УДК 517.9

А. П. Малицкая

Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка

В данной статье решена задача о построении фундаментального решения (ф. р.) задачи Коши уравнения

$$D_t u(t, R) - \sum_{j=1}^{n} (x_j D_{y_j} + y_j D_{z_j}) u(t, R) = \sum_{|k| \leqslant 2} a_k(t, R) U_x^{(k)}(t, R), \quad (1)$$

где оператор

$$D_t = \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t, R) D_x^k, \quad R = (x, y, z), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (2)$$

равномерно параболический в смысле И. Г. Петровского в слое $\Pi_T = \{(t, R), t \in [0, T], R \in \mathbb{R}^{3n}\}$.

В случае, когда коэффициенты a_k зависят от t, ф. р. (1) построено и изучено в работе [1], если a_k зависят от t, x, y и $D_z u(t, R) \equiv 0$ — в статьях [2, 3], при $k = 1$ — в работах [4, 5].

С учетом специального характера вырождения ультрапараболического уравнения удалось распространить на уравнение (1) классический метод Леви.

1. Предположим, что

1) $a_k(t, R)$, $D_y a_k(t, R)$, $D_z a_k(t, R)$— непрерывные, ограниченные в Π_T;

2) существуют постоянные $c_1 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $r \in (0, 1]$ такие, что для любых R, $S \in \Pi_T$, $S = (\xi, \eta, \zeta)$ справедливы неравенства:

$$a_k(t, R) - a_k(t, S)| \leqslant c_1 |x - \xi|^{\alpha}, \quad |D_y a_k(t, R) - D_y a_k(t, S)| \leqslant c_1 |R - S|^r,$$
$$|D_z a_k(t, R) - D_z a_k(t, S)| \leqslant c_1 |R - S|^r, \quad |k| = 2b.$$

Теорема. *Если выполняются условия* 1, 2, *то уравнение* (1) *имеет ф. р.* $Z(t, R; \tau, S)$ *задачи Коши, которое вместе со своими производными удовлетворяет оценкам*

$$|D_x^m Z(t, R; \tau, S)| \leqslant A_m (t-\tau)^{-(6b+3)n+|m|)/2b} \Phi(t, R; \tau, S), \quad |m| \leqslant 2b,$$
$$|D_{y_j} Z(t, R; \tau, S)| \leqslant A (t-\tau)^{-((6b+3)n+2b+1)/2b} \Phi(t, R; \tau, S),$$
$$|D_{z_j} Z(t, R; \tau, S)| \leqslant A (t-\tau)^{-((6b+3)n+4b+1)/2b} \Phi(t, R; \tau, S), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\Phi(t, R; \tau, S) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \Gamma(1 + k\alpha/2b) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right) \Gamma^{-1}(1 + (k+1)\alpha/2b) \times$$
$$\times \exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi) - 2^{-3qk} c (\rho_1(t, R'; \tau, S') + \rho_2(t, R; \tau, S))\},$$
$$R' = (x, y), \quad S' = (\xi, \eta), \quad q = 2b(2b-1)^{-1}, \quad \rho(t, x; \tau, \xi) =$$
$$= (|x - \xi| (t-\tau)^{-1/2b})^2, \quad \rho_1(t, R'; \tau, S') = (|y - \eta +$$
$$+ x(t-\tau)| (t-\tau)^{-(2b+1)/2b})^2, \quad \rho_2(t, R; \tau, S) =$$
$$= (|z - \zeta + y(t-\tau) + 2^{-1} x (t-\tau)^2| (t-\tau)^{-(4b+1)/2b})^2.$$

Постоянные A, A_m, c *зависят от* n, $2b$, c_1, α, r *и постоянной параболичности* δ *оператора* (2).

2. Для доказательства теоремы запишем уравнение (1) в виде

$$D_t u - \sum_{j=1}^{n} (x_j D_{y_j} + y_j D_{z_j}) u - \sum_{|k|=2b} a_k(t, S(t, \tau)) D_x^k u = \sum_{|k|=2b} (a_k(t, R) - a_k(t, S(t, \tau))) D_x^k u + \sum_{|k|<2b} a_k(t, R) D_x^k u, \quad a_k(t, S(t, \tau)) = a_k(t, \xi, \eta - \xi(t-\tau), \zeta - \eta(t-\tau) + 2^{-1}\xi(t-\tau)^2), \tag{3}$$

где (τ, S) — фиксированная точка Π_T.

Ф. р. $Z_0(t, R, \tau, S; S(t, \tau))$ уравнения

$$D_t u - \sum_{j=1}^{n} (x_j D_{y_j} + y_j D_{z_j}) u = \sum_{|k|=2b} a_k(t, S(t, \tau)) D_x^k u \tag{4}$$

построено и изучено в [1], для его производных справедливы следующие оценки:

$$|D_x^m D_{y_j}^{m_1} D_{z_j}^{m_2} Z_0(t, R; \tau, S; S(t, \tau))| \leqslant A \exp\{-c[\rho(t, x; \tau, \xi) + \rho_2(t, R; \tau, S) + \rho_1(t, R'; \tau, S')]\}(t-\tau)^{-((6b+3)n+|m|+(2b+1)|m_1|+(4b+1)|m_2|)/2b}. \tag{5}$$

Ф. р. $Z(t, R; \tau, S)$ уравнения (1) будем отыскивать по методу Леви в виде

$$Z(t, R; \tau, S) = Z_0(t, R; \tau, S; S(t, \tau)) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^{3n}} Z_0(t, R; \beta, M, M(t, \beta)) \times \varphi(\beta, M; \tau, S)\, dM, \quad M = (\lambda, \theta, \gamma), \tag{6}$$

где $\varphi(\beta, M; \tau, S)$ — неизвестная функция; будем предполагать, что она удовлетворяет условиям плотности объемного потенциала из теоремы 4 [1]. Применим к (6) оператор

$$-D_t + \sum_{j=1}^{n} (x_j D_{y_j} + y_j D_{z_j}) + \sum_{|k|=2b} a_k(t, S(t, \tau)) D_x^k.$$

На основании теоремы 4 [1] получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции

$$\varphi(t, R; \tau, S) = K(t, R; \tau, S) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^{3n}} K(t, R; \beta, M) \varphi(\beta, M; \tau, S)\, dM. \tag{7}$$

Здесь $K(t, R; \tau, S) = \sum_{|k|=2b} (a_k(t, R) - a_k(t, S(t, \tau))) D_x^k Z_0(t, R; \tau, S; S(t, \tau)) + \sum_{|k|<2b} a_k(t, R) D_x^k Z_0(t, R; \tau, S; S(t, \tau)).$

Решение уравнения (7) представляется в виде ряда Неймана:

$$\varphi(t, R; \tau, S) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, R; \tau, S), \tag{8}$$

где $K_1(t, R; \tau, S) = K(t, R; \tau, S)$, $K_m(t, R; \tau, S) = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^{3n}} K(t, R; \beta, M) \times K_{m-1}(\beta, M; \tau, S)\, dM$.

Покажем сходимость ряда (8) и необходимые для применения метода Леви оценки $\varphi(t, R; \tau, S)$ и ее приращений. При доказательстве используются оценки $K_m(t, R; \tau, S)$; для получения оценок $K_m(t, R; \tau, S)$ применяется такая лемма, обобщающая лемму 2 [2] на случай уравнения (1).

3. Лемма 1. *Для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует $\delta_\alpha > 0$ такое, что для любых $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, x_1, y_1, z_1, t, \tau$ и $\tau < \beta < t$ справедливо неравенство*

$$(|x-\xi|(t-\beta)^{-\alpha})^{1/(1-\alpha)} + (|y-\eta+x(t-\beta)|(t-\beta)^{-(1-\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + \\ + (|z-\zeta+y(t-\beta)+2^{-1}x(t-\beta)^2|(t-\beta)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + \\ + (|\xi-x_1|(\beta-\tau)^{-\alpha})^{1/(1-\alpha)} + (|\eta-y_1+\xi(\beta-\tau)|(\beta-\tau)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + \\ + (|\zeta-z_1+\eta(\beta-\tau)+2^{-1}\xi(\beta-\tau)^2|(\beta-\tau)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} \geqslant \\ \geqslant \delta_\alpha[(|x-x_1|(t-\tau)^{-\alpha})^{1/(1-\alpha)} + (|y-y_1+x(t-\tau)(t-\tau)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + \\ + (|z-z_1+y(t-\tau)+2^{-1}x(t-\tau)^2|(t-\tau)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)}]. \tag{9}$$

Доказательство леммы основано на таких неравенствах:

$$(|z-\zeta+y(t-\beta)+2^{-1}x(t-\beta)^2|(t-\beta)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + (|\zeta-z_1+ \\ + \eta(\beta-\tau)+2^{-1}\xi(\beta-\tau)^2|(\beta-\tau)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} \geqslant (|z-z_1+y(t-\beta)+ \\ + 2^{-1}x(t-\beta)^2+\eta(\beta-\tau)+2^{-1}\xi(\beta-\tau)^2(t-\tau)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)}\cdot 2^{-1/(1-\alpha)}. \tag{10}$$

Из (10) получаем

$$(|z-z_1+y(t-\beta)+2^{-1}x(t-\beta)^2+\eta(\beta-\tau)+2^{-1}\xi(\beta-\tau)^2| \times \\ \times 2^{-1}(t-\tau)^{-(2+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} \geqslant (2^{-3}|z-z_1+y(t-\tau)+2^{-1}x(t-\tau)^2|)^{1/(1-\alpha)} \times \\ \times (t-\tau)^{-(2+\alpha)/(1-\alpha)} - (2^{-2}|y-\eta+x(t-\beta)|(\beta-\tau)(t-\tau)^{-(\alpha+2)})^{1/(1-\alpha)} - \\ - (2^{-2}|x-\xi|(\beta-\tau)^2(t-\tau)^{-(2-\alpha)})^{1/(1-\alpha)}. \tag{11}$$

Для двух следующих слагаемых имеем аналогичную оценку:

$$(|y-\eta+x(t-\beta)|(t-\beta)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} + (|\eta-y_1+\xi(\beta-\tau)|(\beta-\tau)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} \geqslant \\ \geqslant (|y-y_1+x(t-\tau)|\cdot 2^{-2}(t-\tau)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)} - \\ - (2^{-1}|x-\xi|(\beta-\tau)(t-\tau)^{-(1+\alpha)})^{1/(1-\alpha)}. \tag{12}$$

Из (11), (12) и леммы 5 [6] следует (9).

Лемма 2. *Для повторных ядер $K_m(t, R; \tau, S)$ имеют место следующие оценки:*

$$|K_m(t, R; \tau, S)| \leqslant A_m^m (t-\tau)^{-((6b+3)n+2b-m\alpha)/2b} \exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi) - \\ - 2^{-3mq}c(\rho_1(t, R'; \tau, S') + \rho_2(t, R; \tau, S))\}, \tag{13}$$

при $m \leqslant m^* = [((6b+3)n+2b)/\alpha]+1$,

$$K_{m+j}(t, R; \tau, S)| \leqslant A_m^{m+j} \prod_{k=0}^{j-1} B(\alpha/2b, 1+\alpha k/2b)(t-\tau)^{\alpha j/2b} \exp\{-c\rho(t, x; \tau, \xi) - \\ - 2^{3(m+j)q}c(\rho_1(t, R'; \tau, S') + \rho_2(t, R; \tau, S))\}, \tag{14}$$

при $m+j > m^*$.

Из оценок (13), (14) следует сходимость ряда (8) и оценка для $\varphi(t, R; \tau, S)$

$$|\varphi(t, R; \tau, S)| \leqslant A(t-\tau)^{-((6b+3)n+2b-\alpha/2b}\Phi(t, R; \tau, S). \tag{15}$$

Покажем существование непрерывных производных $D_y\varphi(t, R; \tau, S)$, $D_z\varphi(t, R; \tau, S)$.

При выполнении предположения 1 существуют непрерывные производные $D_yK(t, R; \tau, S)$, $D_zK(t, R; \tau, S)$, при этом

$$|D_yK(t, R; \tau, S)| \leqslant A\exp\{-c(\rho(t, x; \tau, \xi)+\rho_1(t, R'; \tau, S')+ +\rho_2(t, R; \tau, S))\}(t-\tau)^{-((6b+3)n+4b+1-\alpha)/2b}, \tag{16}$$

$$|D_zK(t, R; \tau, S)| \leqslant A\exp\{-c(\rho(t, x; \tau, \xi)+\rho_1(t, R'; \tau, S')+ +\rho_2(t, R; \tau, S))\}(t-\tau)^{-((6b+3)n+6b+1-\alpha)/2b}. \tag{17}$$

Для доказательства существования $D_yK_2(t, R; \tau, S)$, $D_zK_2(t, R; \tau, S)$ используем следующее свойство ф. р. уравнения

$$D_tu-\sum_{j=1}^{n}(x_jD_{y_j}+y_jD_{z_j})u=\sum_{|k|\leqslant 2b}a_k(t, R_0)D_x^ku.$$

Свойство 1. *Если $a_k(t, R_0)$ имеют r непрерывных ограниченных производных по параметру R_0, то*

$$|D_x^mD_{R_0}^pZ_0(t, R; \tau, S; R_0)| \leqslant c_m\exp\{-c(\rho(t, x; \tau, \xi)+\rho_1(t, R'; \tau, S')+ +\rho_2(t, R; \tau, S))\}(t-\tau)^{-((6b+3)n+|m|)/2b}, \quad p=0, 1, \ldots, r. \tag{18}$$

Так как

$$\begin{aligned} D_zK(t, R; \beta, M) = {} & \sum_{|k|=2b}(D_za_k(t, R)-D_\gamma a_k(t, M(t, \beta)))\times \\ & \times D_x^kZ_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta))+\sum_{|k|=2b}D_\gamma a_k(t, M(t, \beta))D_x^kZ_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta))+ \\ & +\sum_{|k|\leqslant 2b}(a_k(t,R)-a_k(t, M(t, \beta)))D_x^kD_zZ_0(t, R; \beta M; M(t, \beta))+ \\ & +\sum_{|k|<2b}D_za_k(t, R)D_x^kZ_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta)), \end{aligned} \tag{19}$$

или

$$\begin{aligned} D_zK(t, R; \beta, M) & \sum_{|k|=2b}[D_za_k(t, R)-D_\gamma a_k(t, M(t, \beta))]D_x^kZ_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta))- \\ & -D_\gamma\Big(\sum_{|k|=2b}(a_k(t, R)-a_k(t, M(t, \beta)))D_x^kZ_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta))\Big)+ \\ & +\sum_{|k|=2b}[a_k(t, R)-a_k(t, M(t, \beta))]D_x^kD_{\bar\gamma}Z_0(t, R; M, \beta; \overline{M}(t, \beta))|_{\bar\gamma=\gamma}+ \\ & +\sum_{|k|<2}a_k(t, R)[D_x^kD_{\bar\gamma}Z_0(t, R; \beta, M; \overline{M}(t, \beta))|_{\bar\gamma=\gamma}- \\ & -D_x^kD_\gamma Z_0(t, R; \beta, M; M(t, \beta))]+\sum_{|k|<2b}(a_k(t, R))'_zD_x^kZ_0(t, R; \\ & \beta, M; M(t, \beta)), \quad \overline{M}=(\lambda, \theta, \bar\gamma), \end{aligned} \tag{20}$$

то, используя представление (19), (20), интегрируя по частям, получаем

$$D_zK_2(t, R; \tau, S)=\lim_{h\to 0}\int_{\tau}^{t-h}d\beta\int_{\mathbb{R}^{3n}}D_zK(t, R; \beta, M)K(\beta, M; \tau, S)\,dM.$$

В силу (13), (17), (18) и леммы 1

$$|D_z K_2(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_2 \exp\{-c_2(1-\varepsilon)((c_3 - 2^{-2q} - (1-2^{-2q})2^{-q}) \times \times \rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + 2^{-3q}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S)))\} \times \times (t-\tau)^{-((6b+3)n+6b+1-2\alpha)2b}.$$

Аналогично случаю $D_z K_2(t,\ R;\ \tau,\ S)$ методом математической индукции устанавливаем существование $D_z K_m(t,\ R;\ \tau,\ S)$ для любого m:

$$|D_z K_m(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_m(\varepsilon) \exp\left\{-c_2(1-\varepsilon m)\left(\left(c_3 - 2^{-2q}\sum_{j=1}^{m-1} 2^{-3qj} - (1-2^{-2q})\sum_{j=1}^{m-1} 2^{-3qj-q}\right)\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + 2^{-3q(m-1)}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S))\right)\right\}(t-\tau)^{-((6b+3)n+6b+1-\alpha m)/2b}. \tag{21}$$

Обозначим $l = [((6b+3)n + 6b + 1)/\alpha] + 1$, тогда

$$|D_z K_l(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_l(\varepsilon) \exp\{-c_2(1-\varepsilon l)(c_{4,l}\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) - - 2^{-3q(l-1)}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S))\}.$$

Используя (20), производные от повторных ядер $K_m(t,\ R;\ \tau,\ S)$ при $m > l$ будем оценивать следующим образом:

$$|D_z K_{l+1}(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_0^2 \int_\tau^t (t-\beta)^{-\alpha/2b+1} d\beta \int_{\mathbb{R}^{3n}} \exp\left\{-\frac{c}{3}(\rho(t,\ x;\ \beta,\ \lambda) + \rho_1(t,\ R';\ \beta,\ M') + \rho_2(t,\ R;\ \beta,\ M))\right\}(t-\beta)^{-(6b+3)n/2b} dM \exp\{-c_2(1-\varepsilon_m) \times (c_{4,l} - 2^{-3q(l+2)} - 2^{-3q(l+1)}(1-2^{-2q})\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + 2^{-3ql}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S))\} \leqslant A_0(FA_0)\exp\{-c_5[c_{4,l+1}\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + + 2^{-3ql}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S))]\}(t-\tau)^{\alpha/2b} \mathrm{B}(\alpha/2b,\ 1),$$

где $F = \prod_{j=1}^{3n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{c}{3} z_j^q\right\} dz_j$. Пусть

$$|D_z K_{l+k}(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_0(FA_0)^k (t-\tau)^{k\alpha/2b} \prod_{j=0}^{k-1} \mathrm{B}(\alpha/2b,\ 1 + j\alpha/2b) \times \times \exp\{-c_5(c_{4,l+k}\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + 2^{-3q(l+k-1)}(\rho_1(t,\ R';\tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S)))\}. \tag{22}$$

Тогда

$$|D_z K_{l+k+1}(t,\ R;\ \tau,\ S)| \leqslant A_0(FA_0)^{k+1} \exp\{-c_5(c_{4,l+k+1}\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + + 2^{-3q(l+k)}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S)))\} \prod_{j=0}^{k-1} \mathrm{B}(\alpha/2b,\ 1 + + j\alpha/2b) \int_\tau^t (t-\beta)^{(\alpha-2b)/2b}(\beta-\tau)^{k\alpha/2b} = A_0(FA_0)^{k+1}(t-\tau)^{(k+1)\alpha/2b} \prod_{j=0}^{k} \mathrm{B}(\alpha/2b,\ 1 + + j\alpha/2b) \exp\{-c_5(c_{4,l+k+1}\rho(t,\ x;\ \tau,\ \xi) + 2^{-3q(l+k)}(\rho_1(t,\ R';\ \tau,\ S') + \rho_2(t,\ R;\ \tau,\ S))\}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} D_z K_m(t, R; \tau, S)$ мажорируется сходящимся рядом

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} D_z K_m(t, R; \tau, S)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{l} A_m (t-\tau)^{-((6b+3)n+6b+1-\alpha m)/2b} \times$$
$$\times \exp\{-(1-\varepsilon m)\, c_2 (c_m \rho(t, x; \tau, \xi) + 2^{-3q(m-1)} (\rho_1(t, R'; \tau, S') +$$
$$+ \rho_2(t, R; \tau, S)))\} + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} (\Gamma(\alpha/2b) F A_0)^k (t-\tau)^{\alpha k/2b} \Gamma^{-1} (1 +$$
$$+ k\alpha/2b) \exp\{-c_5 (c_{4,l+k}\rho + 2^{-3q(l+k-1)} (\rho_1 + \rho_2))\}. \tag{23}$$

Итак, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} D_z K_m(t, R; \tau, S)$ при $0 < \delta \leqslant t - \tau \leqslant T$ равномерно и абсолютно сходится и поэтому $D_z\varphi(t, R; \tau, S) = \sum_{m=1}^{\infty} D_z K_m(t, R; \tau, S)$. Поскольку $D_z K_m(t, R; \tau, S)$ — непрерывные функции, то и $D_z\varphi(t, R; \tau, S)$ — непрерывная функция.

Оценку (23) представим в виде

$$|D_z\varphi(t, R; \tau, S)| \leqslant A (t-\tau)^{-((6b+3)n+6b+1-\alpha)/2b} \Phi(t, R; \tau, S). \tag{24}$$

Повторяя изложенные выше рассуждения, используя лемму 1, свойство 1, (13), (14) и (16), аналогично доказываем существование непрерывной производной $D_z\, \varphi(t, R; \tau, S)$ при $0 < \delta < (t-\tau)$ и оценку

$$|D_y\varphi(t, R; \tau, S)| \leqslant A (t-\tau)^{-((6b+3)n+4b+1-\alpha)/2b} \Phi(t, R; \tau, S). \tag{25}$$

Рассмотрим

$$\Delta_{h_x}\varphi(t, R; \tau, S) = \Delta_{h_x} K(t, R; \tau, S) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{3n}} \Delta_{h_x} K(t, R; \beta, M) \times$$
$$\times \varphi(\beta, M; \tau, S)\, dM.$$

Рассуждая как в параболическом случае ([6, с. 78—79]), получаем

$$|\Delta_{h_x}\varphi(t, R; \tau, S)| \leqslant |h_x|^{\alpha_1} A (t-\tau)^{-((6b+3)n+2b-\alpha_2)/2b} \times$$
$$\times \Phi(t, R; \tau, S), \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 + \alpha_1 = \alpha. \tag{26}$$

Доказательство теоремы проводится на основании лемм 1, 2 и оценок (24)—(26).

1. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.— Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 7, с. 1316—1330.
2. *Эйдельман С. Д., Тычинская Л. М.* Построение фундаментальных решений вырождающихся параболических уравнений любого порядка.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 11, с. 896—899.
3. *Малицкая А. П.* Построение фундаментального решения для одного класса вырождающихся параболических уравнений высокого порядка.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 6, с. 754—762.
4. *Сонин И. М.* Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, вып. 3, с. 540—547.
5. *Малицкая А. П.* Построение фундаментального решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.— М., 1980.— 16 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3926-80 Деп.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 444 с.

Ивано-Франк. пед. ин-т

Получено 15.02.84,
после доработки — 22.02.85