УДК 517.946

Ю. А. Митропольский, А. К. Прикарпатский, В. Гр. Самойленко

Полная интегрируемость дифференциальных уравнений, связанных с задачей о нелинейных колебаниях однородной продольно сжатой балки

1. Рассмотрим уравнения, описывающие колебания однородной упругой балки со сжатием на ее концах. С этой целью запишем уравнения колебаний малого элемента балки, расположенной в плоскости Oxy [2, 11]:

$$\rho S\partial^2 y/\partial t^2 = \partial\sigma/\partial x, \quad \partial M/\partial x - P\partial y/\partial x + \sigma = 0. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность материала, S — поперечное сечение балки, P — параллельное оси Ox постоянное сжатие на концах балки, σ—перерезывающая сила, M — крутящий момент. Учитывая формулу Бернули для момента M

$$M = E_1 I/R = E_1 I\partial^2 y/\partial x^2 \,[1 + (\partial y/\partial x)^2]^{-3/2},$$

где E_1 — модуль Юнга, I — момент инерции балки, R — радиус кривизны изогнутой балки, из (1) получаем нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho S}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{E_1 I}{\rho S}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}\right\}. \tag{2}$$

Уравнение (2) описывает нелинейные трансверсальные колебания упругой балки при постоянных концевых сжатиях.

Вводя новые переменные: $x = \sqrt{S}X$, $y = \sqrt{S}U$, $t = \sqrt{S}T/\lambda$, $\lambda = \sqrt{P/\rho S}$, из (3) имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2\right]^{-3/2}\right\} = 0. \tag{3}$$

Здесь безразмерная величина $\varepsilon = E_1 I/2PS$ характеризует относительную силу эффекта упругого изгиба при продольном сжатии балки.

Ограничимся далее изучением эффектов распространения нелинейных возмущений вдоль балки. С этой целью введем переменные $\xi = X + T$, $\tau = \varepsilon T$ и рассмотрим уравнение (3) в координатах ξ, τ с точностью до слагаемых первого порядка по ε:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2\right]^{-3/2}\right\} = 0. \tag{4}$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial\xi}\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2\right]\right\}^{-1/2} = 0. \tag{5}$$

Ниже покажем, что нелинейное эволюционное уравнение (5) задает вполне интегрируемую по Лиувиллю [1] динамическую систему, которая естественным образом порождает целую иерархию таких систем, коммутирующих с (5).

2. Рассмотрим следующую обобщенную спектральную задачу для периодического оператора типа Дирака L на всей оси: $Ly = 0$, $y \in C^{(2)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$ или покомпонентно:

$$\partial y_1/\partial\xi = \lambda y_2(i + \partial U/\partial\xi), \quad \frac{\partial y_2}{\partial\xi} = \lambda y_1\left(i - \frac{\partial U}{\partial\xi}\right), \tag{6}$$

где $U \in C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ — гладкая l-периодическая функция, $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — произвольный параметр.

Следуя [6], изучим спектральные свойства дифференциального выражения (6). По определению $\lambda \in \sigma(L)$, где $\sigma(L)$ — спектр оператора L, если решение $y_\lambda(\xi, \tau)$ ограничено, т. е. $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^1} (|y_1| + |y_2|) < \infty$. В силу периодичности оператора L спектральные свойства удобно изучать с помощью матрицы монодромии $S(\xi_0; \lambda) = \Phi(\xi_0 + l, \xi_0; \lambda)$, где $\Phi(\xi, \xi_0; \lambda)$ — фундаментальное решение системы (6), удовлетворяющее условию $\Phi(\xi_0, \xi_0; \lambda) = E$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Из (6) получаем интегральное соотношение для важной в дальнейшем вариации δS матрицы монодромии:

$$\delta S = S(\xi_0, \lambda) \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l} \Phi(\xi_0, \tau; \lambda)\, \delta A(\tau; \lambda)\, \Phi(\tau, \xi_0; \lambda)\, d\tau. \tag{7}$$

Здесь матрица $A(\tau; \lambda)$ имеет вид

$$A(\tau, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\left(\dfrac{\partial U}{\partial \tau} + i\right) \\ \lambda\left(i - \dfrac{\partial U}{\partial \tau}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку число $\lambda \in \sigma(L)$ тогда и только тогда, когда собственные числа $\alpha(\lambda)$ матрицы монодромии $S(\xi_0; \lambda)$ равны по модулю единице [6], из уравнения $\det \| S(\xi_0; \lambda) - \alpha(\lambda) E \| = 0$ находим

$$\alpha(\lambda) = \Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1} = \exp ip(\lambda), \tag{8}$$

где $\Delta(\lambda) = \dfrac{1}{2} \operatorname{tr} S(\xi_0; \lambda) = \cos p(\lambda)$. Используя явный вид матрицы $A(\tau; \lambda)$, приходим к следующим условиям для матрицы монодромии: $S(\xi_0; \lambda) = (S_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$: $S_{12}(\xi_0; \lambda^*) = -S_{21}^*(\xi_0; \lambda)$, $S_{11}(\xi_0; \lambda^*) = S_{22}^*(\xi_0; \lambda)$, $S_{11}(\xi_0; -\lambda) = S_{11}(\xi_0; \lambda)$, $S_{12}(\xi_0; -\lambda) = -S_{12}(\xi_0; \lambda)$. Отсюда и из (8) следует, что $\Delta(\lambda^*) = \Delta^*(\lambda)$, $\Delta(-\lambda) = \Delta(\lambda)$, т. е. спектр $\sigma(L)$ состоит из бесконечного числа действительных отрезков и пар комплексно-сопряженных дуг, симметричных относительно мнимой оси, которые образуют зоны устойчивости [6,8] оператора L. Границы зон — числа $E_j \in \mathbb{C}^1$, $j \in \mathbb{Z}$ в силу (8) являются решениями уравнения $\Delta^2(\lambda) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Если $E \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ — граница зоны устойчивости, то числа $\operatorname{Re} E$, $\operatorname{Im} E$ удовлетворяют соотношению

$$2 \operatorname{Re} E \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l} U(\tau)\left[|\bar{y}_1(\tau, \xi_0; E)|^2 - |\bar{y}_2(\tau, \xi_0; E)|^2\right] d\tau = \operatorname{Im} E \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l} U^2(\tau) \times$$

$$\times \left[|\bar{y}_1(\tau, \xi_0; E)|^2 + |\bar{y}_2(\tau, \xi_0; E)|^2\right] d\tau + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l} [\bar{y}_1^*(\tau, \xi_0; E)\, \bar{y}_2(\tau, \xi_0; E) +$$

$$+ \bar{y}_1(\tau, \xi_0; E)\, \bar{y}_2^*(\tau, \xi_0; E)]\, d\tau,$$

где $\bar{y}(\tau, \xi_0; E)$ — собственная (блоховская [8]) функция матрицы монодромии $S(\tau, E)$ в пространстве решений задачи (6).

Пусть $\sigma_0(L) \subset \sigma(L)$ — границы зон в спектре оператора L, $\bar{\sigma}_0(L) \subset \sigma_0(L)$ — вырожденная часть спектра, т. е. для $\lambda_0 \in \bar{\sigma}_0(L)$ справедливо равенство $\partial\Delta(\lambda_0)/\partial\lambda = 0$. Так как для вырожденной точки λ_0 имеет место $\delta\Delta(\lambda_0)/\delta U(\xi) = 0$, то из (7) находим $S_{11}(\xi; \lambda_0) = S_{22}(\xi; \lambda_0)$, $S_{12}(\xi; \lambda_0) = S_{21}(\xi; \lambda_0) = 0$. Вычисляя снова по формуле (7) выражение $\dfrac{\partial^2\Delta(\lambda)}{\partial\lambda^2} = \dfrac{1}{2} \operatorname{tr} R^2(\lambda)$, где $R(\lambda) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l} \Phi^{-1}(\xi_0, \tau; \lambda) \dfrac{\partial A(\tau; \lambda)}{\partial \lambda} \Phi(\xi_0, \tau; \lambda)\, d\tau$, находим [5, 6] $\partial^2\Delta(\lambda_0)/\partial\lambda^2 \neq 0$. Таким образом, вырождение спектра $\sigma_0(L)$ не более чем двукратное, причем в точках вырождения $S(\xi; \lambda_0) = \pm E$.

Пусть $\overline{y}(\xi,\ \xi_0;\ \lambda)$ — блоховская собственная функция, т. е. $\overline{y}(\xi+l,\ \xi_0;\ \lambda)=\exp(ip(\lambda))\,\overline{y}(\xi,\ \xi_0;\ \lambda)$, $\xi\in\mathbb{R}^1\cap\sigma(L)$, удовлетворяющая условию $\overline{y}_1(\xi_0,\ \xi_0;\ \lambda)=1$, $\xi_0\in\mathbb{R}^1$. Тогда $X(\xi;\ \lambda)=\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\overline{y}_1(\xi,\ \xi_0;\ \lambda)$ — периодическая функция, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial X}{\partial\xi}+X^2+\lambda^2|\psi|^2-X\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\psi=0,\quad \psi=i+\frac{\partial U}{\partial\xi}. \tag{9}$$

Это уравнение допускает асимптотическое при $|\lambda|\to\infty$ решение

$$X\simeq i\lambda|\psi|+\sum_{j=0}^{\infty}X_j\lambda^{-j}, \tag{10}$$

где X_j, $j=0,\ 1,\ldots$, определяются с помощью рекуррентных формул. Для функции $X(\xi,\ \lambda)$, пользуясь уравнением $\partial S/\partial\xi=[A,\ S]$, находим

$$X(\xi,\ \lambda)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln S_{12}(\xi;\ \lambda)+\frac{\lambda\psi(\xi)\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}}{S_{12}(\xi;\ \lambda)}, \tag{11}$$

откуда, интегрируя, получаем

$$ip(\lambda)=\int_{\xi_0}^{\xi_0+l}X(\tau,\ \lambda)\,d\tau=\int_{\xi_0}^{\xi_0+l}\frac{\lambda\psi(\tau)\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}}{S_{12}(\tau;\ \lambda)}\,d\tau, \tag{12}$$

$$\overline{y}_1(\xi,\xi_0;\lambda)=\left[\frac{S_{12}(\xi;\lambda)}{S_{12}(\xi_0;\lambda)}\right]^{1/2}\exp\left\{\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\lambda\psi(\tau)\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}}{S_{12}(\tau;\lambda)}\,d\tau\right\}. \tag{13}$$

3. Пусть $(\overline{y}_1)$ — дивизор [6 — 8] блоховской собственной функции $\overline{y}_1(\xi,\xi_0;\lambda)$, являющейся мероморфной однозначной функцией на римановой поверхности $\Gamma\setminus\{\infty^\pm\}$ функции $\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}$, $\lambda\in\mathbb{C}^1$, $\infty^\pm\in\Gamma$ — две бесконечно удаленные точки, принадлежащие Γ согласно разложению (10). Легко устанавливается, что $(\overline{y}_1)=\prod_{j\in\mathbb{Z}}\nu_j(\xi)\,\nu_j^{-1}(\xi_0)\prod_{j\in\mathbb{Z}}\lambda_{0j}$, где $\lambda_{0j}\in\overline{\sigma_0}(L)$, $j\in\mathbb{Z}$, $\nu_j(\xi_0)\in\Gamma\setminus\{\infty^\pm\}$, $j\in\mathbb{Z}$, — такие точки, что их канонические проекции $\pi(\nu_j(\xi_0))\in\mathbb{C}^1$, $\pi:\Gamma\to\mathbb{C}^1$, являются собственными значениями задачи $Ly=0$ с нулевыми граничными условиями для $\overline{y}_1(\xi,\xi_0;\lambda)$ в точках ξ_0,ξ_0+l.

Изучим теперь случай конечного числа зон устойчивости [6, 8] в спектре $\sigma(L)$. В этом случае для функции $S_{12}(\xi;\lambda)$ справедливо представление

$$S_{12}(\xi;\lambda)=\frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|}\prod_{j=1}^{N}(\lambda^2-\mu_j(\xi))\sqrt{\frac{\Delta^2(\lambda)-1}{P(\lambda^2)}}. \tag{14}$$

Здесь $P(\lambda^2)=-\prod_{j=1}^{2N}(\lambda^2-E_j)$, $\pm\sqrt{E_j}$, $j=1,2,\ldots,2N$, — границы невырожденных зон устойчивости спектра $\sigma(L)$, $\pm\sqrt{\mu_j(\xi)}$, $j=1,2,\ldots,N$, — — переменные точки дивизора $(\overline{y}_1)$. Использовав (14), функцию $\overline{y}_1(\xi,\xi_0;\lambda)$ запишем в виде

$$\overline{y}_1(\xi,\xi_0;z)=\left[\frac{\psi(\xi)\,|\psi(\xi_0)|}{\psi(\xi_0)\,|\psi(\xi)|}\prod_{j=1}^{N}\frac{z-\mu_j(\xi)}{z-\mu_j(\xi_0)}\right]^{1/2}\times\exp\left\{\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{|\psi(\tau)|\sqrt{zP(z)}}{\prod_{j=1}^{N}(z-\mu_j(\tau))}\,d\tau\right\},$$

$$z=\lambda^2\in\mathbb{C}^1. \tag{15}$$

Отсюда следует, что функция $\overline{y_1}(\xi, \xi_0;\ z)$ мероморфна и однозначна на римановой поверхности $\Gamma_0 = \Gamma/\mathbb{Z}_2$ функции $w = \sqrt{zP(z)}$, w, $z \in \mathbb{C}^1$. Алгебраический род поверхности Γ_0 равен числу N, которое однозначно определяется по числу нетривиальных зон устойчивости спектра $\sigma(L)$.

Использовав аналитические свойства функции $\overline{y_1}(\xi, \xi_0;\ z)$ на поверхности Γ_0, методами алгебраической геометрии [6, 8] построим ее явное выражение. Предварительно вычислим асимптотические при $z \to \infty$ выражения для функции $\overline{y_1}(\xi, \xi_0;\ z)$.(В силу нечетности полинома $zP(z)$ на римановой поверхности Γ_0 имеется только одна бесконечно удаленная точка $\infty \in \Gamma_0$.) Имеем

$$\overline{y}_1(\xi, \xi_0; z)\,|_{z\to\infty} \simeq \left\{\frac{\psi(\xi)\,|\,\psi(\xi_0)\,|}{\psi(\xi_0)\,|\,\psi(\xi)\,|}\right\}^{1/2} \exp\left\{i\lambda \int_{\xi_0}^{\xi} |\,\psi(\tau)\,|\,d\tau\right\} + O(\lambda^{-1}). \quad (16)$$

Обозначим посредством $d\Omega(\xi, \xi_0; z) = \dfrac{d\ln \overline{y}_1(\xi, \xi_0; z)}{dz}\,dz$ абелев дифференциал третьего рода [7, 8] на поверхности Γ_0. Используя (16), можем записать

$$d\Omega(\xi, \xi_0; z) = d\Omega_0(z) \int_{\xi_0}^{\xi} |\,\psi(\tau)\,|\,d\tau + \sum_{j=1}^{N} [d\Omega_j(\xi, \xi_0; z) + \alpha_j(\xi, \xi_0)\,d\omega_j(z)], \quad (17)$$

где $d\Omega_0(z)$ — нормированный абелев дифференциал второго рода на Γ_0 с особенностью в точке $z = \infty \in \Gamma$ вида $d\Omega_0(z) \sim i\,d\lambda$, $z = \lambda^2 \to \infty$, $d\Omega_j(\xi, \xi_0; \lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — нормированные абелевы дифференциалы третьего рода с особенностями типа полюс в точках $\mu_j(\xi)$, $\mu_j(\xi_0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, и с вычетами $+1$ и -1 соответственно; $d\omega_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — базис нормированных абелевых дифференциалов первого рода на Γ_0, $\alpha_j(\xi, \xi_0) \in \mathbb{C}^1$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — некоторые функции. Нормировка всех абелевых дифференциалов на Γ_0 выполняется обычным образом с помощью гладких кривых a_j, b_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, на поверхности Γ_0, образующих базис одномерной группы гомологий $H_1(\Gamma_0)$ многообразия Γ_0. Так как функция $\overline{y_1}(\xi, \xi_0;\ z)$ однозначна на Γ_0, то для дифференциала $d\Omega_0(\xi, \xi_0; z)$ справедливы соотношения

$$\oint_{a_j} d\Omega_0(\xi, \xi_0; z) = 2\pi i m_j, \quad \oint_{b_j} d\Omega_0(\xi, \xi_0; z) = 2\pi i n_j, \quad (18)$$

где $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Подставляя (17) в (18), находим, что $\alpha_j(\xi, \xi_0) = 2\pi i m_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, а числа n_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяют соотношению вида

$$\beta_j s(\xi, \xi_0) + 2\pi i \sum_{k=1}^{N} b_{jk} m_k - 2\pi i n_j = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mu_k(\xi_0)}^{\mu_k(\xi)} d\omega_j(z), \quad (19)$$

где $\beta_j = \oint_{b_j} d\Omega_0(z)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $s(\xi, \xi_0) = \int_{\xi_0}^{\xi} |\,\psi(\tau)\,|\,d\tau$. Таким образом, точки $\mu_j(\xi) \in \Gamma_0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, являются решением проблемы Якоби обращения абелевых интегралов на поверхности Γ_0 [7, 8], которую можно записать в виде

$$\gamma_j(\xi) \equiv [\beta_j s(\xi, \xi_0) + \gamma_j(\xi_0)] \pmod{\mathcal{T}}, \quad (20)$$

где $\gamma_j : S^N(\Gamma_0) \to J(\Gamma_0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — стандартное отображение Абеля [7, 8] симметрической степени $S^N(\Gamma_0)$ римановой поверхности Γ_0 на многообразие Якоби $J(\Gamma_0) = \mathbb{C}^N/\mathcal{T}$, где $\mathcal{T} = (\delta_{ij}, b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, — матрица Римана, $b_{ij} = \oint_{b_i} d\omega_j(z)$, $\delta_{ij} = \oint_{a_i} d\omega_j(z)$.

Введем стандартным образом [8] Θ-функцию Римана: $\Theta(z; s) = \vartheta(\vec{r}(z) -$

$-\vec{k}-s\vec{\beta})$, где $r_j(z)=\int\limits_0^z d\omega_j(z)$, $k_j=\sum\limits_{k=1}^N\int\limits_0^{\mu_j(\xi_0)} d\omega_j(z)+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^N b_{kj}-\frac{j}{2}$, $j=1,2,\ldots,N$, $\vartheta(\vec{u})=\sum\limits_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^N}\exp\left\{2\pi i\sum\limits_{j=1}^N m_ju_j+\pi i\sum\limits_{j,k=1}^N b_{jk}u_ju_k\right\}$, $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_N)\in\mathbb{C}^N$. Известно [7, 8], что Θ-функция аналитична на поверхности $\hat{\Gamma}=\Gamma_0\setminus\{a_j,\ j=1,2,\ldots,N\}$, и ее нули решают проблему обращения. Используя формулы (16), (17), находим:

$$\bar{y}_1(s;z)=\exp[\Omega_0(z)s(\xi;\xi_0)]\frac{\Theta(z;s)\Theta(\infty;0)}{\Theta(z;0)\Theta(\infty;s)}\left[\frac{\psi(\xi)\,|\,\psi(\xi_0)\,|}{\psi(\xi_0)\,|\,\psi(\xi)\,|}\right]^{1/2},$$

где $\bar{y}_1(s;z)\equiv\bar{y}_1(\xi,\xi_0;z)$, $s=s(\xi,\xi_0)$, $s(\xi_0,\xi_0)=0$.

4. Перейдем к исследованию нелинейного уравнения (5) как бесконечномерной динамической системы, заданной на пространстве $J^{(\infty)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)$ струй гладких действительных периодических функций $U(x)\in C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)$.

Рассмотрим вариационную производную $i\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)}=\frac{\delta\Delta(\lambda)}{\delta U(\xi)}\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}$. Пользуясь (7), находим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)}=-2\lambda^2[\psi\partial^{-1}\psi^*+\psi^*\partial^{-1}\psi]\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)}\equiv$$

$$\equiv-4\lambda^2\,]\partial^{-1}+U_\xi(\xi)\,\partial^{-1}U_\xi(\xi)]\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)},\tag{21}$$

где оператор ∂^{-1} «обратного» дифференцирования определен следующим образом: $\partial^{-1}g(\xi)=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\xi_0}^{\xi}g(\tau)\,d\tau-\int\limits_{\xi}^{\xi_0+l}g(\tau)\,d\tau\right]$ для любой функции $g(x)\in C^{(0)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)$. Пусть $\mathscr{L}=\partial/\partial\xi$, $\mathscr{M}=-4(\partial^{-1}+U_\xi(\xi)\,\partial^{-1}U_\xi(\xi))$. Тогда (21) примет вид

$$\mathscr{L}\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)}=\lambda^2\mathscr{M}\frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)},\tag{22}$$

причем, как легко проверить, операторы $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ кососимметрические, т. е. для билинейной формы $(a,b)=\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+l}a(\tau)\,b(\tau)\,d\tau$, $a(x)$, $b(x)\in C_l^{(1)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)$ выполнены тождества $(a;\mathscr{L}b)=-(\mathscr{L}a,b)$, $(a,\mathscr{M}b)=-(\mathscr{M}a,b)$.

Определим из (12) последовательность $H_j\in\mathscr{D}(J)$, $j\in\mathbb{Z}_+$, где $\mathscr{D}(J)$ — множество гладких по Фреше функционалов на $J^{(\infty)}(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^1)$, согласно формулам $H_j=\int\limits_{\xi_0}^{\xi}X_{2j-1}(\tau)\,d\tau$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Тогда, учитывая (22), имеем

$$\frac{\delta H_{j+1}}{\delta U(\xi)}=\Lambda\frac{\delta H_j}{\delta U(\xi)},\qquad j\in\mathbb{Z}_+,\tag{23}$$

где $\Lambda=\mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}$ — так называемый рекурсионный оператор [9, 10].

Зададим на множестве функционалов $\mathscr{D}(J)$ стандартным образом симплектическую структуру с помощью скобки Пуассона $\{F,G\}_{\mathscr{L}}=(\mathrm{grad}\,F,\mathscr{L}\,\mathrm{grad}\,G)$, где $\mathrm{grad}(\cdot)=\frac{\delta(\cdot)}{\delta U(\xi)}$, $F,G\in\mathscr{D}(J)$. Из соотношений (23) в силу кососимметричности операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ находим инволютивность системы функционалов H_j, $i\in\mathbb{Z}_+$: $\{H_j,H_k\}=0$, $j,k\in\mathbb{Z}_+$.

Таким образом, функционал $p(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}^1$ можно взять в качестве производящей функции для иерархии динамических систем Гамильтона на

$J^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ [6, 13]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \{p(\lambda), U\}_{\mathscr{L}} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-2j} \{H_j, U\}_{\mathscr{L}}, \tag{24}$$

где эволюционный параметр $t \in \mathbb{R}^1$. Тогда уравнение (15) колебаний балки принимает вид $\partial U/\partial t = \{H_0, U\}_{\mathscr{L}}$. Вводя вторую скобку Пуассона $\{F, G\}_{\mathscr{M}} = (\operatorname{grad} F, \mathscr{M} \operatorname{grad} G)$, последнее уравнение можно представить в виде

$$\partial U/\partial t = \{H_1, U\}_{\mathscr{M}}, \ \operatorname{grad} H_1 = \Lambda \operatorname{grad} H_0. \tag{25}$$

Использовав уравнения (24), вычислим эволюцию по переменной $t \in \mathbb{R}^1$ отображения Абеля (20):

$$\frac{\partial \gamma_j(s)}{\partial t} = \{p(\lambda), \ \gamma_j(s)\}_{\mathscr{L}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{d\omega_j(\mu_k(\xi))}{dz} \frac{\partial \mu_k(\xi)}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{26}$$

Для определения величин $\partial \mu_k(\xi)/\partial t$, $j = 1, 2, \ldots, N$, вычислим предварительно эволюцию функции $S_{12}(\xi_0; \mu)$, $\mu \in \mathbb{C}^1$:

$$\frac{\partial S_{12}(\xi_0, \mu)}{\partial t} = \{p(\lambda), \ S_{12}(\xi_0; \mu)\}_{\mathscr{L}} = \int_{\xi_0}^{\xi_0 + l} \frac{\delta p(\lambda)}{\delta U(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\delta S_{12}(\xi_0; \mu)}{\delta U(\xi)} d\xi =$$

$$= -\mu [S_{11}(\xi_0; \mu) - S_{22}(\xi_0; \mu)] \frac{\partial}{\partial \xi_0} \operatorname{grad} p(\lambda).$$

Учитывая формулу (14), находим

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial t} = -2 \frac{|\psi(\xi)|}{\psi(\xi)} \frac{\sqrt{\mu_j P(\mu_j)}}{\prod\limits_{k \neq j} (\mu_j - \mu_k)} \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} p(\lambda). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), приходим к выражению

$$\frac{\partial \gamma_j(s)}{\partial t} = -\frac{2|\psi(\xi)|}{\psi(\xi)} C_{j1} \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} p(\lambda),$$

где $d\omega_j(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_{jk} z^k [zP(z)]^{-1/2} dz$, $j = 1, 2, \ldots, N$, — базис нормированных абелевых дифференциалов первого рода на поверхности Γ_0. Пользуясь уравнением $\dfrac{\partial}{\partial \xi_0} S = [A, S]$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^1$, находим величину $\dfrac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} p(\lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{grad} p(\lambda) = \frac{\lambda^3 (\psi^* S_{12} + \psi S_{12}^*)}{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}} = \lambda^3 |\psi| [P(\lambda^2)]^{-1/2} \times$$

$$\times \Big[\prod_{j=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_j) - \prod_{j=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_j^*)\Big].$$

Тогда

$$\partial \gamma_j(s)/\partial t = 2\psi^* C_{j1} \sum_{j=1}^{N} (\mu_j - \mu_j^*).$$

Пользуясь выражением (11), находим $X_1 = i|\psi| \Big(\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{2N} E_j\Big)$, откуда в силу (9)

$$\frac{\partial \gamma_j(s)}{\partial t} = \frac{\psi^* C_{j1}}{2|\psi|} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} |\psi|^{-2}\right). \tag{28}$$

Вводя новую переменную $f \in \mathbb{C}^1$ по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\psi^*(\xi, \tau)}{|\psi(\xi, \tau)|} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi} |\psi(\xi, \tau)|^{-2}\right),$$

уравнение (28) запишем в виде $\frac{\partial \gamma_j(s)}{\partial f} = \frac{1}{2} C_{j1}$ т. е. в силу соотношения (20)

$$\gamma_j(s, f) \equiv \left(\beta_j s + \frac{1}{2} C_{j1} f\right) (\mathrm{mod}\, \mathscr{T}), \ \beta_j = 2C_{j1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Таким образом, в переменных s, f эволюция динамической системы (26) (или системы (5)) на многообразии Якоби $J = \mathbb{C}^N/\mathscr{T}$ является линейной. Как следствие получаем полную интегрируемость динамической системы (5) на многообразии струй $J^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$, причем в силу функциональной зависимости законов сохранения H_j, $j = N, N + 1, \ldots$, динамическая система (5) эквивалентна [8] конечномерной вполне интегрируемой динамической системе с $N \in \mathbb{Z}_+$ степенями свободы. Кроме того, пользуясь аналитическими свойствами Θ-функции Римана, можно вычислить в явном виде значения так называемых нелинейных формул следов [3, 4, 8], а именно, величины $\sum_{j=1}^{N} \mu_j(s, f)$, $\sum_{j=1}^{N} \mu_j^2(s, f)$ и др., которые эффективно связаны с коэффициентами X_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, функций (9), (10), явно выражаемых через функцию $\psi(s, f)$. С другой стороны, вычисляя предел

$$\lim_{z \to \infty} \overline{y}_1(s, f; z) \frac{\partial \overline{y}_1(s, f; z)}{\partial s} z^{-1/2} = i |\psi(s, f)|,$$

получаем соотношение на функцию $|\psi(s, f)|$ в явном виде через Θ-функции Римана. В общем случае в силу свойств Θ-функции Римана функция $U(s, f)$ квазипериодическая по $s, f \in \mathbb{R}^1$.

Отметим также, что выполняя стандартным образом [8] процедуру вырождения римановой поверхности Γ_0 до рациональной, можно получить в явном виде так называемые многосолитонные и кинковые решения, а также быстроубывающие при $|\xi| \to \infty$ решения, имеющие практические применения.

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1978.— 431 с.
2. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред.— М.: Наука, 1982.— 335 с.
3. *Дикий Л. А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма — Лиувилля.— Успехи мат. наук, 1958, 13, № 3, с. 111—143.
4. *Крейн М. Г.* О формуле следов в теории возмущений.— Мат. сб., 1953, 33, № 3, с. 597—696.
5. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажорации и ее приложения.— М.: Мир, 1983.— 574 с.
6. *Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Динамические системы, ассоциированные с периодическим оператором Дирака и их полная интегрируемость.— Киев, 1983.— 31 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.44).
7. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 341 с.
8. *Теория* солитонов : метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука 1980.— 320 с.
9. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.* Inverse scattering transform method.— Stud. Appl. math., 1974, 53, N 2, p. 249—336.
10. *Case K. M., Roose A. M.* Sine-Gordon and monified Korteweg—de Vries charges.—J. Math. Phys., 1982, 23, N 3, p. 392—396.
11. *Ichikawa Y. H., Konno K., Wadati M.* Nonlinear transverse oscillation of elastic beams under tension.— J. Phys. Soc. Jap., 1981, 50, N 5, p. 1799—1802.
12. *Shimizu T., Sawada K., Wadati, M.* Determination of the one — kink curve of an elestic wire through the inverse method.— Ibid., 1983, 52, N 1, p. 36—43.
13. *Wadati, M., Konno K., Ishikawa Y. H.* New integrable nonlinear evolution equations.— Ibid., 1979, 47, N 5, p. 1698—1700.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.05.85