УДК 517.5

Ю. И. Мельник

О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $C = \overline{M} \diagdown M$ — граница $\overline{M}$. Предполагаем, что начало координат принадлежит M.

Пусть $\mathscr{L}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda)$, $d_k \neq 0$, — экспоненциальный многочлен (квазиполином), $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — множество нулей функции $\mathscr{L}(\lambda)$ (для простоты предполагаем, что все нули $\mathscr{L}(\lambda)$ простые). Произвольной функции $f(z)$, регулярной в M и непрерывной в $\overline{M}$, ставится в соответствие ряд экспонент [1, 2]

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \omega_f(\lambda_m) \{\exp(\lambda_m z)/\mathscr{L}'(\lambda_m)\}, \tag{1}$$

где

$$\omega_f(\lambda_m) = \lim_{r \uparrow 1} \omega_{f,r}(\lambda_m), \quad \omega_{f,r}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(2/(r+1))} \{\int\limits_0^t f(r(t-\eta)) \exp(\zeta\eta)\, d\eta\} \gamma(t)\, dt, \tag{2}$$

$\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией $\mathscr{L}(\lambda)$, $\Gamma(R) = \{\zeta_R : \zeta_R = R\zeta,\ \zeta \in C\}$, $R > 0$.

Известно [1], что ряд (1) сходится к $f(z)$ абсолютно в M и равномерно на компактах, лежащих в M.

2. В дальнейшем потребуются следующие свойства квазиполинома $\mathscr{L}(\lambda)$:

а) вдали от начала координат все нули $\mathscr{L}(\lambda)$ простые;

б) вдали от начала координат нули $\mathscr{L}(\lambda)$ (обозначим их через $\lambda_n^{(j)}$) имеют вид $\lambda_n^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \delta_n^{(j)}$, где $\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} = 2\pi n i/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \exp(i\alpha_j)$, $|\delta_n^{(j)}| \leqslant A \exp(-an)$, A, $a > 0$, A, $a = \mathrm{const}$, $j = 1, \ldots, N$, $\gamma_{N+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_1$, α_j, q_j — некоторые числа;

в) имеет место оценка

$$|\exp(\lambda_n^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_n^{(j)}) - (-1)^n B_j \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(z - (\gamma_{j+1} + \gamma_j)/2)\}| \leqslant A \exp(-an),$$

$$A,\ a = \mathrm{const},\ A,\ a > 0, \quad B_j \neq 0, \quad B_j = \mathrm{const}.$$

Свойства а), б) имеются в монографии [2], свойство в) выводится на основании изложенного в § 2 гл. 1 той же монографии.

3. Пусть $\Omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности (т. е. $\Omega(h)$ задана при $h > 0$, положительна, не убывает, полуаддитивна и $\Omega(+0) = 0$). Обозначим через $AH^{\Omega}(\overline{M})$ класс функций $f(z)$, регулярных в M, непрерывных в $\overline{M}$ и удовлетворяющих условию $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A\Omega(h)$, z_1, $z_2 \in \overline{M}$, $|z_1 - z_2| \leqslant h$, $A = \mathrm{const}$. Через $AW^r H^{\Omega}(\overline{M})$ (r натуральное) обозначим класс регулярных в M функций $f(z)$ таких, что $f^{(r)} \in AH^{\Omega}(\overline{M})$, $AW^0 H^{\Omega}(\overline{M}) \overset{\mathrm{df}}{=} AH^{\Omega}(\overline{M})$.

Теорема. *Пусть* $f \in AW^r H^{\Omega}(\overline{M})$ (r *целое неотрицательное*), $\Omega(t)/t$ *интегрируемая на* $[0, \delta]$, $\delta > 0$, *и выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f(\gamma_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} d_k f^{(s)}(\gamma_k) = 0, \quad s = 0, \ldots, r-1, \quad r \geqslant 1. \tag{2}$$

Положим

$$f_n(z) = \sum_{\mu \in \Lambda \cap M_n} \omega_f(\mu) \{\exp(\mu z)/\mathscr{L}'(\mu)\}, \tag{3}$$

где M_n — многоугольник с вершинами в точках $(\lambda_n^{(j)}+\lambda_{n+1}^{(j)})/2$, $j=1,\ldots,N$ (так что суммирование распространяется на те нули $\mathscr{L}(\lambda)$, которые попадают в M_n). Тогда

$$|f(z)-f_n(z)|\leqslant An^{-r}\Omega_1(1/n)\ln n,\quad z\in\overline{M},\quad A=\text{const},\tag{4}$$

где

$$\Omega_1(h)=\int_0^h\{\Omega(t)/t\}\,dt+h\int_h^{2\pi}\{Q(t)/t^2\}\,dt.\tag{5}$$

4. Для доказательства теоремы потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *В условиях теоремы*

$$\omega_f(\lambda_m)=\omega_{f^{(r)}}(\lambda_m)\,\lambda_m^{-r}.\tag{6}$$

Доказательство. Интегрируя по частям правую часть соотношения [1]

$$\omega_{f^{(r)}}(\lambda_n^{(j)})=\sum_{k=1}^N d_k\int_{\gamma_j}^{\gamma_k}f^{(r)}(\zeta)\exp\{-\lambda_n^{(j)}(\zeta-\gamma_k)\}\,d\zeta$$

и учитывая (2), легко находим

$$\omega_{f^{(r)}}(\lambda_n^{(j)})=\lambda_n^{(j)}\omega_{f^{(r-1)}}(\lambda_n^{(j)}),$$

откуда следует (6).

Лемма 2 [3]. *Пусть $f\in AH^{\Omega}(\overline{M})$, $\Omega(t)/t$ интегрируема на $[0,\delta]$, $\delta>0$, и выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^N d_k f(\gamma_k)=0.$$

Тогда при фиксированном j, $1\leqslant j\leqslant N$, коэффициенты $\omega_f(\lambda_n^{(j)})$ ряда (1) являются коэффициентами Фурье некоторой непрерывной 2π-периодической функции $F_j(t)$ из класса H^{Ω_1} ($f\in H^{\Omega_1}\Leftrightarrow|f(t_1)-f(t_2)\leqslant\text{const}\,\Omega_1(h)$, $|t_1-t_2|\leqslant h$):

$$\omega_f(\lambda_n^{(j)})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_j(t)\exp(-int)\,dt.$$

5. Ниже через A, A_s, $s=1,2,\ldots$, обозначены различные положительные постоянные.

Доказательство теоремы. Пусть сначала $r=0$. Учитывая свойство б) квазиполинома и абсолютную сходимость ряда (1) в M, имеем

$$f(z)=\sum_{j=1}^N\Phi_j(z)+\Phi(z),\tag{7}$$

где

$$\Phi_j(z)=B_j\sum_{n=n_0(j)}^{\infty}(-1)^n\omega_f(\lambda_n^{(j)})\exp\{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2)\},\quad j=1,\ldots,N,\tag{8}$$

$$\Phi(z)=\sum_{m=1}^{m_0}\omega_f(\lambda_m)\{\exp(\lambda_m z)/\mathscr{L}'(\lambda_m)\}+\sum_{j=1}^N\sum_{n=n_0(j)}^{\infty}\omega_f(\lambda_n^{(j)})\times$$

$$\times\{\exp\lambda_n^{(j)}z)/\mathscr{L}'(\lambda_n^{(j)})-(-1)^nB_j\exp(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(z-(\gamma_j+\gamma_{j+1})/2))\}.\tag{9}$$

Из (3), (7) — (9) следует

$$f_n(z)=\sum_{j=1}^N\Phi_j^{(n)}(z)+\Phi_n(z).\tag{10}$$

Здесь $\Phi_n(z)$, $\Phi_j^{(n)}(z)$ — n-е частичные суммы рядов (9), (8) соответственно. Положим

$$F_j(w) = \sum_{n=n_0(j)}^{\infty} \omega_f(\lambda_n^{(j)}) w^n, \quad F_j^{(n)}(w) = \sum_{k=n_0(j)}^{n} \omega_f(\lambda_k^{(j)}) w^k. \tag{11}$$

С помощью простых, хотя и несколько громоздких выкладок, из (8), используя свойство б) квазиполинома и учитывая определение функций $\Phi_j^{(n)}(z)$, получаем

$$\Phi_j(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1}) q_j \exp(i\alpha_j)/2\} F_j(\exp\{2\pi i(z-\gamma_j)/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\}) \times \\ \times \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(z-\gamma_j)\}, \tag{12}$$

$$\Phi_j^{(n)}(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1}) q_j \exp(i\alpha_j)/2\} F_j^{(n)}(\exp\{2\pi i(z-\gamma_j)/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\}) \times \\ \times \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(z-\gamma_j)\}. \tag{13}$$

Далее из (11) с учетом (2) в силу леммы 2, следует, что $F_j(\exp(i\theta)) \in H^{\Omega_1}$. Поэтому (см., например, [4, с. 116, 204]) $|F_j(\exp(i\theta)) - F_j^{(n)}(\exp(i\theta))| \leqslant \leqslant A\Omega_1(1/n)\ln n$. Отсюда на основании принципа максимума модуля заключаем что

$$|F_j(w) - F_j^{(n)}(w)| \leqslant A\Omega_1(1/n)\ln n, \quad |w| \leqslant 1. \tag{14}$$

Так как $|\exp\{2\pi i(z-\gamma_j)/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\}| \leqslant 1, \quad z \in \overline{M}$, то из (12)—(14) имеем

$$|\Phi_j(z) - \Phi_j^{(n)}(z)| \leqslant A\Omega_1(1/n)\ln n, \quad z \in \overline{M}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Из (9), того факта, что $\omega_f(\lambda_n^{(j)}) = O(1)$ [2, с. 318], и свойства в) квазиполинома $\mathscr{L}(\lambda)$ получаем

$$|\Phi(z) - \Phi_n(z)| \leqslant A\exp(-an), \quad z \in \overline{M}, \quad a > 0. \tag{16}$$

Неравенство (4) ($r = 0$) следует из (9), (15) и (16). Этим теорема доказана при $r = 0$. Пусть теперь $r > 0$. В силу условия (2) и леммы 1 из соотношения (6) находим

$$\Sigma_{np} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{m=n+1}^{n+p} \omega_f(\lambda_m)\{\exp(\lambda_m z)/\mathscr{L}'(\lambda_m)\} = \sum_{m=n+1}^{n+p} (\lambda_m)^{-r} \times \\ \times \{\omega_{f^{(r)}}(\lambda_m)\exp(\lambda_m z)/\mathscr{L}'(\lambda_m)\}. \tag{17}$$

Положим $\sigma_m = S_m(f^{(r)};\ z) - f^{(r)}(z)$, где $S_m(f^{(r)};\ z) = \sum_{k=1}^{m} \omega_{f^{(r)}}(\lambda_k^{(j)})\{\exp(\lambda_k z)/\mathscr{L}'(\lambda_k)\}$ — m-я частичная сумма разложения $f^{(r)}(z)$ в ряд экспонент (1). Тогда из (17), используя преобразование Абеля, получаем

$$\Sigma_{np} = \sum_{m=n+1}^{n+p} (\lambda_m)^{-r}(\sigma_m - \sigma_{m-1}) = -\sigma_n(\lambda_{n+1})^{-r} + \\ + \sum_{m=n+1}^{n+p} \sigma_m((\lambda_m)^{-r} - (\lambda_{m+1})^{-r}) + \sigma_{n+p}(\lambda_{n+p+1})^{-r}.$$

Отсюда, в силу (4)

$$|\Sigma_{np}| \leqslant A_1 n^{-r}\Omega_1(1/n)\ln n + A_2 \sum_{m=n+1}^{n+p} \Omega_1(1/m)\ln m\,(m^{-r} - (m+1)^{-r}) + \\ + A_1(n+p+1)^{-r}\Omega_1(1/(n+p))\ln(n+p). \tag{18}$$

Устремляя p к $+\infty$ в соотношении (18) и учитывая определение $f_n(z)$, легко находим, что при $z \in \overline{M}$ выполняется неравенство

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant A_3 n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n + A_4 \sum_{m=n+1}^{\infty} \Omega_1(1/m) \ln m (m^{-r} - (m+1)^{-r}).$$

Учитывая монотонность $\Omega_1(h)$ и используя преобразование Абеля, из последнего соотношения окончательно получаем

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant A_3 n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n + A_4 \Omega_1(1/n) \sum_{m=n+1}^{\infty} \ln m (m^{-r} - (m+1)^{-r}) =$$

$$= A_3 n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n + A_4 \Omega_1(1/n) \Big\{ \ln(n+1)(n+1)^{-r} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-r} (\ln(m+1) -$$

$$- \ln m) \leqslant A_5 n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n + A_6 \Omega_1(1/n) \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-r-1} \leqslant A_5 n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n +$$

$$+ A_7 \Omega_1(1/n) n^{-r} \leqslant A n^{-r} \Omega_1(1/n) \ln n, \quad z \in \overline{M}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\Omega_1(h) \leqslant A\Omega(h)$, т. е. выполняется условие

$$\int_0^h \{\Omega(t)/t\}\, dt + h \int_h^{2\pi} \{\Omega(t)/t^2\}\, dt \leqslant A\Omega(h), \tag{19}$$

то из (4) получаем

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant A n^{-r} \Omega(1/n) \ln n.$$

Так как условие (19) выполняется в случае, когда $\Omega(h) = Ah^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* $f \in AW^r H^{\alpha}(\overline{M})$, $0 < \alpha < 1$, *и выполняется условие* (2). *Тогда*

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant A n^{-r-\alpha} \ln n$$

(*здесь* $AW^r H^{\alpha}(\overline{M}) \overset{\mathrm{df}}{=} AW^r H^{\Omega_0}(\overline{M})$, $\Omega_0(t) = t^{\alpha}$).

Замечание 2. Теорема легко обобщается на линейные методы суммирования рядов.

Замечание 3. На возможность обобщения на ряды экспонент рассматриваемого вида большинства аппроксимационных теорем, известных для случая приближения периодических функций, указал В. К. Дзядык в 1975 г. на Всесоюзном симпозиуме по теории аппроксимации функций комплексной переменной в г. Уфе.

1. *Дзядык В. К.* Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках.— Мат. сб., 1974, 94, № 4, с. 475—493.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с.
3. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных в выпуклых многоугольниках функций в виде суммы периодических.— Мат. заметки, 1984, 36, № 6, с. 847—856.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 508 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.09.84