T_y\omega)\, dy d\xi, \tag{1}$$

где интеграл понимается как осциллирующий. При п. в. $\omega \in \Omega$ формула

$$(A_\omega u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} a(\omega, x, \xi)\, u(y)\, dy d\xi \tag{2}$$

* В частности, T_x— измеримые преобразования.

определяет реализации A_ω оператора A, действующие в $S(\mathbb{R}^n)$ и в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обычным образом эти реализации продолжаются до операторов, действующих в соболевской шкале. Однородность символов и соответствующих операторов характеризуется соотношениями

$$a(T_z\omega, x, \xi) = a(\omega, x+z, \xi), \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$A_{T_z\omega} = V_z A_\omega V_{-z}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $(V_z f)(x) = f(x+z)$ — оператор сдвига. Кроме того, оператор A продолжается до оператора, действующего в соболевской шкале однородных случайных полей [8].

Если $A \in \mathrm{RL}^0$, то A_ω ограничены в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при п. в. ω и $\|A_\omega\|$ — измеримая инвариантная функция на Ω. Положим

$$\|A\| = \operatorname{ess\,sup} \|A_\omega\|.$$

Если T_x эргодична, то $\|A\| = \|A_\omega\|$ при п.в. $\omega \in \Omega$. Оператор A ограничен в $L^2(\Omega)$ и выполняется неравенство [8]

$$\|A\|_\Omega \leqslant \|A\|. \tag{5}$$

Пусть теперь $A \in \mathrm{RL}^1$ — матричный оператор размерами $N \times N$. Рассмотрим его как замкнутый оператор в $L^2(\Omega)$* с областью определения $D_\Omega(A) = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega)\}$. Действие A здесь понимается в смысле соболевских пространств однородных случайных полей.

Справедливо следующее утверждение (совпадение слабых и сильных расширений).

Теорема 1. *Пусть символ $a(\omega, x, \xi)$ классический в том смысле, что $a(\omega, x, \xi) = a_1(\omega, x, \xi) + a_0(\omega, x, \xi)$, где $a_i \in \mathrm{RS}^i$ и a_1 положительно однороден по ξ степени 1. Тогда $C_b^\infty(\Omega)$ плотно в $D_\Omega(A)$ по норме графика.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 [1]. Рассмотрим фридрихсовские операторы усреднения (неслучайные) $\Phi_\varepsilon u = \varphi_\varepsilon * u$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — неотрицательная функция с единичным интегралом, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и $*$ — свертка на $\mathbb{R}^n$. Оператор $\Phi_\varepsilon = Op(\varphi_\varepsilon)$ может рассматриваться как элемент $\mathrm{RL}^{-\infty}$ и потому действует в $L^2(\Omega)$. Для этих операторов справедлив аналог леммы 1 [1] (с заменой функций Безиковича функциями на Ω) с тем же, по существу, доказательством. Нужно только вместо теоремы о совпадении норм воспользоваться неравенством (5).

Точно также для коммутаторов $[\Phi_\varepsilon, B\partial_j]$, где $B = Op(b(\omega, x, \xi))$, $b \in \mathrm{RS}^0$ — положительно однороден по ξ степени 0, справедлив аналог леммы 2 [1].

После этого доказательство теоремы 1 легко завершается.

Теорема 2. *Пусть T_x — эргодическая динамическая система, выполнены условия теоремы 1 и реализации A_ω с ненулевой вероятностью*** *(т. е. для всех ω из множества ненулевой меры в Ω) обратимы в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда A обратим в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть

$$\gamma(\omega) = \inf_{v \in S(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|A_\omega v\|}{\|v\|}, \quad \omega \in \Omega.$$

Нетрудно проверить, что $\gamma(\omega)$ — измеримая инвариантная (в силу однородности A_ω) функция на Ω и $\gamma(\omega) = \|A_\omega^{-1}\|^{-1}$ при п.в. $\omega \in \Omega$. В силу эргодичности $\gamma(\omega) = \gamma$ при п.в. ω, причем $\gamma > 0$. Пользуясь предложением 2.2 и следствием 2.3 [8], получаем неравенство $\|Au\| \geqslant \gamma \|u\|$ для $u \in C_b^\infty(\Omega)$. По теореме 1 это неравенство справедливо и для $u \in D_\Omega(A)$.

* Как и в [4], мы одинаково обозначаем пространства скалярных функций и соответствующие пространства функций со значениями в $\mathbb{C}^N$.

** Отсюда следует обратимость A_ω с вероятностью 1.

Формально сопряженный оператор A^+ также удовлетворяет условиям теоремы 1 и потому сопряжен к A в $L^2(\Omega)$. Применение к нему предыдущих рассуждений завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. В неэргодическом случае заключение теоремы 2 сохраняется, если A_ω обратимы с вероятностью 1 и $\| A_\omega^{-1} \| \leqslant C$ для п.в. $\omega \in \Omega$.

Замечание 2. В общем случае из обратимости A в $L^2(\Omega)$ не следует обратимость A_ω с вероятностью 1 (взять в качестве Ω тор $\mathbf{T}^n$ со стандартным действием $\mathbb{R}^n$). Это, однако, верно для эллиптических операторов положительного порядка при условии апериодичности динамической системы T_x [6]. В рассматриваемой нами ситуации аналогичный вопрос остается открытым.

В качестве примера рассмотрим оператор

$$A_\omega = \sum_{j=1}^n L_j(T_x\omega)\,\partial_j + M(T_x\omega),$$

где $L_j = L_j^* \in C_b^\infty(\Omega)$, $M \in C_b^\infty(\Omega)$ — $N \times N$-матрицы. Тогда на $C_b^\infty(\Omega)$

$$A = \sum_{j=1}^n L_j(\omega)\,\hat{\partial}_j + M(\omega).$$

Предположим, что почти везде на Ω

$$M(\omega) + M^*(\omega) - \sum_{j=1}^n \hat{\partial}_j L_j(\omega) \geqslant \alpha I, \quad \alpha > 0.$$

В силу стандартных результатов [11] A_ω обратимы с вероятностью 1 и в силу теоремы 2 (и замечания 1) A обратим в $L^2(\Omega)$. Подобные утверждения имеются и для симметризуемых в смысле [12, 13] операторов.

Пусть теперь $a(\omega, t, x, \xi) = a_1(\omega, t, x, \xi) + a_0(\omega, t, x, \xi)$, где a_i — функции класса C^1 от $t \in [0, T]$ со значениями в RS^i (в естественной топологии пространств символов), a_1 — положительно однородна по ξ порядка 1 и $A(t) = Op(a(\omega, t, x, \xi)) \in \mathrm{RL}^1$. Рассмотрим однородную случайную задачу Коши

$$\partial u/\partial t - A(t)\,u = f, \quad u(0) = u_0, \tag{6}$$

и ее реализации

$$\partial v/\partial t - A_\omega(t)\,v = h, \quad v(0) = v_0. \tag{7}$$

Здесь всюду динамическая система T_x предполагается эргодической.

Теорема 3. *Предположим, что с ненулевой вероятностью для любых $h \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ и $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ реализация (7) имеет единственное решение $v \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Тогда задача Коши (6) имеет единственное решение $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ для любых $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и $u_0 \in L^2(\Omega)$.*

Доказательство аналогично (с учетом доказательств теорем 1 и 2) доказательству теоремы 3 [1].

Будем говорить, что $A(t)$ симметризуем (ср. с [13]), если существует такой положительно однородный матричный символ $s(\omega, t, x, \xi) \in \mathrm{RS}^0$, что при п. в. $\omega \in \Omega$ выполняются следующие условия:

а) матрица $s(\omega, t, x, \xi)\,a_1(\omega, t, x, \xi)$ косоэрмитова при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\xi \neq 0$;

б) $s(\omega, t, x, \xi) + s^*(\omega, t, x, \xi) > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n\, |\xi| = 1$, $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Важнейшие примеры симметризуемости: 1) символ a_1 косоэрмитов (симметричная гиперболическая система); 2) строго гиперболический случай. Последнее, по определению, означает, что для п.в. $\omega \in \Omega$ и всех $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$ матрица $a_1(\omega, t, x, \xi)$ имеет чисто мнимые различные собственные значения $\lambda_j(\omega, t, x, \xi)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, причем

$$|\lambda_j(\omega, t, x, \xi) - \lambda_k(\omega, t, x, \xi)| \geqslant c > 0, \quad l \neq k,$$

с неслучайной константой c. Во всех этих ситуациях теорема 3 дает разрешимость задачи (6).

Отметим в связи с этим следующий вопрос. Предположим, что с вероятностью 1 реализации $A_\omega(t)$ симметризуемы (в смысле [13]). Будет ли оператор $A(t)$ симметризуем в описанном выше смысле?

Как и в [1], можно рассмотреть в пространствах однородных случайных полей задачу Коши для дифференциальных уравнений (скалярных) высокого порядка и получить, например, в строго гиперболическом случае теорему разрешимости.

Аналогичным образом можно перенести на нелинейные однородные случайные гиперболические системы основные результаты [14].

1. *Панков А. А.* К теории почти-периодических псевдодифференциальных операторов.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 5, с. 615—619.
2. *Шубин М. А.* Теоремы о совпадении спектров псевдодифференциального почти-периодического оператора в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $B^2(\mathbb{R}^n)$.— Сиб. мат. журн., 1976, **17**, вып. 1, с. 200—215.
3. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 2, с. 3—47.
4. *Панков А. А.* О нелинейных монотонных операторах в частных производных с почти периодическими коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 5, с. 20—22.
5. *Панков А. А.* Ограниченные и почти-периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1985.— 176 с.
6. *Козлов С. М.*, *Шубин М. А.* О совпадении спектров случайных эллиптических операторов.— Мат. сб., 1984, **123**, № 4, с. 460—476.
7. *Рид М.*, *Саймон Б.* Методы современной математической физики : В 3-х т.— М.: Мир. 1977.— Т. 1. 357 с.
8. *Цедик П. Е.*, *Шубин М. А.* Случайные псевдодифференциальные операторы и стабилизация решений параболических уравнений со случайными коэффициентами.— Мат. сб., 1980, **113**, № 1, с. 41—64.
9. *Жиков В. В.*, *Козлов С. М.*, *Олейник О. А.*, *Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— Успехи мат. наук, 1979, **34**, вып. 5, с. 65—133.
10. *Федосов Б. В.*, *Шубин М. А.* Индекс случайных эллиптических операторов. I.— Мат. сб., 1978, **106**, № 1, с. 108—140.
11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными.— М.: Мир, 1977.— 504 с.
12. *Friedrichs K. O.*, *Lax P. D.* Boundary value problems for first order operators.— Communs Pure and Appl. Math., 1965, 18, p. 365—388.
13. *Агранович М. С.* Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов 1-го порядка.— Успехи мат. наук, 1969, **24**, вып. 1, с. 61—125.
14. *Панков А. А.* О нелинейных гиперболических системах с почти-периодическими коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 8, с. 32—35.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 29.05.84